2011年9月 天水师范学院学报 Sep.,2011
第31卷 第5期 Journal of Tianshui Normal University Vol.31 No.5

一个关于Smarandache Quotients函数序列的均值

齐小军
（天水师范学院 数学与统计学院，甘肃 天水 741001）

摘 要：主要应用初等方法研究了Smarandache Quotients函数序列的均值问题，得到了两个重要的等式.

关键词：Smarandache Quotients函数；均值；无限序列；除数函数；初等方法
中图分类号：O156.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1671-1351(2011)05-0025-02

引 言

在《Only problems, not solutions》这本书里，F Smarandache教授介绍了很多函数序列和一些未解决问题.

对任意的正整数n，著名的F Smarandache函数[1]$S(n)$被定义为最小的正整数m，使得$n|m!$，即就是$S(n)=\min\{m: n\mid m!, n\in N\}$.

近年来，很多学者都对它们进行了深入细致的研究.[2-5] 如文献[3]研究了$S(n)$的值分布问题，证明了对任意的实数$x>1$，有渐近公式

$\sum_{n\le x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+o(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x})$，其中$P(n)$表示$n$的最大素因子，$\zeta(s)$表示Riemann-Zeta函数.

文献[5]讨论了$Sdf(\sum_{i=1}^{k}m_i)$和$\sum_{i=1}^{k}Sdf(m_i)$的关系，证明了对任意正整数$k>4$，存在无穷多个正整数组$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$满足

$$Sdf(\sum_{i=1}^{k}m_i)=\sum_{i=1}^{k}sdf(m_i).$$

在这些未解决问题中有一个关于Smarandache Quotients函数序列的问题，很少有人研究它，至少现在还很少看见过关于它的论述.

对于任意的正整数n，Smarandache商函数序列$\{Q(n)\}$定义为最小的正整数k，使得$n\cdot k$是一个阶乘数，即$Q(n)=\min\{k: n\cdot k=m!\}$，其中$m$是正整数.

从定义我们可以看出这个序列的前几项是:

$Q(1)=1, Q(2)=1, Q(3)=2, Q(4)=6, Q(5)=24, Q(6)=1, Q(7)=720, Q(8)=3, Q(9)=80, Q(10)=12, Q(11)=362880, Q(12)=2, Q(13)=479001600, Q(14)=360, Q(15)=8, Q(16)=45, \cdots$

在文献[6]中，F. Smarandache教授建议我们研究商函数序列$\{Q(n)\}$的性质. 关于这个的问题Kenichiro Kashihara教授在文献[7]中给出了它的一个性质. 证明了对任意的素数p，有$Q(p)=(p-1)!$，即说明了该序列包含有无穷多个阶乘数.

在本文中，我们将用初等的方法研究包含在Smarandache商函数$\{Q(n)\}$无限序列中的几个均值问题，得出了两个有用的等式.

1 主要结果

定理1.1 若$d(n)$表示Dirichelet除数函数[8]，则有等式$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{Q(n)\cdot n}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{m\cdot d(m!)}{(m+1)!}$.

以下利用初等方法给出定理的证明.

证明 对于任意的正整数n，设$Q(n)=k$，从$Q(n)$的定义，我们知道k是使得$n\cdot k=m!$的最小的正整数. 因此k一定是$m!$的一个因数，这意味着有$k|m!$，并且所有使得$k|m!$的k的个数是$d(m!)$.

另一方面，如果$k(m-1)!$，并且$Q(n)\neq k$，则使得$k|(m-1)!$的k的个数是$d((m-1)!$. 于是，满足条件的k，即使得$k|m!$并且$k|(m-1)!$的个数是$d(m!)-d((m-1)!)$. 因此，所有k的个数（使得$Q(n)=k$并且$Q(n)\cdot n=m!$）即为$d(m!)-d((m-1)!)$. 于是有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{Q(n)\cdot n}=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{\substack{n=1\\Q(n)\cdot n=m!}}^{+\infty}\frac{1}{m!}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\#\{Q(n)\cdot n=m!\}}{m!}$$

收稿日期：2011-06-11
作者简介：齐小军（1977-），男，甘肃徽县人，天水师范学院数学与统计学院讲师，硕士.

$$= 1 + \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{d(m!) - d((m-1)!)}{m!}$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{d(m!)}{m!} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{d(m!)}{(m+1)!}$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(m+1) \cdot d(m!) - d(m!)}{(m+1)!}$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m \cdot d(m!)}{(m+1)!}.$$

这里$d(m)$是 Dirichelet 除数函数,并且$\#\{Q(n)\cdot n=m!\}$表示等式$Q(n)\cdot n=m!$成立的所有解的个数.

如果$Q_1(2n-1)$表示最小的正奇数,并使得$Q_1(2n-1)\cdot(2n-1)$是一个双阶乘数,即$Q_1(2n-1)\cdot(2n-1)=(2m-1)!!$,这里$(2m-1)!!=1\times3\times5\times\cdots\times(2m-1)$,则对于序列$\{Q_1(2n-1)\}$,我们可得下面推论.

推论 1.1 若$d(n)$表示 Dirichelet 除数函数,则有等式

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{Q_1(2n-1)\cdot(2n-1)} = 2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m\cdot d((2m-1)!!)}{(2m+1)!!}.$$

证明 可用类似的方法证明推2.1.

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{Q_1(2n-1)\cdot(2n-1)}$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ Q_1(2n-1)\cdot(2n-1)=(2m-1)!!}}^{+\infty} \frac{1}{(2m-1)!!}$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\#\{Q_1(2n-1)\cdot(2n-1)=(2m-1)!!\}}{(2m-1)!!}$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{d((2m-1)!!)}{(2m-1)!!} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{d((2m-1)!!)}{(2m+1)!!}$$

$$= 2\cdot\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m\cdot d((2m-1)!!)}{(2m+1)!!}$$

这里$\#\{Q_1(2n-1)\cdot(2n-1)=(2m-1)!!\}$表示等式$Q_1(2n-1)\cdot(2n-1)=(2m-1)!!$成立的所有解的个数.

以上的结果给出了包含在序列$\{Q(n)\}$中的两个均值问题,而关于该序列还有一些未解决问题,比如在序列$\{Q(n)\}$中含有多少个素数方幂?含有多少个平方数,立方数等等.这些问题还有待于在今后的研究中得以解决.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F.Only Problems,Not Solutions[M].Chicago:Xiquan Publ.House,1993.

[2] ZHANG WENPENG.On a Equation of Smarandache and Its Integer Solutions[J].Smarandache Notions Journal,2002,13(2):176-178.

[3] 徐哲峰.Smarandache 函数的值分布[J].数学学报(自然科学版),2006,49(5):1009-1012.

[4] 贺艳峰,田清.一个包含Smarandache 函数的混合均值[J].纯粹数学与应用数学,2009,25(1):129-132.

[5] WANG XIAOYING.On Certain Equations Involving the Smarandache Double Factorial Function[J].Scientia Magna,2008,1(4):56-59.

[6] SMARANDACHE F.Sequences of Numbers Involved in Unsolved Problems [M].Phoenix:Hexis,2006.

[7] KENICHIRO KASHIHARA.Comments and Topics On Smarandache Notions and Problems[M].New Mexico:Erhus University Press,1996.

[8] 潘承洞,潘承彪.解析数论基础[M].北京:科学出版社,1999.

〔责任编辑 邵海琴〕

One Mean Value Related to the Function Sequence of *Smarandache Quotients*

Qi Xiaojun

(School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui Gansu 741001, *China)*

Abstract: The properties of Smarandache Quotients function sequence were dicussed by using the elementary method, and two important equations involving the Smarandache Quotients were obtained in this paper.

Key words: *Smarandache Quotients* function; mean value; infinite sequence;divisor function; elementary method