Neutrosophic Knowledge, Vol. 3, 2021
University of New Mexico

دراسة في الفضاءات الخطية النتروسوفيكية

ملاذ فريد الأسود

دكتوراه في الرياضيات – جامعة غازي عنتاب - تركيا
Email: Malaz.aswad@yahoo.com

Received: Received: June 2021; *Accepted:* July 2021

الملخص: في هذه الدراسة نقدم تعريف الفضاءات الخطية النتروسوفيكية أو(النيوتروسوفكية)، بالإضافة للفضاءات الخطية النتروسوفيكية المنظمة، كما نقدم مفهوم الجداء الداخلي النتروسوفيكي، وذلك من خلال تقديم بعض المبرهنات الخاصة بالجداء الداخلي النتروسوفيكي، أما الجزء الثاني من هذه الدراسة، سنعرض فيه تعريف تعامد شعاعيين نتروسوفيكيين في فضاء نتروسوفيكي، وتعريف الجملة المتعامدة والمنظمة لمجموعة أشعة نتروسوفيكية من فضاء شعاعي نتروسوفيكي، وأخيراً نقدم طريقة جرام شميدث نتروسوفيكياً لإيجاد جملة متعامدة منظمة لجملة أشعة نتروسوفيكية وفتح المجال لدراسة الدوال النتروسوفيكية الخاصة اعتماداً على طريقة جرام شميدث نتروسوفيكياً.

Abstract: In this paper, we present the definition of neutrosophic linear spaces, In addition to the neutrosophic normed linear spaces. We also introduce concept of the neutrosophic inner product , This is done by presenting some of the theorem for of the neutrosophic inner product, As for the second of this paper, we will present the orthogonality of two neutrosophic vectors of neutrosophic space, And the definition of an orthogonal and orthonormal systemof a set of neutrosophic vectors from a neutrosophic vector space, We present the Gram-Schmidt neutrosophy method for finding an orthogonal orthonormal systemof a set of neutrosophic vectors, and it opened the way for the study neutrosophic property functions based on the Gram-Schmidt neutrosophy method.

الكلمات الرئيسيّة: العدد الحقيقي النتروسوفيكي، الفضاء الخطي النتروسوفيكي، الجداء الداخلي النتروسوفيكي.

1. مقدمة

عمم فلورنتين سمارنداكة عام 1995 مفهوم المنطق الضبابي (Fuzzy) إلى المنطق النتروسوفيكي أو(النيوتروسوفيكي)، ثم ظهرت العديد من الأبحاث في هذا المنطق الجديد في شتى أنواع العلوم وخاصة في الرياضيات بجميع فروعها لا سيما التوبولوجيا والجبر أنظر مثلا [1]،[2]،[3]،[4]. إن العالم الذي يحيط بنا تتسم أحداثه ووقائعه بالتناقض، والغموض، واللاتحديد حيث تُفصح كل قضية عن الصدق تارة وعن الكذب تارة أخرى وعن عدم التحديد. لذلك برزت حاجتنا لمنطق جديد يعكس حقيقة رؤيتنا النسبية لهذا الواقع. هذا المنطق هو المنطق النتروسوفيكي (النيوتروسوفيكي) الذي أسسه العالم الأمريكي فلورنتين سمارنداكة عام 1995 والذي يدرس ويهتم بالحياد [5]، بحيث يأخذ هذا المنطق بعين الاعتبار كل فكرة مع نقيضها مع طيف الحياد، حيث يأخذ هذا المنطق كل بيان بثلاث أبعاد هي الصح (T) بدرجات والخطأ (F) بدرجات والحياد (I) بدرجات، ويمكننا أن نعبر عن ذلك بالصيغة (T, I, F) وهذا يعطي وصفاً أدق من المنطق الضبابي والمنطق العادي.

انبثقت من منطق النتروسوفيك المجموعات النتروسوفيكية الكلاسيكية أو(الهشة) كتعميم لنظرية المجموعات الكلاسيكية التي قدمها جورج كانتور، والمجموعات الحدسية، وفق هذا المنطق على يد البروفيسور المصري أحمد سلامة وفريق من الباحثين، حيث تناول أول كتاب قدمه سلامة و سمارنداكة عام 2015 مفهوم المجموعة النتروسوفكية الكلاسيكية بشكل مفصل [13]. وفيما بعد عُرفت نقاط نتروسوفكية كلاسيكية جديدة [6]، واستخدمت في توصيف مجموعات نتروسوفكية كلاسيكية مغلقة [7]. لقد أدخل سلامة العديد من المفاهيم ووضع أسس لرياضيات جديدة وتطبيقات متعددة في مجال علوم الحاسب، والاحصاء، والاحتمالات، ونظم المعلومات، ودعم واتخاذ القرار، ففي مجال التوبولوجي، وعلوم الحاسب، والاحصاء، وعلم النفس، والاجتماع، فقد قدم العديد من الابحاث التطبيقية بمشاركة سمارنداك [13-20]. هذا وعرض الباحث ملاذ الأسود تعريفا لتكامل دالة السُمك النتروسوفيكية وتم نشر مقال في مجلة IJNS بعنوان "دراسة تكامل دالة السمك النتروسوفيكية" [8]،

وتطبيقها في تعريف أنماط جديدة لمعادلات تفاضلية نتروسوفيكية، وفيما يتعلق بالأعداد العقدية النتروسوفيكية فقد قام الباحثان الدكتور رياض الحميدو والأستاذ مياس اسماعيل بدراسة هذه الأعداد، حيث قام الباحثان بتعريف الصيغة القطبية للعدد العقدي النتروسوفيكي[9]، وقام الباحث ملاذ الأسود أيضاً بدراسة الأعداد العقدية النتروسوفيكية، من خلال نشر بحث في مجلة Neutrosophic Knowledge [10]. وحول المفاهيم السماراندااكية في نظرية الأعداد فقد تم تنظيم مؤتمرا دوليا بجامعة كرايوفا، رومانيا نوقشت به هذه المفاهيم بشكل مفصل [12].

في هذه الدراسة نقدم تعريف الفضاءات الخطية النتروسوفيكية أو(النيوتروسوفكية)، بالإضافة للفضاءات الخطية النتروسوفيكية المنظمة، ومفهوم الجداء الداخلي النتروسوفيكي. كما نعرض تعريف تعامد شعاعيين نتروسوفيكيين في فضاء نتروسوفيكي، والجملة المتعامدة والمنظمة لمجموعة أشعة نتروسوفيكية من فضاء شعاعي نتروسوفيكي. وأخيراً نقدم طريقة جرام شميدث نتروسوفيكياً لإيجاد جملة متعامدة منظمة لجملة أشعة نتروسوفيكية.

2. تمهيد

في هذا القسم سنشير إلى مفهوم الفضاءات الخطية النتروسوفيكية، والفضاءات الخطية النتروسوفيكية المنظمة. وبعد ذلك سنقدم مجموعة من المفاهيم المتعلقة بالفضاءات الخطية والخطية المنظمة النتروسوفيكية، كمفهوم الجداء الداخلي النتروسوفيكي، والتعامد النتروسوفيكي في فضاء الجداء الداخلي النتروسوفيكي، بالإضافة للجمل المتعامدة المنظمة نتروسوفيكياً، وتعريف لطريقة جرام شميدث نتروسوفيكياً في إيجاد جملة متعامدة منظمة نتروسوفيكياً، مع ذكر بعض الأمثلة التوضيحية. خلال هذا البحث تشير X لمجموعة نتروسوفيكية غير خالية، و$(x+I)$ لعنصر من X، أما العدد $\|x+I\|$ نسميه نظيم العنصر $(x+I)$.

التعريف 1: [12] **العدد الحقيقي النتروسوفيكي:**

يعرف العدد الحقيقي النتروسوفيكي بالعلاقة $w=a+bI$ حيث أن a و b أعداد حقيقة و I عنصر اللاتحديد. مع الأخذ بعين الاعتبار أن $0.I=0$ و $I^n=I$ لجميع قيم n الموجبة. مثال ذلك:

$$w=7-9I\ ,w=-11=-11+0I$$

التعريف 2: [12] **قسمة عددين حقيقيين نتروسوفيكيين:**

ليكن $w_1=a_1+b_1I$ و $w_2=a_2+b_2I$ عندئذ يكون:

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{a_1+b_1I}{a_2+b_2I}=\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2(a_2+b_2)}I\ \dots\dots\ (1)$$

الملاحظة 1:

$$\sqrt{I}=\mp I\ ,I^2=I,0.I=0$$

التعريف 3: الفضاء الخطي النتروسوفيكي:

لتكن X مجموعة نتروسوفيكية غير خالية. فإذا أمكننا تعريف عمليتين جديتين على عناصر X . الأولى تُسمى الجمع $(+)$ والثانية تُسمى الضرب بعدد $(.)$ بحيث يتحقق ما يأتي:

<u>أولاً:</u> من أجل أي عنصرين $(x+I),(y+I)$ من X يجب أن ينتمي $(x+I)+(y+I)$ إلى X. وأيضاً:

$(1).\ (x+I)+(y+I)=(y+I)+(x+I);\forall(x+I),(y+I)\in X$

$(2).\ (x+I)+\big((y+I)+(z+I)\big)=\big((x+I)+(y+I)\big)+(z+I)$

وذلك أياً كان $(x+I),(y+I),(z+I)\in X$.

$(3).\ \forall(x+I)\in X,\exists\theta+I\in X:(x+I)+(\theta+I)=(x+I)$

$(4).\ \forall(x+I)\in X,\exists-(x+I)\in X:(x+I)+\big(-(x+I)\big)=(\theta+I)$

العنصر $(\theta+I)$ يسمى العنصر الصفري (صفر الفضاء) وهو وحيد في حال وجوده، والعنصر $-(x+I)$ يسمى العنصر النظير للعنصر $(x+I)$ وهو وحيد من أجل كل $(x+I)$.

<u>ثانياً:</u> من أجل أي $(x+I)$ من X وأي عدد λ من K (حيث K مجموعة الأعداد الحقيقية النتروسوفيكية أو العقدية النتروسوفيكية) فإن $\lambda(x+I)$ هو عنصر في X وأيضاً:

$(1).\lambda.\big(\mu(x+I)\big)=(\lambda.\mu)(x+I);\forall(x+I)\in X,\forall\lambda,\mu\in K$

$(2).(\lambda+\mu).(x+I)=\lambda.(x+I)+\mu.(x+I);\forall(x+I)\in X,\forall\lambda,\mu\in K$

$(3).\lambda.\big((x+I)+(y+I)\big)=\lambda.(x+I)+\lambda.(y+I)$

$$;\forall(x+I),(y+I)\in X,\forall\lambda,\in K$$

$(4).\ 1.(x+I)=(x+I);\forall(x+I)\in X$

عندئذ نسمي الثلاثية $(X,+,.)$ فضاءً خطياً نتروسوفيكياً.

إذا كانت $K=R$ سمي فضاء خطياً حقيقياً نتروسوفيكياً، وإذا كانت $K=C$ سمي فضاء خطياً عقدياً نتروسوفيكياً.

التعريف 4: (الفضاء الخطي النتروسوفيكي المنظم):

يُقال عن فضاء خطي نتروسوفيكي أنه منظم إذا أمكن أن نقرن كل عنصر $(x+I)$ من X بعدد حقيقي نتروسوفيكي نرمز لـه بـالرمز $\|x+I\|_X$ ونكتب اختصاراً $\|x+I\|$ بحيث تتحقق الشروط الآتية:

$(1).\ \|x+I\|\geq 0;\forall(x+I)\in X,\|x+I\|=0\Leftrightarrow x+I=0$

$(2).\ \|\lambda(x+I)\|=|\lambda|\|x+I\|;\forall(x+I)\in X,\forall\lambda\in K$

$(3).\ \|(x+I)+(y+I)\|\leq\|x+I\|+\|y+I\|;\forall(x+I),(y+I)\in X$

تسمى العلاقة الأخيرة (3) بمتراجحة المثلث نتروسوفيكياً.

أما العدد $\|x+I\|$ نسميه نظيم العنصر $(x+I)$.

التعريف 5: (الجداء الداخلي النتروسوفيكي):

ليكن E فضاء شعاعياً حقيقياً نتروسوفيكياً. نسمي التطبيق:

$$\langle\,,\rangle:E\times E\ \to R$$
$$;\ (x+I,y+I)\to\langle x+I,y+I\rangle$$

بحيث تتحقق الشروط الآتية:

$(1).\ \langle x+I,x+I\rangle\geq 0,\langle x+I,x+I\rangle=0\Leftrightarrow x+I=\theta$

$(2).\ \langle\lambda(x+I),z+I\rangle=\lambda\langle x+I,z+I\rangle$

$(3).\ \langle(x+I)+(y+I),z+I\rangle=\langle x+I,z+I\rangle+\langle y+I,z+I\rangle$

حيث $(x+I),(y+I),(z+I)\in E$ و $\lambda\in R$ ،بجداء داخلي نتروسوفيكي في E.

المبرهنة 1:

كل فضاء حقيقي نتروسوفيكي E هو فضاء منظم نظيمه يولد بالجداء الداخلي ويعطى بالعلاقة:

$$\|x+I\|=\sqrt{\langle x+I,x+I\rangle}$$

البرهان:

من الواضح أن المساواة السابقة لها معنى لأن: $\langle x+I,x+I\rangle\geq 0$ دوماً. ولنتحقق من موضوعات النظيم نجد:

$(1).\ \|x+I\|=\langle x+I,x+I\rangle\geq 0$

ولدينا:

$$x+I=\theta\Leftrightarrow\langle x+I,x+I\rangle=0\Leftrightarrow\sqrt{\langle x+I,x+I\rangle}=0\Leftrightarrow\|x+I\|=0$$

$(2).\ \|\lambda(x+I)\|=\sqrt{\langle\lambda(x+I),\lambda(x+I)\rangle}=\sqrt{\lambda^2\langle(x+I),(x+I)\rangle}=|\lambda|\sqrt{\langle x+I,x+I\rangle}=|\lambda|\|x+I\|$

$$\begin{aligned}(3).\ \|(x+I)+(y+I)\|^2&=\langle(x+I)+(y+I),(x+I)+(y+I)\rangle\\&=\langle(x+I),(x+I)\rangle+2\langle(x+I),(y+I)\rangle+\langle(y+I),(y+I)\rangle\\&\leq\langle(x+I),(x+I)\rangle+2\sqrt{\langle(x+I),(x+I)\rangle\,\langle(y+I),(y+I)\rangle}+\langle(y+I),(y+I)\rangle\\&=(\|x+I\|+\|y+I\|)^2\end{aligned}$$

المثال 1:

أثبت صحة المتطابقة الآتية فيE :

$$(\|x+I\|+\|y+I\|)^2+(\|x+I\|-\|y+I\|)^2=2(\|x+I\|^2+\|y+I\|^2)$$

الحل:

$$l_1=(\|x+I\|+\|y+I\|)^2+(\|x+I\|-\|y+I\|)^2$$
$$l_1=\langle(x+I)+(y+I),(x+I)+(y+I)\rangle+\langle(x+I)-(y+I),(x+I)-(y+I)\rangle$$

$$l_1 = \langle (x+I),(x+I)\rangle + 2\langle (x+I),(y+I)\rangle + \langle (y+I),(y+I)\rangle + \langle (x+I),(x+I)\rangle$$
$$- 2\langle (x+I),(y+I)\rangle + \langle (y+I),(y+I)\rangle$$
$$l_1 = 2\big(\langle (x+I),(x+I)\rangle + \langle (y+I),(y+I)\rangle\big)$$
$$l_1 = 2(\|x+I\|^2 + \|y+I\|^2) = l_2$$

المثال 2:

أثبت أن الفضاء النتروسوفيكي المنظم E هو فضاء متري نتروسوفيكي مسافته تعطى بالعلاقة:

$$d(x+I, y+I) = \|(x+I)-(y+I)\|; (x+I),(y+I) \in E$$

الحل:

ليكن $(x+I),(y+I),(z+I) \in E$ ولنتحقق من موضوعات المسافة:

$$(1).\ d(x+I,y+I) = \|(x+I)-(y+I)\| > 0$$

ولدينا:

$$d(x+I,y+I) = 0 \Leftrightarrow \|(x+I)-(y+I)\| = 0 \Leftrightarrow (x+I)-(y+I) = 0 \Leftrightarrow (x+I) = (y+I)$$
$$(2).\ d(x+I,y+I) = \|(x+I)-(y+I)\| = \big\|(-1)\big((y+I)-(x+I)\big)\big\| = |\lambda|\sqrt{\langle x+I, x+I\rangle}$$
$$= |-1|\|(y+I)-(x+I)\| = \|(y+I)-(x+I)\| = d(y+I,x+I)$$
$$(3).\ d(x+I,z+I) = \|(x+I)-(z+I)\| = \|(x+I)-(y+I)+(y+I)-(z+I)\|$$
$$\le \|(x+I)-(y+I)\| + \|(y+I)-(z+I)\| = d(x+I,y+I) + d(y+I,z+I)$$

المثال 3:

ليكن V فضاء شعاعياً نتروسوفيكياً لتوابع حقيقيـة نتروسـوفيكية مسـتمرة علـى المجـال $[a,b]$ أي $f:[a,b]\to R$، ولـيكن $\langle f,g\rangle =$ $\int_a^b f(x)\,g(x)dx$ جداءً داخليا على V وبفرض أن:

$$f(x) = (x+I) + 2$$
$$g(x) = 3(x+I) - 2$$

أوجد $\langle f,g\rangle$ حيث $x \in [0,1]$.

الحل:

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)dx = \int_0^1 \big((x+I)+2\big)\,(3(x+I)-2)dx$$

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 (3(x+I)^2 - 2(x+I) + 6(x+I) - 4)\,dx$$

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 (3x^2 + 6xI + I + 4x + 4I - 4)\,dx$$

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 (3x^2 + (6I+4)x + 5I - 4)\,dx$$

$$\langle f,g\rangle = [x^3 + (3I+2)x^2 + (5I-4)x]_0^1$$
$$\langle f,g\rangle = 1 + 3I + 2 + 5I - 4$$
$$\langle f,g\rangle = -1 + 8I$$

التعريف 6: (التعامد في فضاءات الجداء الداخلي النتروسوفيكي)

ليكن $(u+I)$ و $(v+I)$ شعاعين من فضاء جداء داخلي $(V,\langle\,,\rangle)$. نقول إن الشعاع $(u+I)$ يعامد الشعاع $(v+I)$ إذا كان:

$$\langle u+I, v+I\rangle=(u+I)(v+I)=0=0+0I$$

المثال 4:

أثبت تعامد الشعاعين الآتيين:

$$u+I=(7+I,0), v+I=(0,2+I)$$

الحل:

$$\langle u+I, v+I\rangle=(u+I)(v+I)=(7+I)(0)+(0)(2+I)=0+0=0$$

المثال 5:

أثبت تعامد الشعاعين الآتيين:

$$u+I=(1+I,2+I,-3-I,4+I), v+I=(3+I,4+I,1+I,-2-I)$$

الحل:

$$\langle u+I, v+I\rangle=(u+I)(v+I)=(1+I)(3+I)+(2+I)(4+I)+(-3-I)(1+I)+(4+I)(-2-I)$$

$$\langle u+I, v+I\rangle=3+5I+8+7I-3-5I-8-7I=0$$

التعريف 7: (الجملة النتروسوفيكية المتعامدة المنظمة)

قول عن الجملة $\{u_1+I, u_2+I, \dots\dots, u_n+I\}$ إذا كانت كل اشعتها غير صفرية وكانت هذه الأشعة متعامدة مثنى مثنى أي:

$$\langle u_i+I, u_j+I\rangle=0\,; i\neq j$$

ونقول إنها منظمة إذا كان:

$$\langle u_i+I, u_j+I\rangle=1\,; i=j$$

التعريف 8: (المسقط القائم لشعاع نتروسوفيكي على شعاع نتروسوفيكي):

ليكن $(u+I)$ و $(v+I)$ شعاعين نتروسوفيكين غير صفريين من V. نسمي الشعاع $\frac{\langle u+I,v+I\rangle}{\langle v+I,v+I\rangle}(v+I)$ المسقط القائم للشعاع $(u+I)$ على الشعاع $(v+I)$ ونرمز له بالرمز $Pr_{v+I}(u+I)$ ونكتب:

$$Pr_{v+I}(u+I)=\frac{\langle u+I, v+I\rangle}{\langle v+I, v+I\rangle}(v+I)$$

التعريف 9: (خوارزمية جرام شميدث في التعامد نتروسوفيكياً)

إذا كانت $\{u_1+I, u_2+I, \dots\dots, u_n+I\}$ قاعدة للفضاء النتروسوفيكي V وإذا كان:

$$v_1+I=u_1+I$$

$$v_2+I=u_2+I-Pr_{v_1+I}(u_2+I)$$

$$v_3+I=u_3+I-Pr_{v_1+I}(u_3+I)-Pr_{v_2+I}(u_3+I)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_n+I=u_n+I-Pr_{v_1+I}(u_n+I)-\dots\dots\dots\dots-Pr_{v_{n-1}+I}(u_n+I)$$

فإن الجملة:

$$\left\{w_1=\frac{v_1+I}{\|v_1+I\|}, w_2=\frac{v_2+I}{\|v_2+I\|}, \dots, w_n=\frac{v_n+I}{\|v_n+I\|}\right\}$$

تشكل قاعدة منظمة متعامدة للفضاء النتروسوفيكي V.

المثال 4:

لتكن القاعدة النتروسوفيكية:

$$\begin{Bmatrix} u_1+I=(1+I,1+I,1+I), u_2+I=(0,1+I,1+I) \\ u_3+I=(0,0,1+I) \end{Bmatrix}$$

للفضاء النتروسوفيكي R^3. أوجد القاعدة المنظمة المتعامدة w_i باستخدام خوارزمية جرام شميدث نتروسوفيكياً.

الحل:

$$v_1 + I = u_1 + I = (1 + I, 1 + I, 1 + I)$$

$$v_2 + I = u_2 + I - Pr_{v_1+I}(u_2 + I) = u_2 + I - \frac{\langle u_2 + I, v_1 + I\rangle}{\langle v_1 + I, v_1 + I\rangle}(v_1 + I)$$

$$v_2 + I = (0,1 + I, 1 + I) - \frac{2(1 + I)^2}{3(1 + I)^2}(1 + I, 1 + I, 1 + I)$$

$$v_2 + I = (0,1 + I, 1 + I) - \frac{2 + 6I}{3 + 9I}(1 + I, 1 + I, 1 + I)$$

$$v_2 + I = (0,1 + I, 1 + I) - \frac{2}{3}(1 + I, 1 + I, 1 + I)$$

$$v_2 + I = (0,1 + I, 1 + I) - \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}I, \frac{2}{3} + \frac{2}{3}I, \frac{2}{3} + \frac{2}{3}I\right)$$

$$v_2 + I = \left(\frac{-2}{3} - \frac{2}{3}I, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}I, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}I\right)$$

$$v_3 + I = u_3 + I - Pr_{v_1+I}(u_3 + I) - Pr_{v_2+I}(u_3 + I)$$

$$v_3 + I = u_3 + I - \frac{\langle u_3 + I, v_1 + I\rangle}{\langle v_1 + I, v_1 + I\rangle}(v_1 + I) - \frac{\langle u_3 + I, v_2 + I\rangle}{\langle v_2 + I, v_2 + I\rangle}(v_2 + I)$$

$$v_3 + I = (0,0,1 + I) - \frac{(1 + I)^2}{3(1 + I)^2}(1 + I, 1 + I, 1 + I)$$

$$- \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}I\right)(1 + I)}{\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}I\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}I\right)^2}\left(\frac{-2}{3} - \frac{2}{3}I, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}I, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}I\right)$$

$$v_3 + I = (0,0,1 + I) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}I, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}I, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}I\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{3} - \frac{2}{3}I, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}I, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}I\right)$$

$$v_3 + I = \left(0, \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}I, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\right)$$

ومنه:

$$w_1 + I = \frac{v_1 + I}{\|v_1 + I\|} = \frac{(1 + I, 1 + I, 1 + I)}{\sqrt{3(1 + I)^2}} = \frac{(1 + I, 1 + I, 1 + I)}{\sqrt{3 + 9I}}$$

$$w_1 + I = \left(\frac{1 + I}{\sqrt{3 + 9I}}, \frac{1 + I}{\sqrt{3 + 9I}}, \frac{1 + I}{\sqrt{3 + 9I}}\right)$$

$$w_2 + I = \frac{v_2 + I}{\|v_2 + I\|} = \frac{\left(\frac{-2}{3} - \frac{2}{3}I, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}I, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}I\right)}{\sqrt{\frac{2}{3} + 2I}}$$

$$w_2 + I = \left(\frac{\frac{-2}{3} - \frac{2}{3}I}{\sqrt{\frac{2}{3} + 2I}}, \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}I}{\sqrt{\frac{2}{3} + 2I}}, \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}I}{\sqrt{\frac{2}{3} + 2I}}\right)$$

$$w_3 + I = \frac{v_3 + I}{\|v_3 + I\|} = \frac{\left(0, \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}I, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\right)}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}I}}$$

$$w_3 + I = \left(0, \frac{\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}I}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}I}}, \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}I}}\right)$$

إذن:

$$\{w_1 + I, w_2 + I, w_3 + I\}$$

تشكل قاعدة منظمة متعامدة للفضاء النتروسوفيكي $R^3 \cup I$. ويمكن التحقق من ذلك كما يأتي:

$$\langle w_1 + I, w_1 + I\rangle = \|w_1 + I\|^2 = \left(\sqrt{\frac{3(1+I)^2}{3+9I}}\right)^2 = \frac{3+9I}{3+9I} = 1$$

$$\langle w_2 + I, w_2 + I\rangle = \|w_1 + I\|^2 = \frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}I\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}I\right)^2}{\frac{2}{3}+2I} = \frac{\frac{2}{3}+2I}{\frac{2}{3}+2I} = 1$$

$$\langle w_3 + I, w_3 + I\rangle = \|w_1 + I\|^2 = \frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\right)^2}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}I} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}I}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}I} = 1$$

إذن فالجملة منظمة.

ولدينا:

$$\langle w_1 + I, w_2 + I\rangle = \frac{(1+I)\left(\frac{-2}{3}-\frac{3}{2}I\right) + 2(1+I)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}I\right)}{\sqrt{3+9I}\sqrt{\frac{2}{3}+2I}} = \frac{\frac{-2}{3}-\frac{2}{3}I-\frac{2}{3}I-\frac{2}{3}I+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}I+\frac{2}{3}I+\frac{2}{3}I}{\sqrt{3+9I}\sqrt{\frac{2}{3}+2I}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{3+9I}\sqrt{\frac{2}{3}+2I}} = 0$$

$$\langle w_1 + I, w_3 + I\rangle = \frac{0 + (1+I)\left(\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}I\right) + (1+I)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\right)}{\sqrt{3+9I}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}I}} = \frac{\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}I-\frac{1}{2}I-\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}I}{\sqrt{3+9I}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}I}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{3+9I}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}I}} = 0$$

$$\langle w_2 + I, w_3 + I\rangle = \frac{0 + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}I\right)\left(\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}I\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}I\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\right)}{\sqrt{\frac{2}{3}+2I}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}I}}$$

$$= \frac{\frac{-1}{6}-\frac{1}{6}I-\frac{1}{6}I-\frac{1}{6}I+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}I+\frac{1}{6}I+\frac{1}{6}I}{\sqrt{\frac{2}{3}+2I}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}I}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{2}{3}+2I}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}I}} = 0$$

إذن فالجملة متعامدة.

المراجع

1. R.K. Al-Hamido, Q. H. Imran, K. A. Alghurabi, T. Gharibah, "On Neutrosophic Crisp Semi Alpha Closed Sets", Neutrosophic Sets and Systems", vol. 21,pp 28-35, (2018).
2. Q. H. Imran, F. Smarandache, R.K. Al-Hamido, R. Dhavasselan, "On Neutrosophic Semi Alpha open Sets", Neutrosophic Sets and Systems, vol. 18, pp 37-42, (2017).
3. Al-Hamido, R. K.; "A study of multi-Topological Spaces", PhD Theses, AlBaath university , Syria, (2019).
4. Al-Nafee. A. B, Broumi. S, F. Smarandache. (2021). Neutrosophic Soft Bitopological Spaces. International Journal of Neutrosophic Science, 14(1), 47–56.

5. F. smarandache, "A Unifuing Field in Logics: Neutrosophic Logic, Neutrosophy, Neutrosophic Sets" ,Neutrosophic Probability American Research Press, Rehoboth, NM, (1999).
6. Al-Nafee, A.B.; Al-Hamido, R.K.; Smarandache, F. Separation axioms in neutrosophic crisp topological spaces. Neutrosophic Sets Syst. 2019, 25, 25–32.
7. AL-Nafee, A. B., Smarandache, F., & Salama, A. A. (2020). New Types of Neutrosophic Crisp Closed Sets. Neutrosophic Sets & Systems, 36. pp. 175 -183.
8. Malath. F. Alaswad, "A Study of the Integration of Neutrosophic Thick Functions," International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), pp 13-22 May (2020).
9. R. Alhamido, M. Ismail, F. Smarandache; "The Polar form of a Neutrosophic Complex Number", International Journal of Neutrosophic Science, Vol.10,pp: 36-44, (2020).
10. Malath. F. Alaswad, "A Study of a Neutrosophic Complex Numbers And Applications," Neutrosophic Knowledge (NK),Vol 1, pp.24-40, November (2020).
11. F. smarandache, "Neutrosophy and Neutrosophic Logic, First International Conference on Neutrosophy, neutrosophic Logic, Set, Probability, and Statistics", University of New Mexico, Gallup, NM87301, USA,2002.
12. F .Smarandache, "Introduction to Neutrosophic statistics", Sitech-Education Publisher, pp34-44, 2014.
13. A.A.Salama, F.Smarandache, *Neutrosophic Crisp Set Theory*; Educational Publisher: Columbus, 2015.
14. Salama, A. A., Haitham, A., Ayman, M., Smarandache, F. Introduction to Develop Some Software Programs for Dealing with Neutrosophic Sets, Neutrosophic Sets and Systems, 2014, vol. 3, pp.51-52.
15. Salama, A. A., Eisa, M., ElGhawalby, H., Fawzy, A. E. A New Approach in Content-Based Image Retrieval Neutrosophic Domain. In Fuzzy Multi-criteria, Decision-Making Using Neutrosophic Sets. Springer, Cham, 2019, pp. 361-369, 2019
16. Alhabib, R., Salama, A. A., The Neutrosophic Time Series-Study Its Models (Linear-Logarithmic) and test the Coefficients Significance of Its linear model. Neutrosophic Sets and Systems, 2020, Vol.33, pp.105-115.
17. A. A. Salama, and H. A. Elagamy: Some Topics Related Neutrosophic Fuzzy Ideal Bitopological Spaces. Neutrosophic Knowledge, vol. 2, pp. 23-28, 2021.
18. Belal Amin, A. A. Salama, I. M. El-Henawy, Khaled Mahfouz, Mona G. Gafar, "Intelligent Neutrosophic Diagnostic System for Cardiotocography Data", Computational Intelligence and Neuroscience, vol. 2021, Article ID 6656770, 12 pages, 2021.
19. Yasser I., Abd El-Khalek A.A., Twakol A., Abo-Elsoud ME., Salama A.A., Khalifa F., A Hybrid Automated Intelligent COVID-19 Classification System Based on Neutrosophic Logic and Machine Learning Techniques Using Chest X-Ray Images. In: Hassanien AE., Elghamrawy S.M., Zelinka I. (eds) Advances in Data Science and Intelligent Data Communication Technologies for COVID-19. Studies in Systems, Decision and Control, vol 378. Springer, 2021.
20. Kawther F. Alhasan, A.A. Salama, & Florentin Smarandache, Introduction to Neutrosophic Reliability Theory. International Journal of Neutrosophic Science, 15(1), 52–61, 2021.