Neutrosophic Knowledge, Vol. 2, 2021
University of New Mexico

دراسة في المتسلسلات النيتروسوفكية

Malath F. Alaswad 1*

[1] Faculty of science, Department of Mathematics, AL- Baath University, Homs, Syria; Malaz.aswad@yahoo.com
* Correspondence: Malaz.aswad@yahoo.com

Received: February 2021; *Accepted:* March 2021

الملخص: في هذه الدراسة سيتم عرض تعريف المتسلسلة العددية النتروسوفيكية، بالإضافة لمجموع المتسلسلة العددية النتروسوفيكية، كما سيتم تقديم مفهوم التقارب للمتسلسلة العددية النتروسوفيكية، وذلك من خلال عرض بعض الاختبارات لتقارب المتسلسلة العددية النتروسوفكية، أما الجزء الثاني من هذه الدراسة، سنعرض فيه تعريف لمتسلسلات الدوال النتروسوفيكية، و تعريف مفهومي التقارب النقطي و التقارب المنتظم لهذه المتتاليات، إضافة لتعريف متسلسلات القوى النتروسوفيكية وإيجاد نصف قطر التقارب ودراسة نشر ماك لوران للدوال النتروسوفيكية، وفتح المجال لدراسة نشر فورييه للدوال النتروسوفيكية.

الكلمات الرئيسيّة: العدد الحقيقي النتروسوفيكي، جذر العدد النتروسوفيكي، المتتالية النتروسوفيكية.

1. مقدمة

عمم فلورنتن سمارانداكة F.Smarandache عام 1995 مفهوم المنطق الضبابي (Fuzzy) إلى المنطق النتروسوفيكي، ثم ظهرت العديد من الأبحاث في هذا المنطق الجديد في شتى أنواع العلوم وخاصة في الرياضيات بجميع فروعها لا سيما في التبولوجيا والجبر[1]،[2]،[3]،[4]. إن العالم الذي يحيط بنا تتسم أحداثه ووقائعه بالتناقض والغموض واللاتحديد حيث تفسح كل قضية بالصدق ومرة بالكذب باللا تحديد. لذلك برزت حاجتنا لمنطق جديد يعكس حقيقة رؤيتنا النسبية لهذا الواقع. هذا المنطق هو المنطق النتروسوفيكي الذي يدرس ويهتم بالحياد (للتوسع انظر أبحاث البروفيسور الأمريكي فلورنتين سمارنداكة [5])، بحث يأخذ هذا المنطق بعين الاعتبار كل فكرة مع نقيضها مع طيف الحياد، حيث يأخذ هذا المنطق كل بيان بثلاث أبعاد هي الصح (T) بدرجات والخطأ (F) بدرجات والحياد (I) بدرجات، ويمكننا أن نعبر عن ذلك بالشكل (T,I,F) وهذا يعطي وصفاً أدق من المنطق الضبابي والمنطق العادي، ثم انبثق عن منطق النتروسوفيك المجموعات النتروسوفيكية الهشة كتطوير لنظرية المجموعات الكلاسيكية وفق هذا المنطق على يد البروفيسور المصري أحمد سلامة وفريق من الباحثين عام 2014. كما قدم البروفيسور المصري أحمد سلامة عام 2013 دراسة حول مفهوم النقط النتروسوفيكية الكريسب وعرف مفهوم انتماء عنصر ما لمجموعة نتروسوفيكية هشة[6], ويعتبر سلامة A. A. Salama أول من قدم نظرية الفئات النيتروسوفيكية الكريسب و وقدم وآخرون العديد من التطبيقات فى علوم الحاسب ونظم المعلومات كما فى المراجع[12-24] .

وقام الباحث ملاذ الأسود بعرض تعريف تكامل لدالة السمك النتروسوفيكية وتم نشر مقال في مجلة IJNS بعنوان دراسة تكامل دالة السمك النتروسوفيكية[7]، وتطبيقها في تعريف أنماط جديدة لمعادلات تفاضلية نتروسوفيكياً، وفيما يتعلق بالأعداد العقدية النتروسوفيكية فقد قام الباحثان الدكتور رياض الحميدو والأستاذ مياس اسماعيل بدراسة هذه الأعداد، حيث قام الباحثان بتعريف الصيغة القطبية للعدد العقدي النتروسوفيكي[8]، وقام الباحث ملاذ الأسود أيضاً بدراسة الأعداد العقدية النتروسوفيكية، من خلال نشر بحث في مجلة Neutrosophic Knowledge [9]،أما فيما يتعلق بالمتسلسلات النتروسوفيكية يعتبر هذا العمل هو الأول من نوعه بدراسة هكذا نوع من المتتاليات، أخيرا تم في العام 1997 تنظيم مؤتمر دولي حول المفاهيم السمارانداكية في نظرية الأعداد بجامعة كرايوفا، رومانيا[10].

2. تمهيد:

في هذا القسم سنشير إلى مفهوم المتسلسة النتروسوفيكية العددية، والمتتالية النتروسوفيكية العددية المنتهية. وبعد ذلك سنقدم مجموعة من المفاهيم المتعلقة بالمتسلسلة النتروسوفيكية العددية، كدراسة تقارب المتسلسلة العددية النتروسوفيكية، ومجموع متسلسلتين

نتروسوفيكيتسن، وجداء السلاسل النتروسوفيكية، وتعريف متسلسلات الدوال الحقيقية النتروسوفيكية، ودراسة التقارب النقطي والمنتظم لهذه الدوال، إضافة لتعريف نشر تايلور ونشر ماك لوران نتروسوفيكياً للدوال النتروسوفيكية، مع ذكر بعض الأمثلة التوضيحية. خلال هذا البحث تشير A لمجموعة نتروسوفيكية غير خالية، و∑_(n=1)^∞▒(a_n+I) للمتسلسلة النتروسوفيكية العددية.

التعريف *1*. [11] العدد الحقيقي النتروسوفيكي:

يعرف العدد الحقيقي النتروسوفيكي بالعلاقة $w = a + bI$ حيث أن a و b أعداد حقيقة و I عنصر اللاتحديد. مع الأخذ بعين الاعتبار أن $0.I = 0$ و $I^n = I$ لجميع قيم n الموجبة. مثال ذلك:

$$w = 1 - 2I \, , w = -3 = -3 + 0I$$

التعريف *2*. [11] قسمة عددين حقيقيين نتروسوفيكيين:

ليكن $w_1 = a_1 + b_1 I$ و $w_2 = a_2 + b_2 I$ عندئذ يكون:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{a_1 + b_1 I}{a_2 + b_2 I} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2(a_2 + b_2)} I \dots \dots \ (1)$$

الملاحظة 1: $\sqrt{I} = \mp I \, , I^2 = I, 0.I = 0$.

التعريف *3*: المتسلسلة العددية النتروسوفيكية:

لتكن $(a_n + I)$ متتالية من الأعداد الحقيقية النتروسوفيكية. نسمي المجموع غير المنته:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + I) = (a_1 + I) + (a_2 + I) + \cdots + (a_n + I) + \cdots \quad \dots \dots (2)$$

بمتسلسلة عددية نتروسوفيكية ونسمي $a_1 + I, a_2 + I, \dots, a_n + I$ حدود هذه المتسلسلة أما $a_n + I$ فهو الحد العام للمتسلسلة.

التعريف 4: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + I)$ متسلسلة عددية نتروسوفيكية ما. نسمي المتتالية $(A_n + I)$ المعرفة بالشكل:

$$A_1 + I = a_1 + I$$

$$A_2 + I = (a_1 + I) + (a_2 + I)$$

....

$$A_n + I = (a_1 + I) + (a_2 + I) + \cdots + (a_n + I)$$

بمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + I)$.

التعريف 5: نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + I)$ إنها متقاربة إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها $(A_n + I)$ متقاربة وفيما عدا ذلك نقول إنها متباعدة. ونكتب:

$$\lim_{n \to \infty} (A_n + I) = A + I$$

نسمي $A + I$ مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + I)$.

المثال 1:

أوجد مجموع المتسلسلة النتروسوفيكية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + I)(n + I + 1)}$$

الحل:

لدينا:

$$a_n + I = \frac{1}{(n + I)(n + I + 1)} = \frac{1}{(n + I)} - \frac{1}{(n + I + 1)}$$

نشكل متتالية المجاميع الجزئية نجد:

$$A_n + I = \left(\frac{1}{1 + I} - \frac{1}{2 + I}\right) + \left(\frac{1}{2 + I} - \frac{1}{3 + I}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n + I} - \frac{1}{n + I + 1}\right)$$

$$A_n + I = \frac{1}{1 + I} - \frac{1}{n + I + 1}$$

ومنه:

$$\lim_{n\to\infty}(A_n+I)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+I}-\frac{1}{n+I+1}\right)=\frac{1}{1+I}=1-\frac{1}{2}I$$

إذن فالمتسلسلة متقاربة ومجموعها يساوي $1-\frac{1}{2}I$.

المثال 2:

أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية النتروسوفيكية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a+I)q^{n-1}\,;a\neq 0$$

الحل:

نشكل متتالية المجاميع الجزئية نجد:

$$A_n+I=a+I+(a+I)q+(a+I)q^2+\cdots+(a+I)q^{n-1}\ \ldots\ldots(3)$$

نضرب الطرفين بالعدد $-q$ نجد:

$$-q(A_n+I)=-q(a+I)-(a+I)q^2-(a+I)q^3+\cdots-(a+I)q^n\ \ldots\ldots(4)$$

بجمع العلاقتين (3) و (4) نجد:

$$(A_n+I)-q(A_n+I)=(1-q^n)(a+I)$$
$$(1-q)(A_n+I)=(1-q^n)(a+I)$$
$$A_n+I=(a+I)\frac{1-q^n}{1-q}$$

ونميز الحالات الآتية:

(1): $|q|<1$ عندئذ $\lim_{n\to\infty}q^n=0$ ومنه:

$$\lim_{n\to\infty}(A_n+I)=\frac{a+I}{1-q}$$

إذن في هذه الحالة تكون المتسلسلة الهندسية النتروسوفيكية متقاربة ومجموعها يساوي $\frac{a+I}{1-q}$ حيث $a+I$ حدها الأول و qأساسها.

(2): $|q|>1$ عندئذ $\lim_{n\to\infty}q^n=\infty$ ومنه:

$$\lim_{n\to\infty}(A_n+I)=\infty$$

إذن في هذه الحالة تكون المتسلسلة الهندسية النتروسوفيكية متباعدة.

(3): $q=1$ عندئذ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(a+I)q^{n-1}$ وهي متباعدة.

(4): $q=-1$ عندئذ نحصل على المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a+I)q^{n-1}=(a+I)-(a+I)+(a+I)-(a+I)+\cdots$$

نلاحظ في هذه الحالة أن متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة الناتجة ليس لها نهاية معينة:

من أجل n فردي ينتج أن: $\lim_{n\to\infty}(A_n+I)=(a+I)$.

ومن أجل n زوجي ينتج أن: $\lim_{n\to\infty}(A_n+I)=0$.

بعض اختبارات التقارب للمتسلسلات العددية النتروسوفيكية ذوات الحدود الموجبة:

المبرهنة *1*: (اختبار المقارنة الأول).

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+I)$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+I)$ متسلسلتين عدديتين نتروسوفيكيتين ذوات حدود موجبة وليكن $a_n+I<b_n+I$ من أجل أي $n\in N$ عندئذ:

1- تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+I)$ يؤدي إلى تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+I)$.
2- تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+I)$ يؤدي إلى تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+I)$.

المبرهنة 2: (اختبار المقارنة الثاني).

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+I)$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+I)$ متسلسلتين عدديتين نتروسوفيكيتين ذوات حدود موجبة وبفرض أن $\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+I)}{(b_n+I)}=M+I$

عندئذ إذا كانت:

1- $0<M<\infty$ فالمتسلسلتين من طبيعة واحدة.

2- $M=0$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+I)$ متقاربة فإن $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+I)$ متقاربة، وإذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+I)$ متباعدة فإن $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+I)$ متباعدة.

3- $M=\infty$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+I)$ متقاربة فإن $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+I)$ متقاربة، وإذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+I)$ متباعدة فإن $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+I)$ متباعدة.

المبرهنة 3: (اختبار المقارنة الثالث).

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+I)$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+I)$ متسلسلتين عدديتين نتروسوفيكيتين ذوات حدود موجبة وبفرض أن $\frac{b_{n+1}+I}{a_{n+1}+I}\leq\frac{a_{n+1}+I}{b_{n+1}+I}$ وذلك أيا كان $n\in N$ عندئذ فإن:

1- إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+I)$ متقاربة فإن $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+I)$ متقاربة.

2- إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+I)$ متباعدة فإن $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+I)$ متباعدة.

المبرهنة 4: (اختبار دالامبير).

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+I)$ متسلسلة عددية نتروسوفيكية. عندئذ:

1- إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+I}{a_n+I}=l+I<1+I$ فالمتسلسلة متقاربة.

2- إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+I}{a_n+I}=l+I>1+I$ فالمتسلسلة متباعدة.

3- إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+I}{a_n+I}=l+I=1+I$ حالة شك.

المبرهنة 5: (اختبار كوشي).

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+I)$ متسلسلة عددية نتروسوفيكية. عندئذ:

1- إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(a_n+I)}=l+I<1+I$ فالمتسلسلة متقاربة.

2- إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(a_n+I)}=l+I>1+I$ فالمتسلسلة متباعدة.

3- إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(a_n+I)}=l+I=1+I$ حالة شك.

المثال 3:

ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+I}{n!}$$

الحل:

$$\frac{a_{n+1}+I}{a_n+I}=\frac{\frac{1+I}{(n+1)!}}{\frac{1+I}{n!}}=\frac{1+I}{(n+1)n!}.\frac{n!}{1+I}=\frac{1+I}{1+I}\frac{1}{(n+1)}=\frac{1}{(n+1)}$$

لأنه من العلاقة (1) وحسب تعريف قسمة عددين نتروسوفكيين نجد أن:

$$\frac{1+I}{1+I}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+I}{a_n+I}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=0=0+0I<1+I$$

حسب اختبار دالامبير فالمتسلسلة متقاربة.

المثال 4:

ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+I}{2^n}$$

الحل:

$$\frac{a_{n+1}+I}{a_n+I}=\frac{\frac{1+I}{2^{n+1}}}{\frac{1+I}{2^n}}=\frac{1+I}{2^{n+1}}.\frac{2^n}{1+I}=\frac{1+I}{1+I}.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

لأنه من العلاقة (1) وحسب تعريف قسمة عددين نتروسوفيكيين نجد أن:

$$\frac{1+I}{1+I}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+I}{a_n+I}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+0I<1+I$$

حسب اختبار دالامبير فالمتسلسلة متقاربة.

التعريف 6: (متسلسسلات الدوال الحقيقية النتروسوفيكية).

لتكن (f_n) متتالية دوال حقيقية نتروسوفيكية معرفة على الفترة X. نسمي المجموع غير المنته:

$$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots$$

بمتسلسلة دوال حقيقية نتروسوفيكية معرفة على الفترة X. نرمز لهذا المجموع بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots;\forall x\in X$$

التعريف 7: لتكن (f_n) متتالية دوال حقيقية نتروسوفيكية معرفة على الفترة X. نسمي متتالية الدوال (F_n) المعرفة على النحو الآتي:

$$F_1(x)=f_1(x)$$

$$F_2(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

....

$$F_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$$

بمتسلسلة المجاميع الجزئية لمتسلسلة الدوال $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ على الفترة X.

التعريف 8: التقارب النقطي لمتسلسلة الدوال النتروسوفيكية:

نقول عن متسلسلة الدوال $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ إنها متقاربة نقطيا على الفترة X. إذا وفقط إذا كانت نهاية متتالية المجاميع الجزئية لها متقاربة نقطيا على الفترة X أي إذا كانت:

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=f(x);\ x\in X$$

نسمي الدالة $f(x)$ بدالة المجموع لمتسلسلة الدوال النتروسوفيكية ونكتب:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

التعريف 9: التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال النتروسوفيكية:

نقول عن متســـلســـلة الدوال $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ إنها متقاربة بانتظام على الفترة X. إذا وفقط إذا كانت نهاية متتالية المجاميع الجزئية لها متقاربة بانتظام على الفترة X أي إذا كانت:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,;\ x \in X$$

التعريف 10: (متسلسلات القوى النتروسوفيكية):

ندعو كل متسلسلة دوال نتروسوفيكية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ حدودها عبارة عن دوال نتروسوفيكية صحيحة معرفة على الفترة X. بالشكل:

$f_0 = a_0\,, f_1 = a_1(x-x_0), \dots, f_n = a_n(x-x_0), \dots;\ \forall x \in X$

بمتسلسلة قوى نتروسوفيكية ونكتب:

$$a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\,; \forall x \in X$$

حيث a_n أعداد حقيقية غير متعلقة ب x أما x_0 فهو عدد نتروسوفيكي حقيقي أي من الشكل $x_0 = a + bI$.

التعريف 11: نصف قطر تقارب متسلسلة القوى النتروسوفيكية:

إذا كانت D مجموعة كل القيم الموجبة ل x والتي من أجلها المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

متقاربة ومحدودة من الأعلى فعندئذ نعرف العدد $\rho = supD$ بأنه نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

الملاحظة 2:

- إذا كانت D مجموعة خالية فإن $\rho = 0$.
- إذا لم تكن D مجموعة محدودة من الأعلى فإن $\rho = +\infty$.
- إذا كانت $0 < \rho < +\infty$ عندئذ متسلسلة القوى متقاربة من أجل جميع قيم x الموجبة المحققة للمتراجحة:

$$|x - x_0| < \rho \implies -\rho < x - x_0 < \rho$$

أي أن فترة التقارب للمتسلسلة هي $(-\rho + x_0\,, \rho + x_0)$. ثم ندرس التقارب عند أطراف المجال.

ويحسب نصف قطر التقارب بإحدى الطرق الآتية:

$$(1).\ \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$(2).\ \rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

المثال 5:

أوجد نصف قطر تقارب المتسلسلة الآتية ومجال تقاربها:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-I)^n}{n}$$

الحل:

لدينا:

$$a_n = \frac{1}{n} \Longrightarrow a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$$

إذن: $\rho = 1$.

ومنه:

$$|x-I|<\rho \implies -\rho<x-I<\rho \implies -\rho+I<x<\rho+I$$
$$\implies -1+I<x<1+I$$

ندرس التقارب عند طرفي الفترة:

$$(-1+I\,,1+I)$$

1- من أجل $x=1+I$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ وهي متباعدة.

2- من أجل $x=-1+I$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ وهي متقاربة.

وبالتالي فإن مجال التقارب هو: $]-1+I\,,1+I[$.

المثال 6:

أوجد نصف قطر تقارب المتسلسلة الآتية ومجال تقاربها:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-(1+I)\right)^n}{n}$$

الحل:

لدينا:

$$a_n=\frac{1}{n}\implies a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1$$

إذن: $\rho=1$.

ومنه:

$$|x-(1+I)|<\rho \implies -\rho<x-1-I<\rho \implies -\rho+I<x<\rho+I$$
$$\implies I<x<2+I$$

ندرس التقارب عند طرفي الفترة:

$$(I\,,2+I)$$

1- من أجل $x=2+I$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ وهي متباعدة.

2- من أجل $x=I$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ وهي متقاربة.

وبالتالي فإن مجال التقارب هو: $]I\,,2+I[$.

المثال 7:

أوجد نصف قطر تقارب المتسلسلة الآتية ومجال تقاربها:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2I)^n}{n^2}$$

الحل:

لدينا:

$$a_n=\frac{1}{n^2}\implies a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| = 1$$

إذن: $\rho = 1$.

ومنه:

$$|x-2I| < \rho \implies -\rho < x-2I < \rho \implies -\rho+2I < x < \rho+2I$$
$$\implies -1+2I < x < 1+2I$$

ندرس التقارب عند طرفي الفترة:

$$(-1+2I\,,1+2I)$$

1- من أجل $x = 1+2I$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ وهي متقاربة.

2- من أجل $x = -1+2I$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ وهي متقاربة.

وبالتالي فإن مجال التقارب هو: $[-1+2I\,,1+2I]$.

التعريف *12*: (متسلسلات القوى النتروسوفيكية ذات الأسس السالبة)

متسلسلة القوى النتروسوفيكية ذات الأسس السالبة من الشكل $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^{-n}$ ويمكن ردها إلى متسلسلة نتروسوفيكية ذات أسس موجبة وذلك بفرض $x-x_0=\frac{1}{y}$ فنحصل على متسلسلة من الشكل $\sum_{n=1}^{\infty}a_ny^n$.

التعريف *13*: نصف قطر تقارب متسلسلة القوى النتروسوفيكية ذات الأسس السالبة:

إذا كان ρ نصف قطر التقارب عندئذ تكون المتسلسلة متقاربة من أجل جميع قيم y المحققة للمتراجحة:

$$|y| < \rho \implies \frac{1}{|x-x_0|} < \rho \implies 1 < \rho|x-x_0| \implies |x-x_0| > \frac{1}{\rho}$$

المثال 8:

أوجد نصف قطر تقارب المتسلسلة الآتية ومجال تقاربها:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(x-I)^{-n}$$

الحل:

لدينا:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(x-I)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(x-I)^n}$$
$$a_n = n \implies a_{n+1} = n+1$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$$

إذن: $\rho = 1$.

ومنه:

$$|x-x_0| > \frac{1}{\rho} \implies |x-I| > 1 \implies -1+I < x < 1+I$$

ندرس التقارب عند طرفي الفترة:

$$(-1+I\,,1+I)$$

1- من أجل $x = -1+I$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-1)^n}$ وهي متباعدة.

2- من أجل $x = -1 + 2I$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n$ وهي متباعدة.

وبالتالي فإن مجال التقارب هو: $(-\infty, -1 + I) \cup (1 + I, +\infty)$.

التعريف *14*: (نشر تايلور):

لتكن $f(x)$ دالة نتروسوفيكية حقيقية عندئذ يمكن تمثيل هذه الدالة بمتسلسلة من الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\big((x + I) - x_0\big)^n$$

حيث:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \; ; n = 0,1,2, \dots \dots$$

ونكتب:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\big((x + I) - x_0\big)^n \; ; n = 0,1,2, \dots \dots$$

تسمى المتسلسلة الأخيرة بمتسلسلة تايلور المولدة بالدالة $f(x)$ في جوار النقطة x_0.

جدول لمنشور بعض الدوال وفق ماك لوران:

منشور الدالة	الدالة النتروسوفيكية
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+I)^n}{n!}$	$f(x) = e^{x+I}$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\ (x+I)^{2n}$	$f(x) = \cos{(x+I)}$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\ (x+I)^{2n+1}$	$f(x) = \sin{(x+I)}$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\ (x+I)^{2n}$	$f(x) = ch\ (x+I)$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\ (x+I)^{2n+1}$	$f(x) = sh\ (x+I)$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!}\ (x+I)^n$	$f(x) = a^{x+I}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\ (x+I)^n$	$f(x) = \ln(1 + (x+I))$
$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}(x+I)^n$	$f(x) = (1 + (x+I))^{\alpha}$
$\sum_{n=0}^{\infty} (x+I)^n$	$f(x) = \frac{1}{1-(x+I)}$
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\ (x+I)^{n-1}$	$f(x) = \frac{1}{1+(x+I)}$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}\ (x+I)^{2n+1}$	$f(x) = arc\ tan(x+I)$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n}\ (x+I)^n$	$f(x) = \ln(1 - (x+I))$

التعريف *15*: (نشر ماك لوران):

بتعويض $x_0 = 0$ في نشر تايلور نحصل على ماك لوران للدالة $f(x)$ في جوار النقطة $x_0 = 0$.
ونكتب:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x+I)^n \; ; n = 0,1,2, \dots \dots$$

تطبيقات نشر ماك لوران للدوال النتروسوفيكية:

1- حساب e^I:

$$e^I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I}{n!} = I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = Ie$$

ونعلم أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

إذن:

$$e^I = eI$$

ولدينا:

$$e^{2I} = (e^I)^2 = (Ie)^2 = I^2 e^2 = Ie^2$$

إذن:

$$e^{2I} = e^2 I$$

وبشكل عام نجد:

$$e^{kI} = e^k I \; ; \; k = 1,2,3, \dots \dots$$

2- حساب e^{-I}:

$$e^{-I} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-I)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I^n (-1)^n}{n!} = I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

ونعلم أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$$

إذن:

$$e^{-I} = e^{-1} I$$

ولدينا:

$$e^{-2I} = (e^{-I})^2 = (Ie^{-1})^2 = I^2 e^{-2} = Ie^{-2}$$

إذن:

$$e^{-2I} = e^{-2} I$$

وبشكل عام نجد:

$$e^{-kI} = e^{-k} I \; ; \; k = 1,2,3, \dots \dots$$

3- حساب $\cos(I)$:

$$\cos(I) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (I)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} I = I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

ونعلم أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \cos(1)$$

إذن:

$$\cos(I) = \cos(1)\, I$$

4- حساب $sin(I)$:

$$sin(I) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(I)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, I = I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

ونعلم أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = sin(1)$$

إذن:

$$sin(I) = sin(1)\, I$$

5- حساب $ch(I)$:

$$ch(I) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(I)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, I = I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$$

ونعلم أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = ch(1)$$

إذن:

$$ch(I) = ch(1)\, I$$

6- حساب $sh(I)$:

$$sh(I) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(I)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, I = I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$$

ونعلم أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} = sh(1)$$

إذن:

$$sh(I) = sh(1)\, I$$

7- حساب e^{iI}:

$$e^{iI} = \cos(I) + i\, sin(I) = I\cos(1) + iI\, sin(1) = I(\cos(1) + i\, sin(1))$$

ونعلم أن:

$$\cos(1) + i\, sin(1) = e^{i}$$

إذن:

$$e^{iI} = e^{i} I$$

وبشكل عام:

$$e^{ikI} = ke^{i}I;\; k = 1,2,3, \dots \dots$$

8- حساب e^{-iI}:

$$e^{-iI} = \cos(I) - i\, sin(I) = I\cos(1) - iI\, sin(1) = I(\cos(1) - i\, sin(1))$$

ونعلم أن:

$$\cos(1) - i\, sin(1) = e^{-i}$$

إذن:

$$e^{-iI} = e^{-i} I$$

وبشكل عام:

$$e^{-ikI} = ke^{-i}I;\; k = 1,2,3, \dots \dots$$

9- حساب $arc\ tan(I)$:

$$arc\ tan(I) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (I)^{2n+1} = I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

ونعلم أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

إذن:

$$arc\ tan(I) = \frac{\pi}{4} I$$

التعريف *16*: (جداء متسلسلتين نتروسوفيكيتين):

ليكن لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+I)^n , \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x+I)^n$$

عندئذ نعرف جداء المتسلسلتين السابقتين بالشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+I)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x+I)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x+I)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} \right) (x+I)^n$$

حيث:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}$$

ومنه:

$$c_0 = a_0 b_0$$
$$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$$
$$c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$$
$$c_3 = a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}$$

المثال 9:

أوجد نشر كلاً من $cos^2(x+I)$ و $sin^2(x+I)$.

الحل:

لدينا:

$$cos^2(x+I) = cos(x+I).cos(x+I)$$
$$cos^2(x+I) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x+I)^{2n} . \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x+I)^{2n}$$
$$cos^2(x+I) = \left(1 - \frac{1}{2!}(x+I)^2 + \frac{1}{4!}(x+I)^4 + \cdots \right) . \left(1 - \frac{1}{2!}(x+I)^2 + \frac{1}{4!}(x+I)^4 + \cdots \right)$$

ومنه:

$$a_n = b_n$$

ونلاحظ أن:

$$a_0 = b_0 = 1$$

في حال n فردي نجد:

$$a_n = b_n = 0$$

كما نلاحظ:

$$a_2 = b_2 = \frac{1}{2!} , a_4 = b_4 = \frac{1}{4!} , \dots \dots$$

ومنه:

$$c_0 = a_0 b_0 = 1$$

أما باقي الحدود فهي تساوي الصفر، إذن:

$$cos^2(x+I) = c_0 + c_1(x+I) + c_2(x+I)^2 + \cdots$$

ومنه يكون:

$$cos^2(x+I) = 1$$

وبالمثل نجد أن:

$$sin^2(x+I) = 1$$

الملاحظة 3:

$$sin^2(x+I) + cos^2(x+I) = 1$$

الملاحظة 4:

يمكن البرهان على ما يأتي:

$$sin^2(I) + cos^2(I) = I$$

البرهان:

$$sin^2(I) + cos^2(I) = (I\,sin(1))^2 + (I\cos(1))^2 = I^2 sin^2(1) + I^2 cos^2(1)$$
$$sin^2(I) + cos^2(I) = I^2\left(sin^2(1) + cos^2(1)\right) = I\left(sin^2(1) + cos^2(1)\right) = I(1) = I$$

إذن:

$$sin^2(I) + cos^2(I) = I$$

وأيضا:

$$ch^2(I) - sh^2(I) = I$$

البرهان:

$$ch^2(I) - sh^2(I) = (I\,ch(1))^2 - (I\,sh(1))^2 = I^2 ch^2(1) - I^2 sh^2(1)$$
$$ch^2(I) - sh^2(I) = I^2\left(ch^2(1) - sh^2(1)\right) = I\left(ch^2(1) - sh^2(1)\right) = I(1) = I$$

إذن:

$$ch^2(I) - sh^2(I) = I$$

المراجع

1. R.K. Al-Hamido, Q. H. Imran, K. A. Alghurabi, T. Gharibah, “On Neutrosophic Crisp Semi Alpha Closed Sets”, Neutrosophic Sets and Systems”, vol. 21,pp 28-35, (2018).
2. Q. H. Imran, F. Smarandache, R.K. Al-Hamido, R. Dhavasselan, “On Neutrosophic Semi Alpha open Sets”, Neutrosophic Sets and Systems, vol. 18, pp 37-42, (2017).
3. Al-Hamido, R. K.; "A study of multi-Topological Spaces", PhD Theses, AlBaath university , Syria, (2019).
4. Al-Hamido, R. K.; "Neutrosophic Crisp Supra Bi-Topological Spaces", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 1, pp 66-73, (2018).

5. F. smarandache, "A Unifuing Field in Logics: Neutrosophic Logic, Neutrosophy, Neutrosophic Sets" ,Neutrosophic Probability American Research Press, Rehoboth, NM, (1999).
6. A. A. Salama, "Neutrosophic Crisp Points and Neutrosophic Crisp Ideals", Neutrosophic Sets and Systems Vol. 1, pp 50-54,(2013).
7. Malath. F. Alaswad, "A Study of the Integration of Neutrosophic Thick Functions," International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), pp 13-22 May (2020).
8. R. Alhamido, M. Ismail, F. Smarandache; "The Polar form of a Neutrosophic Complex Number", International Journal of Neutrosophic Science, Vol.10,pp: 36-44, (2020).
9. Malath. F. Alaswad, "A Study of a Neutrosophic Complex Numbers And Applications," Neutrosophic Knowledge (NK),Vol 1, pp.24-40, November (2020).
10. F. smarandache. "Neutrosophy and Neutrosophic Logic, First International Conference on Neutrosophy, neutrosophic Logic, Set, Probability, and Statistics", University of New Mexico, Gallup, NM87301, USA (2002).
11. F .Smarandache.; "Introduction to Neutrosophic statistics", Sitech-Education Publisher, PP:34-44. (2014).
12. Belal Amin, A. A. Salama, I. M. El-Henawy, Khaled Mahfouz, Mona G. Gafar, "Intelligent Neutrosophic Diagnostic System for Cardiotocography Data", Computational Intelligence and Neuroscience, vol. 2021, Article ID 6656770, 12 pages, 2021.
13. Mohammad Abobala, Ahmed Hatip, Necati Olgun, Said Broumi, Ahmad A. Salama and Huda E. Khaled, The Algebraic Creativity in The Neutrosophic Square Matrices, Neutrosophic Sets and Systems, vol. 40, 2021, pp. 1-11.
14. Ibrahim Yasser, Abeer Twakol, A. A. Abd El-Khalek, Ahmed Samrah and A. A. Salama, COVID-X: Novel Health-Fog Framework Based on Neutrosophic Classifier for Confrontation Covid-19, Neutrosophic Sets and Systems, vol. 35, 2020, pp. 1-21.
15. A.A. Salama, Ahmed Sharaf Al-Din, Issam Abu Al-Qasim, Rafif Alhabib and Magdy Badran, Introduction to Decision Making for Neutrosophic Environment "Study on the Suez Canal Port, Egypt", Neutrosophic Sets and Systems, vol. 35, 2020, pp. 22-44.
16. Alhabib, Rafif, A. A. Salama. "The Neutrosophic Time Series-Study Its Models (Linear-Logarithmic) and test the Coefficients Significance of Its linear model." Neutrosophic Sets and Systems 33.1 (2020) pp105-115.
17. Alhabib, Rafif; Moustafa Mzher Ranna; Haitham Farah; and A.A. Salama. (2018)."Some Neutrosophic Probability Distributions. Neutrosophic Sets and Systems vol 22, pp.30-38.
18. ElWahsh, H., Gamal, M., Salama, A., & El-Henawy, I. (2018). Intrusion detection system and neutrosophic theory for MANETs:A comparative study, Neutrosophic Sets and Systems, 23, pp16-22.
19. A. A. Salama, Florentin Smarandache, Hewayda ElGhawalby: Neutrosophic Approach to Grayscale Images Domain, Neutrosophic Sets and Systems, vol. 21, 2018, pp. 13-19.
20. Eman.M.El-Nakeeb, Hewayda ElGhawalby, A.A. Salama, S.A.El-Hafeez: Neutrosophic Crisp Mathematical Morphology, Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 16 (2017), pp.
21. A.A. Salama, Hewayda ElGhawalby, Shimaa Fathi Ali. (2017). Topological Manifold Space via Neutrosophic Crisp Set Theory, Neutrosophic Sets and Systems,Vol.15, 2017, pp.18-21.

22. Haitham ELwahsha , Mona Gamala, A. A. Salama, I.M. El-Henawy.(2017). Modeling Neutrosophic Data by Self-Organizing Feature Map: MANETs Data Case Study, Procida Computer, Vol.121, pp152-157, 2017.
23. A. A. Salama, Mohamed Eisa, Hewayda ElGhawalby, A.E. Fawzy: Neutrosophic Features for Image Retrieval, Neutrosophic Sets and Systems, vol. 13, 2016, pp. 56-61.
24. A. A. Salama, I. M. Hanafy, Hewayda Elghawalby, M. S. Dabash: Neutrosophic Crisp α-Topological Spaces, Neutrosophic Sets and Systems, vol. 12, 2016, pp. 92-96.