DOI:10.15958/j.cnki.gdxbzrb.2010.01.006
第27卷 第1期 贵州大学学报(自然科学版) Vol.27 No.1
2010年 2月 Journal of Guizhou University (Natural Sciences) Feb. 2010

文章编号 1000-5269(2010)01-0006-02

推广伪 Smarandache函数

郭守朋*
(西安电子科技大学理学院,陕西 西安 710071)

摘 要:给出一个新的伪 Smarandache函数,并简要探讨了其初等性质及其应用。
关键词:Smarandache函数;伪 Smarandache函数;素数;整除
中图分类号:O156.4 文献标识码:A

David Gorski在文献[1]中提出了著名的伪 Smarandache函数,对任意正整数 n,伪 Smarandache函数 $Z(n)$定义为:

$$Z(n)=\min\{m:m\in N^*,\ n\mid\frac{m(m+1)}{2}\}\tag{1}$$

本文给出推广的伪 Smarandache函数,定义如下:

定义 1 对任意的正整数 n,

$$Z_3(n)=\min\{m:m\in N^*,\ n\mid\frac{m(m+1)(m+2)}{6}\}\tag{2}$$

称为新的伪 Smarandache函数。

许多学者从不同的角度研究了函数 $S(n)$及 $Z(n)$的初等性质,本文仅讨论 $Z_3(n)$的函数值形式。

1 $Z_3(n)$的函数值

由于 Smarandache函数和伪 Smarandache函数与素数有密切的关系,这方面的研究也通常从素数入手。

首先,由 $Z_3(n)$的定义知:

$Z_3(1)=1$, $Z_3(2)=2$, $Z_3(3)=7$, $Z_3(4)=2$,
$Z_3(5)=3$, $Z_3(6)=7$, $Z_3(7)=5$, $Z_3(8)=6$,
$Z_3(9)=25$, $Z_3(10)=3$, $Z_3(11)=9$, $Z_3(12)=7$,
$Z_3(13)=11$, $Z_3(14)=6$, $Z_3(15)=8$, $Z_3(16)=14$,
$Z_3(17)=15$, $Z_3(18)=26$, $Z_3(19)=17$, $Z_3(20)=4$,
$Z_3(21)=7$, $Z_3(22)=10$, $Z_3(23)=21$, $Z_3(24)=8$,
$Z_3(25)=23$, $Z_3(26)=11$, $Z_3(27)=79$.

从上面可以看到, $Z_3(n)$函数值的分布是不规则的,而从不规则中寻找规律正是数学研究的一个特点。从以上函数值观察到的规律如下:

$$Z_3(2^k)=2^k-2,\ k\geq 2,\ k\in N\tag{3}$$

$$Z_3(3^k)=3^{k+1}-2,\ k\in N\tag{4}$$

$$Z_3(p^k)=p^k-2,\ k\in N^*\tag{5}$$

$$Z_3(2p)=\begin{cases}p-2, & 4\mid p-1\\ p-1, & 4\nmid p-1\end{cases}$$

$$Z_3(4p)=\begin{cases}p-2, & 8\mid p-1\\ p-1, & 4\mid p\pm1\end{cases}\tag{6}$$

其中公式(5)、(6)中 $p>3$为素数。

(1)当 $n=2^k$时,设 $Z_3(2^k)=m$,则 $2^k\mid\frac{m(m+1)(m+2)}{6}$,由 $Z_3(2)=2$知,当 $k>1$时, $Z_3(2^k)=m>2$,此时, m, $m+2$不可能同时为 2的幂,若 m为奇数,则 $2^{k+1}\mid m+1$,此时 $m>2^{k+1}-1$;若 m为偶数,则只需 $2^k\mid m$或者 $2^k\mid m+2$,由 $Z_3(n)$的最小性, $m+2=2^k$,又 $Z_3(1)=1$, $Z_3(2)=2$,所以(3)式成立。

(2)对于 $n=3^k$时,同(1),先设 $Z_3(3^k)=m$,由 $3^k\mid\frac{m(m+1)(m+2)}{6}$,当 $k\geq 1$时, 3^{k+1}必整除 m, $m+1$, $m+2$之一,由 $Z_3(n)$的最小性,取 $m+2=3^{k+1}$,此时 $m=3^{k+1}-2$,又 $Z_3(1)=1$, $Z_3(3)=7$,所以(4)式成立。

(3)同理,对于 $n=p^k$,有(5)式成立。

(4)对于 $n=2p$, $p>3$为素数,设 $Z_3(2p)=m$,则由 $2p\mid\frac{m(m+1)(m+2)}{6}$,若 m为奇数,则 $m+1$为偶数, p必整除 m, $m+1$, $m+2$其中之一,

* 收稿日期:2009-12-24
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介:郭守朋(1986-),男,安徽亳州人,硕士研究生,研究方向:数论,图论及组合优化,Email: shoupeng_guo@126.com.
*通讯作者:郭守朋,Email: shoupeng_guo@126.com.

且 $2^2 \mid m+1$，由 $Z_3(n)$的最小性，取 $m+2=p$，则有 $m=p-2$，$4 \mid p-1$；若 m为偶数，则 $m+2$亦为偶数，此时只需 $m+1=p$即可，则 $2 \mid p-1$．即当 $4 \mid p-1$时，$Z_3(2p)=p-2$；当 $2 \mid p-1$，且 $4 \nmid p-1$时，$Z_3(2p)=p-1$．

对于 $n=4p$，$p>3$为素数，，设 $Z_3(4p)=m$，则由 $4p \mid \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$，若 m为奇数，则 $m+1$为偶数，p必整除 m，$m+1$，$m+2$其中之一，且 $2^3 \mid m+1$，由 $Z_3(n)$的最小性，取 $m+2=p$，则有 $m=p-2$，$8 \mid p-1$．若 m为偶数，则 $m+2$亦为偶数，此时，若取 $m+1=p$，则须有 $4 \mid m$或者 $4 \mid m+2$，即当 $4 \mid p-1$且 $8 \nmid p-1$或者 $4 \mid p+1$时，$Z_3(4p)=p-1$；若取 $m+2=2p$，由 $4p \mid \frac{(2p-2)(2p-1)2p}{6}$，因为 $2 \mid p-1$，所以若 $4 \nmid p-1$，则必有 $4 \mid p+1$，此时应有 $Z_3(4p)=p-1$；同理，若 $4 \nmid p+1$，必有 $4 \mid p-1$，所以 $Z_3(4p) \leqslant p-1$．因此（6）式成立。

2　展望

Smarandache函数和伪 Smarandache函数与素数有密切的关系，因此已经应用到密码学和编码领域的研究。素数和数论一直是令无数数学家神往的圣区，本文讨论了 $Z_3(n)$函数值的部分形式，仅是数论领域的冰山一角，更多的数论领域等待着我们去发掘。

参考文献：

[1] Gorskid D. The pseudo Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 140－149.

[2] 徐哲峰．关于 Smarandache函数的值分布[J]．数学学报（中文版），2006, 49(5): 1009－1012

[3] 张文鹏．关于 F. Smarandache函数的两个问题[J]．西北大学学报（自然科学版），2008, 38(2): 173－176.

A Generalization of the Pseudo Smarandache Function

GUO Shou-peng

(Department of Applied Mathematics, College of Science, Xidian University, Xian 710071, China)

Abstract: A new pseudo Smarandache function is given and its elementary properties and application are briefly discussed in this article.

Key words: the Smarandache function; the pseudo Smarandache function; prime; divisibility