Smarandache 双阶乘对偶函数的三次均值及加权均值

王 阳

(南阳师范学院 数学与统计学院, 河南 南阳 473061)

摘 要: 利用初等方法研究了 Smarandache 双阶乘对偶函数 $S^{**}(n)$ 的三次均值及其加权均值, 给出了 $\sum_{n\le x}(S^{**}(n))^3$, $\sum_{n\le x}n^k(S^{**}(n))^3$ 及 $\sum_{n\le x}\frac{(S^{**}(n))^3}{n^k}$ 的渐近公式, 得到了 $S^{**}(n)$ 新的分布性质, 补充了有关文献的结论.

关键词: Smarandache 双阶乘对偶函数; 均值; 渐近公式

对任意的正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 n 整除 $m!$ 即

$$S(n)=\min\{m:\ n|m!,\ m\in N^+\}$$

对 $S(n)$ 性质的研究是数论中一个重要且很有意义的课题, 已引起国内外许多学者的关注, 请参阅文献 [1-3]. 2007 年文献 [4] 首次定义了 Smarandache 双阶乘对偶函数 $S^{**}(n)$ 即对任意的正整数 n, 当 n 为奇数时, $S^{**}(n)$ 就是使 (2m-1)!! 整除 n 的最大正整数 $2m-1$; 当 n 为偶数时, $S^{**}(n)$ 就是使 $(2m)!!$ 整除 n 的最大正整数 $2m$. 也就是

$$S^{**}(n)=\begin{cases}\max\{(2m-1):\ m\in N^+,\ (2m-1)!!\mid n\}, & 2\nmid n\\ \max\{2m:\ m\in N^+,\ (2m)!!\mid n\}, & 2\mid n\end{cases}$$

其中 $(2m)!!=2\times4\times6\cdots\times(2m),$, $(2m-1)!!=1\times3\times5\cdots\times(2m-1)$. 由定义我们容易得到 $S^{**}(1)=1,\ S^{**}(2)=2,\ S^{**}(3)=3,\ S^{**}(4)=2,\ S^{**}(5)=1,\ S^{**}(6)=2,\ S^{**}(7)=1,\cdots$.

关于 $S^{**}(n)$ 函数, 文献 [4-7] 进行了初步的研究. 本文的主要目的是借助 $\ln(n!!)$ 的渐近表达式, 用初等方法研究 $S^{**}(n)$ 的三次均值及其加权均值的分布情况, 得到了下列三个渐近公式 (其中 e 为 Eule 常数):

定理 1 对任意的实数 $x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}(S^{**}(n))^3=\left(14\mathrm{e}^{\frac12}-\frac32+7\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!!}\right)x+O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^4\right)$$

定理 2 对任意的实数 $x>1$ 及 $k\ge0$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}n^k(S^{**}(n))^3=\frac{1}{k+1}\left(14\mathrm{e}^{\frac12}-\frac32+7\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!!}\right)x^{k+1}+O\left(x^k\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^4\right)$$

收稿日期: 2013-03-21
资助项目: 国家自然科学基金 (11071194); 河南省自然科学基金 (132300410372)

定理 3 对任意的实数 $x>1$ 及 $k>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\frac{(S^{**}(n))^3}{n^k}=\frac{1}{1-k}\left(14\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}+7\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!!}\right)x^{1-k}+O\left(x^{-k}\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^4\right)$$

显然定理 2 是定理 1 的推广.

1 引理及证明

为了完成定理的证明, 我们需要下列引理.

引理 1 对任意的实数 $x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{(2m-1)!!\leq x}(2m-1)^3\ll\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^4 \tag{1}$$

$$\sum_{(2m)!!\leq x}(2m)^3\ll\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^4 \tag{2}$$

证明 设 $S_1(x)=\max\{m:m\in N^+,(2m-1)!!\leq x\}$. 由 $S_1(x)$ 的定义知, 当 $S_1(x)=m$ 时, 必有 $(2m-1)!!\leq x<(2m+1)!!$. 两边取对数可得:

$$\ln(2m-1)!!\leq\ln x<\ln(2m+1)!!$$

利用文献 [8] 中欧拉求和公式, 我们容易得到:

$$\begin{aligned}\ln(2m-1)!!=&\sum_{1\leq t\leq m}\ln(2t-1)=\int_1^m\ln(2t-1)\mathrm{d}t+\int_1^m(t-[t])(\ln(2t-1))'\mathrm{d}t\\=&m\ln m+(\ln 2-1)m+O(\ln m)\\\ln(2m+1)!!=&\sum_{1\leq t\leq m}\ln(2t+1)=\int_1^m\ln(2t+1)\mathrm{d}t+\int_1^m(t-[t])(\ln(2t+1))'\mathrm{d}t\\=&m\ln m+(\ln 2-1)m+O(\ln m)\end{aligned}$$

从而 $\ln x=m\ln m+(\ln 2-1)m+O(\ln m)$, 因此有

$$m=\frac{\ln x}{\ln m+\ln 2-1}+O(1)$$

对此式两边同时取对数, 可得 $\ln m=\ln\ln x+O(\ln\ln m)$, $\ln\ln m=O(\ln\ln\ln x)$, 因此我们有

$$m=\frac{\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{(\ln x)(\ln\ln\ln x)}{(\ln\ln x)^2}\right)$$

所以

$$\sum_{(2m-1)!!\leq x}(2m-1)^3\ll\sum_{m\leq\frac{\ln x}{\ln\ln x}}(2m-1)^3\ll\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^4$$

用类似的方法可证:

$$\sum_{(2m)!!\leq x}(2m)^3\ll\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^4$$

即引理 1 得证.

引理 2 对任意的实数 $x>1$, 我们有渐近公式

$$x\sum_{(2m)!!>x}\left(\frac{(2m)^3}{(2m)!!}-\frac{(2m)^3}{(2m+2)!!}\right)\ll\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^3; \tag{3}$$

$$\frac{x}{2}\sum_{(2m-1)!!>x}\left(\frac{(2m-1)^3}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^3}{(2m+1)!!}\right)\ll\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^3 \tag{4}$$

证明 设 $k=\min\{m:m\in N^+,\ (2m)!!>x\}$. 则当 $k=m$ 时, 必有 $(2m-2)!!\le x<(2m)!!$. 类似引理 1 的证明方法我们可以得到:

$$k=m=\frac{\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{(\ln x)(\ln\ln\ln x)}{(\ln\ln x)^2}\right)$$

从而

$$\begin{aligned}
&\sum_{(2m)!!>x}\left(\frac{(2m)^3}{(2m)!!}-\frac{(2m)^3}{(2m+2)!!}\right)=\sum_{m=k}^{\infty}\left(\frac{(2m)^3}{(2m)!!}-\frac{(2m)^3}{(2m+2)!!}\right)\\
=&\frac{(2k)^3}{(2k)!!}+\sum_{m=k}^{\infty}\frac{(2m+2)^3-(2m)^3}{(2m+2)!!}\\
=&\frac{(2k)^3}{(2k)!!}+2\sum_{m=k}^{\infty}\frac{(2m+2)^2+(2m+2-2)(2m+2)+(2m+2-2)^2}{(2m+2)!!}\\
=&\frac{(2k)^3}{(2k)!!}+2\sum_{m=k}^{\infty}\frac{3(2m+2)^2-6(2m+2)+4}{(2m+2)!!}\\
=&\frac{(2k)^3}{(2k)!!}+2\sum_{m=k}^{\infty}\left(\frac{6m}{(2m)!!}+\frac{4}{(2m+2)!!}\right)\\
=&\frac{(2k)^3}{(2k)!!}+\frac{12k}{(2k)!!}+\sum_{m=k}^{\infty}\left(\frac{6}{(2m)!!}+\frac{8}{(2m+2)!!}\right)\\
=&\frac{(2k)^3}{(2k)!!}+\frac{12k-8}{(2k)!!}+\sum_{m=k}^{\infty}\frac{14}{(2m)!!}
\end{aligned}$$

由数学分析知 $e^{\frac{1}{2}y}$ 幂级数展开式的余项为

$$R(y)=\sum_{m=k}^{\infty}\frac{y^m}{2^m m!}=\frac{e^{\frac{\theta}{2}\cdot y}y^k}{(2k)!!}$$

从而

$$\sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{(2m)!!}=R(1)=\frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{(2k)!!}\le\frac{e^{\frac{1}{2}}}{x}$$

所以

$$\begin{aligned}
x\sum_{(2m)!!>x}\left(\frac{(2m)^3}{(2m)!!}-\frac{(2m)^3}{(2m+2)!!}\right)=&\frac{(2k)^3}{(2k)!!}x+\frac{12k-8}{(2k)!!}x+\sum_{m=k}^{\infty}\frac{14}{(2m)!!}x\\
\ll&\frac{(\ln x)^3}{(\ln\ln x)^3}+\frac{\ln x}{\ln\ln x}+e^{\frac{1}{2}}-8\ll\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^3
\end{aligned}$$

同理可证:

$$\frac{x}{2}\sum_{(2m-1)!!>x}\left(\frac{(2m-1)^3}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^3}{(2m+1)!!}\right)\ll\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^3$$

于是证明了引理 2.

2 定理的证明

我们首先完成定理 1 的证明

事实上, 由 $S^{**}(n)$ 的定义知：当 $2\nmid n$ 时, 设 $S^{**}(n)=2m-1$, 则 $n=(2m-1)!!u$, 且 $2m+1\nmid u, 2\nmid u$. 当 $2\mid n$ 时, 设 $S^{**}(n)=2m$, 则 $n=(2m)!!v, 2m+2\nmid v$, 所以

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x}(S^{**}(n))^3 &= \sum_{\substack{n\le x\\ 2\nmid n}}(S^{**}(n))^3+\sum_{\substack{n\le x\\ 2\mid n}}(S^{**}(n))^3=\sum_{\substack{(2m-1)!!u\le x\\ (2m+1)\nmid u\\ 2\nmid u}}(2m-1)^3+\sum_{\substack{2m!!v\le x\\ 2m+2\nmid v}}(2m)^3\\
&=\sum_{(2m-1)!!\le x}(2m-1)^3\sum_{\substack{u\le\frac{x}{(2m-1)!!}\\ (2m+1)\nmid u\\ 2\nmid u}}1+\sum_{(2m)!!\le x}(2m)^3\sum_{\substack{v\le\frac{x}{(2m)!!}\\ (2m+2)\nmid v}}1\\
&=\sum_{(2m-1)!!\le x}(2m-1)^3\left(\sum_{u\le\frac{x}{(2m-1)!!}}1-\sum_{u\le\frac{x}{(2m+1)!!}}1-\sum_{u\le\frac{x}{2(2m-1)!!}}1+\sum_{u\le\frac{x}{2(2m+1)!!}}1\right)+\\
&\quad\sum_{(2m)!!\le x}(2m)^3\left(\sum_{v\le\frac{x}{(2m)!!}}1-\sum_{v\le\frac{x}{(2m+2)!!}}1\right)\\
&=\sum_{(2m-1)!!\le x}(2m-1)^3\left(\frac{x}{2(2m-1)!!}-\frac{x}{2(2m+1)!!}\right)+O\left(\sum_{(2m-1)!!\le x}(2m-1)^3\right)+\\
&\quad\sum_{(2m)!!\le x}(2m)^3\left(\frac{x}{(2m)!!}-\frac{x}{(2m+2)!!}\right)+O\left(\sum_{(2m)!!\le x}(2m)^3\right)\\
&=\frac{x}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2m-1)^3}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^3}{(2m+1)!!}\right)+x\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2m)^3}{(2m)!!}-\frac{(2m)^3}{(2m+2)!!}\right)+\\
&\quad O\left(\sum_{(2m-1)!!\le x}(2m-1)^3\right)+O\left(\frac{x}{2}\sum_{(2m-1)!!>x}\left(\frac{(2m-1)^3}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^3}{(2m+1)!!}\right)\right)+\\
&\quad O\left(\sum_{(2m)!!\le x}(2m)^3\right)+O\left(x\sum_{(2m)!!>x}\left(\frac{(2m)^3}{(2m)!!}-\frac{(2m)^3}{(2m+2)!!}\right)\right) \qquad (5)
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2m-1)^3}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^3}{(2m+1)!!}\right) &=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m+1)^3-(2m-1)^3}{(2m+1)!!}\\
&=1+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m+1)^2+(2m+1-2)(2m+1)+(2m+1-2)^2}{(2m+1)!!}\\
&=1+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{3(2m+1)^2-6(2m+1)+4}{(2m+1)!!}\\
&=1+2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{4}{(2m+1)!!}+\frac{3(2m-1)}{(2m-1)!!}\right)\\
&=13+14\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!!} \qquad (6)
\end{aligned}$$

由 $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!!}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ 同理可得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2m)^3}{(2m)!!}-\frac{(2m)^3}{(2m+2)!!}\right)=6+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{14}{(2m)!!}=14\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-8 \tag{7}$$

所以根据 (1)-(7) 式, 我们容易得到:

$$\sum_{n\le x}(S^{**}(n))^3=\left(14\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}+7\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!!}\right)x+O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^4\right)$$

于是完成了定理 1 的证明.

下面我们将完成定理 2 的证明.

令 $A=\left(14\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}+7\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!!}\right)$, 则 $B(x)=\sum_{n\le x}(S^{**}(n))^3=Ax+O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^4\right)$.

因此当 $k\ge 0$ 时, 由定理 1 及 Able 求和公式可得:

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}n^k(S^{**}(n))^3=&x^kB(x)-1-k\int_1^x B(t)t^{k-1}\mathrm{d}t\\ =&x^k\left(Ax+O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^4\right)\right)-1-k\int_1^x\left(At+O\left(\left(\frac{\ln t}{\ln\ln t}\right)^4\right)\right)t^{k-1}\mathrm{d}t\\ =&\frac{1}{k+1}\left(14\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}+7\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!!}\right)x^{k+1}+O\left(x^k\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^4\right)\end{aligned}$$

于是完成了定理 1 的证明.

同理可证定理 3.

参考文献

[1] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质 [J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1009-1012.
[2] 李洁. 一个包含 Smarandache 原函数的方程 [J]. 数学学报, 2007, 50(2): 333-336.
[3] 刘燕妮. 一个包含 Smarandache 函数的方程 [J]. 西北大学学报自然科学版, 2007, 37(2): 197-198.
[4] 苟素, 杜晓英. 关于 Smarandache 对偶函数 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(1): 17-20.
[5] 杨衍婷. 一个数论函数的均值问题 [J]. 黑龙江大学自然科学学报. 2008, 25(3): 340-342.
[6] 王阳. 与 Smarandache 双阶乘对偶函数有关的方程 [J] . 南阳师范学院学报, 2010, 9(3): 1-3.
[7] 王阳.Smarandache 双阶乘对偶函数的恒等式 [J]. 南阳师范学院学报. 2012, 11(12): 11-13.
[8] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. Springer-Verlag, 1976.

On the Cubic Mean Value and Weighted Mean Value of the Smarandache Double Factioral Dual Function

WANG Yang

(School of Mathematics and Statistics, Nanyang Normal University, Nanyang 473061, China)

Abstract: The quadratic mean value and weighted mean value are studied for the Smarandache double factorial dual function $S^{**}(n)$ by using elementary methods, the asymptotic formulas are given of $\sum_{n\le x}(S^{**}(n))^3$, $\sum_{n\le x}n^k(S^{**}(n))^3$, and $\sum_{n\le x}\frac{(S^{**}(n))^3}{n^k}$, some new properties are obtained, and the related conclusions are supplemented for some references.

Keywords: Smarandache double factioral dual function; mean value; asymptotic formula