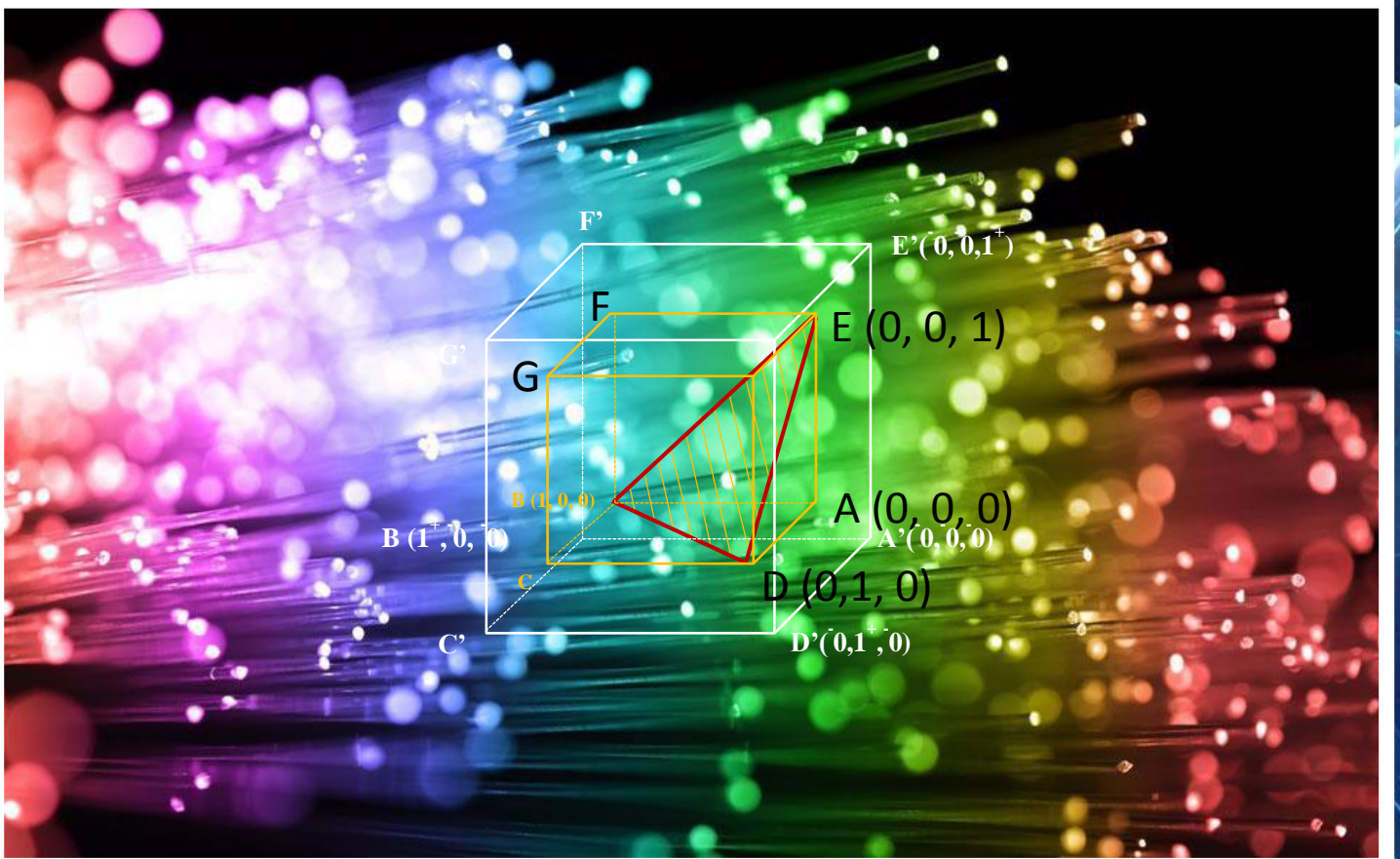




NEUTROSOPHIC KNOWLEDGE

JOURNAL OF MODERN SCIENCE AND ARTS

Volume 10, 2026

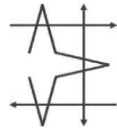


Editors-in-Chief

Salah Bouzina, Florentin Smarandache, Ahmed Hatip

ISSN 2767-0619 (Print)

ISSN 2767-0627 (Online)



Neutrosophic Science
International Association (NSIA)

Published by the UNIVERSITY OF NEW MEXICO, United States



NEUTROSOPHIC KNOWLEDGE

JOURNAL OF MODERN SCIENCE AND ARTS

Editors-in-Chief

Salah Bouzina, Florentin Smarandache, Ahmed Hatip

ISSN 2767-0619 (Print)

ISSN 2767-0627 (Online)

ISSN 2767-0627 (online)



ISSN 2767-0619 (Print)

Neutrosophic Knowledge

An international Journal concerned with publishing in all scientific and literary fields

Papers Published in Arabic, Turkish, English and French

Copyright Notice

Copyright @ Neutrosophics Knowledge

All rights reserved. The authors of the articles do hereby grant Neutrosophic Knowledge non-exclusive, worldwide, royalty-free license to publish and distribute the articles in accordance with the Budapest Open Initiative: this means that electronic copying, distribution and printing of both full-size version of the journal and the individual papers published therein for non-commercial, academic or individual use can be made by any user without permission or charge. The authors of the articles published in Neutrosophic Knowledge retain their rights to use this journal as a whole or any part of it in any other publications and in any way they see fit. Any part of Neutrosophic Knowledge howsoever used in other publications must include an appropriate citation of this journal.

Information for Authors and Subscribers

“Neutrosophics Knowledge” has been created for publications on advanced studies in neutrosophy, neutrosophic set, neutrosophic logic, neutrosophic probability, neutrosophic statistics that started in 1995 and their applications in any field, such as the neutrosophic structures developed in algebra, geometry, topology, etc.

The submitted papers should be professional, in good Arabic, Turkish, English and French containing a brief review of a problem and obtained results.

Neutrosophy is a new branch of philosophy that studies the origin, nature, and scope of neutralities, as well as their interactions with different ideational spectra.



This theory considers every notion or idea $\langle A \rangle$ together with its opposite or negation $\langle \text{anti}A \rangle$ and with their spectrum of neutralities $\langle \text{neut}A \rangle$ in between them (i.e. notions or ideas supporting neither $\langle A \rangle$ nor $\langle \text{anti}A \rangle$). The $\langle \text{neut}A \rangle$ and $\langle \text{anti}A \rangle$ ideas together are referred to as $\langle \text{non}A \rangle$.

Neutrosophy is a generalization of Hegel's dialectics (the last one is based on $\langle A \rangle$ and $\langle \text{anti}A \rangle$ only).

According to this theory every idea $\langle A \rangle$ tends to be neutralized and balanced by $\langle \text{anti}A \rangle$ and $\langle \text{non}A \rangle$ ideas - as a state of equilibrium.

In a classical way $\langle A \rangle$, $\langle \text{neut}A \rangle$, $\langle \text{anti}A \rangle$ are disjoint two by two. But, since in many cases the borders between notions are vague, imprecise, Sorites, it is possible that $\langle A \rangle$, $\langle \text{neut}A \rangle$, $\langle \text{anti}A \rangle$ (and $\langle \text{non}A \rangle$ of course) have common parts two by two, or even all three of them as well.

Neutrosophic Set and *Neutrosophic Logic* are generalizations of the fuzzy set and respectively fuzzy logic (especially of intuitionistic fuzzy set and respectively intuitionistic fuzzy logic).

In neutrosophic logic a proposition has a degree of truth

(T), a degree of indeterminacy (I), and a degree of falsity (F), where T, I, F are standard or non-standard subsets of $] -0, 1+[$.

Neutrosophic Probability is a generalization of the classical probability and imprecise probability.

Neutrosophic Statistics is a generalization of the classical statistics.

What distinguishes the neutrosophics from other fields is the $\langle \text{neut}A \rangle$, which means neither $\langle A \rangle$ nor $\langle \text{anti}A \rangle$.

$\langle \text{neut}A \rangle$, which of course depends on $\langle A \rangle$, can be indeterminacy, neutrality, tie game, unknown, contradiction, ignorance, imprecision, etc.

All submissions should be designed in MS Word format using our template file:

[http:// fs.unm.edu/NK/Nk-paper-template.doc](http://fs.unm.edu/NK/Nk-paper-template.doc).

A variety of scientific books in many languages can be downloaded freely from the Digital Library of Science:

[http:// fs.unm.edu/ScienceLibrary.htm](http://fs.unm.edu/ScienceLibrary.htm).

To submit a paper, mail the file to the Editor-in-Chief. To order printed issues, contact the Editor-in-Chief. This journal is non-commercial, academic edition. It is printed from private donations.

Information about the neutrosophics you get from the UNM website:

[http:// fs.unm.edu/neutrosophy.htm](http://fs.unm.edu/neutrosophy.htm).. The home page of the journal is accessed on <http://fs.unm.edu/NK>.



Editors-in-Chief

Dr. Salah Bouzina, Department of Philosophy, Faculty of Human Science and Sociology, University Constantine 2 Abdelhamid Mehri, Constantine 25000, Algeria, E-mail: salah.bouzina@univ-constantine2.dz

Prof. Dr. Florentin Smarandache, Postdoc, Department of Mathematics, University of New Mexico, Gallup, NM 87301, USA, Email: smarand@unm.edu

Dr. Ahmed Hatip, Department of Mathematics, Faculty of science, University of Gaziantep 27000, Turkey, E-mail: ahmedhatip@gantep.edu.tr

Associate Editors

Dr. Abdelhamid Bounemour, Electronics Department, The National Polytechnic School of Constantine, University Constantine 3 Salah Boubnider, Constantine 25000, Algeria, E-mail: abdelhamid.bounemour@umc.edu.dz

Dr. Soheyb Milles, Department of Mathematics and Computer Science, University Center of Barika, Barika 05400, Algeria, E-mail: soheyb.milles@cu-barika.dz



Editors

Said Broumi, Laboratory of Information Processing, Faculty of Science Ben M'Sik, University of Hassan II, Casablanca, Morocco, Email: s.broumi@flbenmsik.ma.

Saeid Jafari, College of Vestsjaelland South, Slagelse, Denmark, Email: jafaripersia@gmail.com.

Valeri Kroumov, Okayama University of Science, Okayama, Japan, Email: val@ee.ous.ac.jp

A. A. Agboola, Federal University of Agriculture, Abeokuta, Nigeria, Email: agboolaaaa@funaab.edu.ng.

Riad K. Al-Hamido, Math Department, College of Science, Al-Baath University, Homs, Syria, Email: riad-hamido1983@hotmail.com.

Faruk Karaaslan, Çankırı Karatekin University, Çankırı, Turkey, Email: fkaraaslan@karatekin.edu.tr

Yanhui Guo, University of Illinois at Springfield, OneUniversity Plaza, Springfield, IL 62703, United States, Email: yguo56@uis.edu

Abeer T. Khalil, Electrical Engineering Department, Benha Faculty of Engineering, Benha University, Egypt, Email: Abeer.Twakol@bhit.bu.edu.eg

Giorgio Nordo, MIFT - Department of Mathematical and Computer Science, Physical Sciences and Earth Sciences, Messina University, Italy, Email: giorgio.nordo@unime.it.

Le Hoang Son, VNU Univ. of Science, Vietnam National Univ. Hanoi, Vietnam, Email: sonlh@vnu.edu.vn.

Young Bae Jun, Gyeongsang National University, South Korea, Email: skywine@gmail.com.

Yo-Ping Huang, Department of Computer Science and Information, Engineering National Taipei University, New Taipei City, Taiwan, Email: yphuang@ntut.edu.tw.

Vakkas Ulucay, Kilis 7 Aralık University, Turkey, Email: vulucay27@gmail.com.

Peide Liu, Shandong University of Finance and Economics, China, Email: peide.liu@gmail.com.

Jun Ye, Department of Electrical and Information Engineering, Shaoxing University, 508 Huancheng West Road, Shaoxing 312000, China; Email: yejun@usx.edu.cn.

Memet Şahin, Department of Mathematics, Gaziantep University, Gaziantep 27310, Turkey, Email: mesahin@gantep.edu.tr

Fahmi Khalifa, Electronics and Communications Engineering Department, Faculty of Engineering, Mansoura University Mansoura, Egypt, Email: fahmikhalfifa@mans.edu.eg.

Elsayda Hamdy Nasr Abd Elhalim, Assistant professor of Maternity, Obstetrics & Gynecological Nursing - Port Said university - Egypt, E-mal: e.abdelhalim@psau.edu.sa.

Mutaz Mohammad, Department of Mathematics, Zayed University, Abu Dhabi 144534, United Arab Emirates. Email: Mutaz.Mohammad@zu.ac.ae.

Abdullahi Mohamud Sharif, Department of Computer Science, University of Somalia, Makka Al-mukarrama Road, Mogadishu, Somalia, Email: abdullahi.shariif@uniso.edu.so.

NoohBany Muhammad, American University of Kuwait, Kuwait, Email: noohmuhammad12@gmail.com.

Pattathal Vijayakumar Arun, College of Science and Technology, Phuentsholing, Bhutan, Email: arunpv2601@gmail.com.

Endalkachew Teshome Ayele, Department of Mathematics, Arbaminch University, Arbaminch, Ethiopia, Email: endalkachewteshome83@yahoo.com.

Xindong Peng, School of Information Science and Engineering, Shaoguan University, Shaoguan 512005, China, Email: 952518336@qq.com.

Xiao-Zhi Gao, School of Computing, University of Eastern Finland, FI-70211 Kuopio, Finland, xiaozhi.gao@uef.fi.

Madad Khan, Comsats Institute of Information Technology, Abbottabad, Pakistan, Email: madadmath@yahoo.com.

Dmitri Rabounski and Larissa Borissova, independent researchers, Emails: rabounski@ptep-online.com,

Selcuk Topal, Mathematics Department, Bitlis Eren University, Turkey, Email: s.topal@beu.edu.tr.

Muhammad Aslam & Mohammed Alshumrani, King Abdulaziz Univ., Jeddah, Saudi Arabia, Email: magmuhammad@kau.edu.sa.

Luu Quoc Dat, Univ. of Economics and Business,



Maikel Leyva-Vazquez, Universidad de Guayaquil, Ecuador, Email: mleyvaz@gmail.com.
 Tula Carola Sanchez Garcia, Facultad de Educacion de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Peru, Email: tula.sanchez1@unmsm.edu.pe.
 Tatiana Andrea Castillo Jaimes, Universidad de Chile, Departamento de Industria, Doctorado en Sistemas de Ingeniería, Santiago de Chile, Chile, Email: tatiana.a.castillo@gmail.com.
 Muhammad Akram, University of the Punjab, New Campus, Lahore, Pakistan, Email: m.akram@pucit.edu.pk.
 Irfan Deli, Muallim Rifat Faculty of Education, Kilis 7 Aralik University, Turkey, Email: irfandeli@kilis.edu.tr.
 Ridvan Sahin, Department of Mathematics, Faculty of Science, Ataturk University, Erzurum 25240, Turkey, Email: mat.ridone@gmail.com.
 Ibrahim M. Hezam, Department of computer, Faculty of Education, Ibb University, Ibb City, Yemen, Email: ibrahizam.math@gmail.com.
 Aiyared Iampan, Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao, Phayao 56000, Thailand, Email: aiyared.ia@up.ac.th.
 Ameirys Betancourt-Vázquez, 1 Instituto Superior Politécnico de Tecnologías e Ciências (ISPTEC), Luanda, Angola, Email: ameirysbv@gmail.com.
 Karina Pérez-Teruel, Universidad Abierta para Adultos (UAPA), Santiago de los Caballeros, República Dominicana, Email: karinapt@gmail.com.
 Neilys González Benítez, Centro Meteorológico Pinar del Río, Cuba, Email: neilys71@nauta.cu.
 Jesus Estupinan Ricardo, Centro de Estudios para la Calidad Educativa y la Investigación Científica, Toluca, Mexico, Email: jestupinan2728@gmail.com.
 Victor Christianto, Malang Institute of Agriculture (IPM), Malang, Indonesia, Email: victorchristianto@gmail.com.
 Wadei Al-Omeri, Department of Mathematics, Al-Balqa Applied University, Salt 19117, Jordan, Email: wadeialomeri@bau.edu.jo.
 Ganeshsree Selvachandran, UCSI University, Jalan Menara Gading, Kuala Lumpur, Malaysia, Email: Ganeshsree@ucsiuniversity.edu.my.
 Ilanthenral Kandasamy, School of Computer Science and Engineering (SCOPE), Vellore Institute of Technology (VIT), Vellore 632014, Tamil Nadu, India, Email: ilanthenral.k@vit.ac.in
 G. Srinivasa Rao, Department of Statistics, The University of Dodoma, Dodoma, PO. Box: 259, Tanzania, Email: gaddesrao@gmail.com.

Kul Hur, Wonkwang University, Iksan, Jeollabukdo, South Korea, Email: kulhur@wonkwang.ac.kr.
 Kemale Veliyeva & Sadi Bayramov, Department of Algebra and Geometry, Baku State University, 23 Z. Khalilov Str., AZ1148, Baku, Azerbaijan, Email: kemale2607@mail.ru, Email: baysadi@gmail.com.
 Ima Makharadze & Tariel Khvedelidze, Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Faculty of Exact and Natural Sciences, Tbilisi, Georgia.
 Inayatour Rehman, College of Arts and Applied Sciences, Dhofar University Salalah, Oman, Email: irehman@du.edu.om.
 Riad K. Al-Hamido, Math Department, College of Science, Al-Baath University, Homs, Syria, Email: riadhamido1983@hotmail.com.
 Faruk Karaaslan, Çankırı Karatekin University, Çankırı, Turkey, Email: fkaraaslan@karatekin.edu.tr.
 Morrisson Kaunda Mutuku, School of Business, Kenyatta University, Kenya Surapati Pramanik, Department of Mathematics, Nandalal Ghosh B T College, India, Email: drspramanik@isns.org.in.
 Suriana Alias, Universiti Teknologi MARA (UiTM) Kelantan, Campus Machang, 18500 Machang, Kelantan, Malaysia, Email: suria588@kelantan.uitm.edu.my.
 Arsham Borumand Saeid, Dept. of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran, Email: arsham@uk.ac.ir.
 V.V. Starovoytov, The State Scientific Institution «The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus», Minsk, Belarus, Email: ValeryS@newman.bas-net.by.
 E.E. Eldarova, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Republic of Kazakhstan, Email: Doctorphd_eldarova@mail.ru.
 Mohammad Hamidi, Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), Tehran, Iran. Email: m.hamidi@pnu.ac.ir.
 Lemnaouar Zedam, Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, University Mohamed Boudiaf, M'sila, Algeria, Email: lzedam@gmail.com.
 Vietnam National Univ., Hanoi, Vietnam, Email: datlq@vnu.edu.vn.
 Tibesse Youssef, Department of philosophy, Faculty of Arts and Human Sciences, University Sidi Mohammed Ben Abdellah, Fez, 30000 Morocco, Email: Youssef.tibesse@usmba.ac.ma



Content

No.	Article Title	Author Name	Page
1	Finitesimally Punctured Waves, Surfaces, and Manifolds: Connections and Applications	Florentin Smarandache	1-24
2	Fuzzy and Neutrosophic Extensions of Gödel's Incompleteness Theorems	Florentin Smarandache	25-43
3	Neutrosophic partial derivative with two variables by AH-Isometry	Ahmed Hatip Taqi-Aldin Alkhatib	44-50
4	Towards the Foundation of Mathematical Literature as an Emerging Literary Genre	A.A. Salama	51-61
5	Recursive HyperGraphs and Recursive SuperHyperGraphs: Exploring More Hierarchical and Generalized Graph Concepts	Takaaki Fujita	62-75
6	Conceptual HyperGraph and Conceptual SuperHyperGraph	Takaaki Fujita	76-90
7	Levels of Narrative Truth and Psychological Structure in Julian Barnes's The Sense of an Ending: A Neutrosophic and Psychological Reading	Mohammed Ibrahim Mohammed Omer Hommed	91-107
8	Huit ans de "Neutrosophic Computing and Machine Learning" : rétrospective bibliométrique et extension neutrosophique de l'analyse bibliométrique (2018-2026)	Maikel Leyva-Vázquez Yismandry Gonzalez Vargas Florentin Smarandache	108-138
9	Analyse comparative de la statistique classique, de l'arithmétique affine et de la statistique neutrosophique dans le traitement de l'incertitude : supériorité contextuelle de l'approche neutrosophique face à l'indétermination, à la contradiction et à l'information incomplète	Florentin Smarandache Maikel Yelandi Leyva Vázquez	139-149



Article

Finitiesimally Punctured Waves, Surfaces, and Manifolds: Connections and Applications

Florentin Smarandache^{1*}

¹ Emeritus Professor, Department of Mathematics & Sciences University of New Mexico, Gallup, NM 87301, USA, ,

<https://fs.unm.edu/IPW/>, e-mail: smarand@unm.edu

* Correspondence: e-mail: smarand@unm.edu

Received: 03, 19, 2026; *Accepted:* 03, 25, 2026

Abstract

The Finitiesimally Punctured Wave (FPW) — introduced in Smarandache (2026) as the practical, experimentally accessible counterpart of the Infinitesimally Punctured Wave (IPW) — replaces the formal mathematical infinitesimal separation ε between sub-particles with a genuine positive real distance $\delta > 0$. This paper develops the full landscape of connections between the FPW program and established theories across physics, mathematics, and technology, and charts a broad application horizon for the companion structures: Finitiesimally Punctured Surfaces (FPS) and Finitiesimally Punctured Manifolds (FPM). We show that every crystal lattice, photonic crystal, phononic crystal, and quantum dot array is already a FPW; that graphene and 2D materials are FPS; that lattice QCD and causal set theory are FPM; and that loop quantum gravity, non-commutative geometry, holographic AdS/CFT, and topological quantum computing all have natural FPW/FPS/FPM realizations. On the application side we identify new research directions in metamaterial engineering, quantum error correction, post-quantum cryptography, neural-network theory, cosmological structure formation, and biological physics. Throughout, the Neutrosophic T-I-F decomposition of the FPW provides the logical bridge between continuous and discrete descriptions.

Keywords: Finitiesimally Punctured Wave; FPW; FPS; FPM; lattice physics; condensed matter; topological insulators; metamaterials; quantum computing; neutrosophic logic; quantum gravity; AdS/CFT; neural networks; cryptography; causal set theory; loop quantum gravity; non-commutative geometry.

1. Introduction

The Infinitesimally Punctured Wave (IPW) program, initiated by Smarandache in 2019, proposes that every quantum entity is an aggregation of infinitely many sub-particles arranged along a wave-shaped path, with consecutive sub-particles separated by an infinitesimal gap $\varepsilon \rightarrow 0$ in the sense of nonstandard analysis. The resulting theory resolves wave–particle duality, eliminates wavefunction collapse, provides a natural UV regulator via the Puncture Buffering Principle, and offers singular-free black holes and a non-singular cosmological bounce.

The Finitesimally Punctured Wave (FPW) extends this framework from the virtual mathematical world (infinitesimal ε) to the real physical world (genuine positive real $\delta > 0$). The transition $\varepsilon \rightarrow \delta$ is the transition from a perfect theoretical ideal to an experimentally accessible theory with measurable predictions: a hard Brillouin-zone UV cut-off at $k_{\max} = \pi/\delta$, a minimum position uncertainty $\Delta x_{\min} \approx \delta/\pi$, and a modified dispersion relation that deviates from the linear standard-QM relation at wave vectors $k \sim 1/\delta$.

This paper asks: what are the connections of the FPW to established theories, and what new applications become possible? We organize our answer into three main parts: (I) connections to established physics and mathematics; (II) FPS (Finitesimally Punctured Surfaces) and FPM (Finitesimally Punctured Manifolds) — the 2D and n-dimensional generalizations; and (III) new application fields enabled by the FPW/FPS/FPM language.

Throughout, we use the Neutrosophic T-I-F decomposition of every FPW/FPS/FPM structure: T encodes the smooth, wave-like, classical regime; F encodes the localized, particle-like, singular regime at each puncture; and I encodes the transition zone of finite thickness δ — which, unlike the infinitesimal IPW transition, is a real physical length accessible to experiment.

2. The Finitesimally Punctured Wave: Core Definitions and Equations

2.1 Fundamental Definition

Definition: Finitesimally Punctured Wave (FPW)

A quantum entity or physical wave modeled as an ordered set

$$S_{\delta} = \{ p_1, p_2, \dots, p_N \}$$

of N sub-particles arranged along a wave-shaped path, with each consecutive pair (p_k, p_{k+1}) separated by the fixed real distance $\delta > 0$.

Total sub-particle count: $N = L / \delta$ for a wave of path-length L .

The wave function is the density envelope sampled at sites $\{ k \cdot \delta : k = 1, \dots, N \}$.

Regime: the FPW looks like a continuous wave for probe resolution $R \gg \delta$,
and reveals discrete lattice structure at $R \sim \delta$.

The key distinction from the IPW is that δ is an ordinary real number — small, perhaps sub-Planckian, but measurable in principle. The IPW's ϵ is a hyperreal with standard part zero; the FPW's δ belongs to the standard real line \mathbb{R} .

2.2 The FPW Discrete Field Equation

The evolution of the FPW sub-particle amplitudes $\varphi_k(t)$ is governed by the Discrete Nonlinear Schrödinger Equation (DNLSE):

Eq. (2.1) — FPW Discrete Field Equation (DNLSE)
$i\hbar \cdot d\varphi_k/dt = -J \cdot (\varphi_{k+1} + \varphi_{k-1} - 2\varphi_k) / \delta^2 + U_k \cdot \varphi_k + g \varphi_k ^2 \cdot \varphi_k$
<i>where: J = nearest – neighbor coupling constant (wave "tension")</i>
<i>U_k = external potential at site k</i>
<i>$g \varphi_k ^2$ = self – interaction (FPW puncture regulariser)</i>
<i>Continuum limit: $\delta \rightarrow 0$ with $J = \hbar^2/(2m\delta^2)$ held fixed</i>
<i>→ reduces to the standard nonlinear Schrödinger equation</i>

2.3 FPW Dispersion Relation

For a free FPW (no external potential, linear regime), plane-wave solutions $\varphi_k = \exp(i(k\delta \cdot q - \omega t))$ give:

Eq. (2.2) — FPW Dispersion Relation
$\omega(q) = (2J/\hbar) \cdot [1 - \cos(q\delta)] / \delta^2$
<i>Long – wavelength limit ($q\delta \ll 1$):</i>
$\omega \approx J \cdot q^2/\hbar \cdot [1 - (q\delta)^2/12 + \dots] \quad (\text{standard QM recovered})$

$= (\hbar/2) \cdot [1 + (\Delta p \cdot \delta / (\pi\hbar))^2]$
Minimum position uncertainty (at $\Delta p \rightarrow p_{\max}$):
$\Delta x_{\min} \approx \delta/\pi \quad (\text{hard minimum length} = \text{one lattice cell})$

This GUP with quadratic correction in Δp is a real, measurable prediction of the FPW — one that standard QM does not contain, and that reduces to the standard HUP in the limit $\delta \rightarrow 0$.

3. Connections to Established Physics and Mathematics

3.1 Condensed Matter: Lattice Physics and Topological Insulators

The most immediate realization of the FPW is in condensed matter physics. Every crystal lattice — with atoms separated by lattice constant a — is a FPW with $\delta = a$. The Debye model of phonons is a FPW with the Debye cut-off $q_D = \pi/a$ being exactly the FPW Brillouin zone boundary $q_{\max} = \pi/\delta$. The FPW framework inverts the usual logic of condensed matter theory: instead of saying "a crystal approximates a continuum", it says "a continuum is the $\delta \rightarrow 0$ limit of a physically real FPW."

The connection to topological insulators is particularly deep. Topological insulators are materials where the bulk band structure carries a non-trivial topological invariant (Chern number or Z_2 index), leading to protected conducting surface states. In FPW language, these topological invariants are the F-component of the Neutrosophic Euler characteristic χ_N of the FPW lattice:

Eq. (3.1) — Neutrosophic Euler Characteristic of a FPW Lattice
$\chi_N(\text{FPW lattice}) = (T, I, F)$
T-component: classical smooth-regime contribution (bulk band topology)
I-component: transition-zone contributions (near Brillouin zone boundary)
F-component: defect/puncture contributions (topological invariant = Chern number)

Topological phase transition = discontinuous jump in F-component of χ^N

3.2 Quantum Field Theory and Lattice Gauge Theory

Lattice QCD (quantum chromodynamics on a discrete spacetime lattice with spacing $a \sim 0.1$ fm) is literally a four-dimensional FPW. Quark and gluon fields are defined at FPW lattice sites; the continuum limit is recovered as $a \rightarrow 0$ (the FPM continuum limit). The FPW framework provides a physical ontological interpretation for what lattice QCD is doing: computing in the real FPW world (finite δ) and extrapolating toward the virtual IPW world ($\delta \rightarrow 0$).

The FPW dispersion relation also clarifies the famous Nielsen-Ninomiya fermion doubling problem in lattice QFT: naive lattice fermions produce 2^d spurious copies at the Brillouin zone corners ($q = \pi/\delta$ in each dimension). The Wilson, domain-wall, and overlap fermion actions are different ways of handling the FPW I-component at the zone boundary — they correspond to different choices of the indeterminacy treatment at $k_{max} = \pi/\delta$.

3.3 Non-Commutative Geometry (Connes)

Alain Connes' non-commutative geometry replaces the continuous manifold of spacetime with a spectral triple (A, H, D) — an algebra A , Hilbert space H , and Dirac operator D — from which geometry is reconstructed algebraically. The FPW provides a commutative but discrete analog: the algebra is $C(M_\delta)$ (continuous functions on the FPW lattice manifold M_δ), and the Dirac operator is the discrete lattice Dirac operator D_δ . The FPW distance function is:

Eq. (3.2) — FPW Distance Function and Connection to Connes Spectral Triple
$d_\delta(x, y)$ = minimum path length through the FPW lattice connecting x and y
(measured in units of δ)
As $\delta \rightarrow 0$: $d_\delta \rightarrow d_{continuous}$ and $D_\delta \rightarrow D_{Dirac}$
The FPW is thus a discretization of Connes' spectral triple that is both
mathematically rigorous and physically motivated by the sub-particle structure.

3.4 Causal Set Theory (Sorkin, Bombelli)

Causal set theory proposes that spacetime is fundamentally a discrete partially-ordered set of spacetime events, with the continuous Lorentzian manifold emerging as an approximation. The

Planck-scale FPW with $\delta = l_P$ is precisely a causal set: each sub-particle is a spacetime event, and the FPW ordering (sub-particle k precedes sub-particle $k+1$) provides the causal structure. The FPW adds three new elements to causal set theory:

- A specific wave equation (the DNLSSE, Eq. 2.1) governing the dynamics of the causal set.
- A physical interpretation of causal set elements as FPW sub-particles.
- A Neutrosophic T-I-F logical structure for the transition between causal and non-causal regions.

3.5 Loop Quantum Gravity (LQG)

In LQG, the geometry of space is quantized into spin networks whose edges carry quantum numbers j representing quantized areas. The minimum non-zero area eigenvalue is:

Eq. (3.3) – FPW Spacing from LQG Minimum Area
$A_{\min} = 8\pi \cdot \gamma \cdot l_P^2 \cdot \sqrt{j_{\min}(j_{\min} + 1)}$
where γ is the Barbero-Immirzi parameter and $l_P \approx 1.6 \times 10^{-35}$ m.
FPW connection: setting $\delta^2 = A_{\min}$ gives $\delta = \sqrt{\gamma} \cdot l_P$
FPW dispersion corrections:
$\Delta\omega/\omega \approx -(k\delta)^2/12 = -(k \cdot \sqrt{\gamma} \cdot l_P)^2 / 12$
This matches the Planck-scale dispersion corrections predicted by LQG for photon propagation.

3.6 Holography and AdS/CFT Correspondence

The AdS/CFT correspondence (Maldacena) equates a $(d+1)$ -dimensional gravitational theory in Anti-de Sitter space with a d -dimensional conformal field theory on its boundary. A FPW lattice regulator on the bulk AdS space with spacing δ_{bulk} induces a UV cut-off on the boundary CFT at $k_{\text{max}} = \pi/\delta_{\text{boundary}}$. The holographic renormalization group — integrating out bulk degrees of freedom from the AdS boundary inward — becomes the FPW continuum limit (taking $\delta \rightarrow 0$ from the

boundary into the bulk). The FPW provides a natural geometric implementation of holographic renormalization without additional regularization schemes.

3.7 Wavelet Theory and Multi-Resolution Analysis

Wavelet analysis (Daubechies, Mallat) decomposes a signal into components at different resolution scales. The FPW is a physical multi-resolution structure: at resolution $R \gg \delta$ it looks like a continuous wave; at $R \sim \delta$ the discrete lattice is visible. The FPW sub-particle amplitudes $\{\varphi_k\}$ are the wavelet coefficients of the physical wave at scale δ :

Eq. (3.4) – FPW as Physical Wavelet Decomposition
FPW as wavelet decomposition:
$\{\varphi_k\}$ = wavelet coefficients at scale δ
$\psi(x)$ = continuous wave envelope = $\sum_k \varphi_k \cdot \psi_\delta(x - k\delta)$
where ψ_δ is the "mother wavelet" (FPW Brillouin zone characteristic function)
Consequence: wavelet-based numerical PDE solvers (adaptive mesh refinement, multigrid) are implicitly FPW calculations — they compute at scale δ and extrapolate toward the IPW limit $\delta \rightarrow 0$.

4. Finitesimally Punctured Surfaces (FPS) and Manifolds (FPM)

Moving from the 1D FPW to 2D Finitesimally Punctured Surfaces (FPS) and n-dimensional Finitesimally Punctured Manifolds (FPM) opens an entirely new landscape of connections and applications.

4.1 Formal Definitions

Definition: Finitesimally Punctured Surface (FPS)

A smooth 2-manifold M with a finite or countable set $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ of puncture points, each replaced by a finite-size disk of radius $\delta > 0$.

The FPS is $M_\delta = M \setminus \{\text{disks of radius } \delta \text{ around each } p_n\}$.

Neutrosophic decomposition:

T-region: smooth M away from punctures (classical differential geometry)
 F-region: puncture disks of radius δ (concentrated curvature)
 I-region: annular transition zones of width $\sim \delta$ around each puncture

Definition: Finitesimally Punctured Manifold (FPM)
 An n -dimensional smooth Riemannian manifold $M_\delta = (M \setminus P_\delta, g_\delta)$
 where P_δ is a set of n -balls of radius δ removed from M ,
 and g_δ is the Riemannian metric on $M \setminus P_\delta$ together with distributional curvature extensions at the boundary of each removed ball.

 FPW ($n=1$) \rightarrow FPS ($n=2$) \rightarrow FPM ($n \geq 3$): unified hierarchy of punctured structures.

4.2 FPS Curvature: Smooth-to-Puncture Transition

On a FPS, the Gaussian curvature K transitions from the smooth background value K_0 to a sharply peaked value near each puncture. The FPS curvature distribution is:

Eq. (4.1) – FPS Curvature and Neutrosophic Euler Characteristic	
$K_{FPS}(x) = K_{smooth}(x) + \sum_n \kappa_n \cdot f_\delta(x - p_n)$	
where f_δ is a smooth bump function of width δ :	
$f_\delta(x - p_n) \rightarrow \delta(x - p_n) \text{ as } \delta \rightarrow 0 \quad (\text{recovers the IPM delta-function})$	
f_δ is smooth and bounded for $\delta > 0$ (FPS is everywhere smooth)	
Neutrosophic Euler Characteristic:	
$\chi_N(FPS) = (T, I, F)$	
$T = \iint_{\{M_T\}} K_{smooth} dA$	(classical smooth contribution)
$I = \iint_{\{M_I\}} K_\epsilon dA$	(transition-zone contribution, $\sim N \cdot (\delta/R)^2$)
$F = \iint_{\{M_F\}} K_\delta dA$	(puncture-disk contribution)

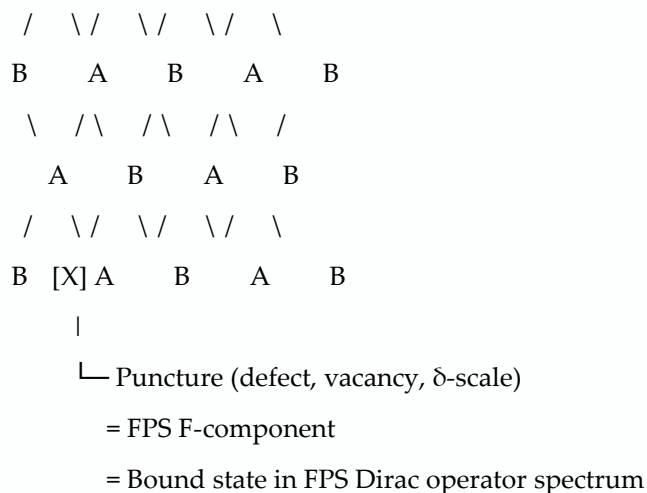
For a sphere with n punctures of radius δ :
$\chi_N = (2 - 2n(\delta/R)^2, n \cdot (\delta/R)^2 \cdot \delta K, n \cdot (\delta/R)^2)$

4.3 Graphene and 2D Materials as FPS

Graphene — a single atomic layer of carbon atoms in a hexagonal lattice with lattice constant $a = 0.142$ nm — is precisely a Finitesimally Punctured Surface with $\delta = a$ in a hexagonal arrangement. The key results:

Eq. (4.2) — Graphene as FPS: Tight-Binding to Dirac Equation
Graphene as FPS:
$\delta = a = 0.142$ nm (C-C bond length)
FPS lattice: hexagonal with two atoms per unit cell
Dirac equation for electrons in graphene:
$H \cdot \Psi = v_F \cdot (\sigma_x \cdot p_x + \sigma_y \cdot p_y) \cdot \Psi$
where $v_F \approx c/300$ (Fermi velocity)
This emerges as the continuum limit ($\delta \rightarrow 0$) of the FPS tight-binding Hamiltonian:
$H_{FPS} = -t \cdot \sum_{\langle i,j \rangle} (c_i^\dagger c_j + h.c.)$
where $t \approx 2.8$ eV is the nearest-neighbor hopping integral
Topological defects in graphene = FPS punctures with non-zero κ_n curvature.
Each defect creates a bound state (discrete eigenvalue of FPS Dirac operator) — observed.

Graphene FPS — Hexagonal Lattice
A B A B



$\delta = a = 0.142 \text{ nm}$ (C-C bond = FPS lattice spacing)

$q_{\text{max}} = \pi/\delta \approx 22 \text{ nm}^{-1}$ (Brillouin zone boundary = FPS UV cut-off)

Figure 2. Graphene as a Finitesimally Punctured Surface. The hexagonal lattice with spacing $\delta = 0.142 \text{ nm}$ realizes an FPS. Vacancies and Stone-Wales defects are FPS punctures (F-component) that generate localized bound states.

4.4 String Worldsheets as FPS

In string theory, a fundamental string sweeping through spacetime traces a 2D worldsheet described by a conformal field theory (CFT). If the worldsheet is a FPS with puncture spacing δ_{ws} , the CFT acquires a natural UV cut-off at $k_{\text{max}} = \pi/\delta_{\text{ws}}$, potentially replacing the need for the string length l_s as an independent UV regulator:

Eq. (4.3) – String Worldsheet as FPS
String worldsheet as FPS:
Polyakov action: $S = -(T_s/2) \int d^2\sigma \sqrt{h} \cdot h^{\{ab\}} \cdot \partial_a X^\mu \cdot \partial_b X_\mu$
FPS modification: replace $\int d^2\sigma$ by discrete sum over FPS lattice sites
FPS UV cut-off: $k_{\text{max}} = \pi/\delta_{\text{ws}}$ replaces string length $l_s = 1/\sqrt{(2\pi T_s)}$
Correspondence: $\delta_{\text{ws}} \leftrightarrow l_s$ (FPS spacing = string length)
FPS punctures: string interactions (splitting/joining vertices)

4.5 Riemannian Manifolds: FPM Ricci Flow

The Ricci flow (Hamilton, Perelman) evolves a Riemannian metric according to $\partial g_{ij}/\partial t = -2R_{ij}$, smoothing curvature inhomogeneities over time. Perelman used it to prove the Poincaré conjecture. On a FPM, the Ricci flow must be modified to prevent puncture neighborhoods from collapsing to zero size:

Eq. (4.4) – FPM Puncture-Regulated Ricci Flow	
FPM Puncture-Regulated Ricci Flow:	
$\partial g_{ij}/\partial t = -2R_{ij} + \sum_n \kappa_n(t) \cdot f_\delta(x - p_n) \cdot g_{ij}$	
where the second term (Puncture Buffering) prevents collapse of δ -neighborhoods.	
Standard Ricci flow: recovered as $\delta \rightarrow 0$ (punctures shrink to IPM delta-functions)	
New result (FPM): for $\delta > 0$, the flow cannot develop finite-time singularities	
at puncture points — the δ -neighborhoods remain stable.	
Application:	smooth resolution of orbifold singularities in string
compactifications; FPM replaces orbifold fixed points.	

4.6 Knot Theory and Topological Quantum Computing

In topological quantum computing (Kitaev, Freedman), qubits are encoded in the braiding statistics of anyons — quasi-particles in 2D materials whose non-Abelian exchange generates topological quantum gates. In FPS language:

- Anyons = FPS punctures (finite-size quasi-particle defects with radius $\delta \sim$ lattice constant)
- Anyon braiding = holonomy of parallel transport around FPS punctures
- Non-Abelian statistics = non-Abelian holonomy group of the FPS connection
- Fault tolerance = topological protection, unchanged by continuous deformations of the braid path

By engineering all three components independently, one can design materials with unprecedented wave-control capabilities: for example, a material that transmits ($T = 1$) a specific frequency band, reflects ($F = 1$) another, and scatters indeterminately ($I = 1$) a third — all in the same physical structure.

5.2 FPW-Based Quantum Error Correction

Standard quantum error correction protects against bit-flip ($|0\rangle \rightarrow |1\rangle$) and phase-flip ($|+\rangle \rightarrow |-\rangle$) errors. The FPW Neutrosophic qubit introduces a third error type:

Eq. (5.1) – Neutrosophic FPW Qubit and Three Error Types	
Standard qubit:	$ \psi\rangle = \alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$ with $ \alpha ^2 + \beta ^2 = 1$
Neutrosophic FPW qubit:	$ \psi_N\rangle = T 0\rangle + I ?\rangle + F 1\rangle$
where $?\rangle =$ indeterminate state (neither $ 0\rangle$ nor $ 1\rangle$)	
Physical meaning: qubit fell into FPW I-zone (transition between lattice cells)	
Occurs when: qubit energy splitting \approx thermal energy (kT)	
FPW Error Types:	
Type 1 (bit-flip):	$ 0\rangle \rightarrow 1\rangle$ ($T \rightarrow F$)
Type 2 (phase-flip):	$ +\rangle \rightarrow -\rangle$ (phase rotation)
Type 3 (indeterminacy):	$ 0\rangle$ or $ 1\rangle \rightarrow ?\rangle$ (T or $F \rightarrow I$)
FPW error correction codes must include the $?\rangle$ syndrome to detect Type 3 errors.	

5.3 FPW Signal Processing: Beyond Nyquist

The Nyquist-Shannon sampling theorem requires sampling rate $\geq 2B$ for a signal of bandwidth B . The FPW provides both a physical implementation (lattice spacing δ gives natural sample rate $1/\delta$) and a beyond-Nyquist framework. Because the FPW sub-particle distribution is sparse (N sub-particles along a wave of length $L \gg N\delta$), compressed sensing techniques apply:

Eq. (5.2) – FPW Signal Processing and Compressed Sensing
FPW Nyquist frequency: $f_N = 1/(2\delta)$ (Brillouin zone boundary)
FPW signal capacity: $N = L/\delta$ sub-particles per wave of length L
Compressed sensing recovery (for sparse FPW):
Given M measurements ($M \ll N$), recover full $\{\varphi_k\}$ by solving:
$\min \ \varphi\ _1$ subject to $y = A \cdot \varphi$ and $M \geq C \cdot s \cdot \log(N/s)$
where s = number of non-zero sub-particles (sparsity)
A = measurement matrix (random projections of FPW)
Application: FPW-inspired compressed sensing algorithms that exploit the physical sparsity of sub-particle distributions.

5.4 FPW Cosmology: Dark Matter as FPW Solitons

If dark matter consists of FPW solitons — stable, localized excitations of a dark-sector FPW field — the dark matter particle mass is determined by the FPW spacing:

Eq. (5.3) – Dark Matter as FPW Solitons
FPW soliton mass: $m_{DM} = \hbar / (\delta_{dark} \cdot c)$
FPW soliton de Broglie wavelength: $\lambda_{dB} = \delta_{dark}$
Fuzzy dark matter (ultralight axions):
$m_{DM} \sim 10^{-22} \text{ eV} \rightarrow \delta_{dark} \sim \hbar c / m_{DM} \sim 1 \text{ kpc}$ (kiloparsec)
Standard WIMP dark matter:

$m_{DM} \sim 100 \text{ GeV} \rightarrow \delta_{dark} \sim hc/m_{DM} \sim 2 \times 10^{-18} \text{ m}$
FPW primordial power spectrum cut-off:
$P(k)$ has hard cut-off at $k_{max} = \pi/\delta_{dark}$
This suppresses power at large angular scales (low CMB multipoles)
– potentially explaining the observed low- l CMB power deficit.

5.5 Neural Networks as FPW: Spectral Bias

A deep neural network is, mathematically, a discrete function approximator on a finite lattice of neurons — a FPW of information processing. The FPW framework gives the spectral bias of neural networks a geometric interpretation:

Eq. (5.4) — Neural Network as FPW: Spectral Bias from FPW Dispersion
Neural network as FPW:
Network depth \leftrightarrow FPW lattice extent (number of sub-particles)
Network width \leftrightarrow number of parallel FPW channels
Activation function \leftrightarrow FPW nonlinear self-interaction $g \varphi_k ^2$
FPW dispersion \rightarrow Neural network spectral bias:
$\omega_{NN}(q) = (2J/\hbar)[1 - \cos(q\delta_{layer})]/\delta_{layer}^2$
where δ_{layer} = effective spacing between network layers
The neural network cannot represent frequencies above:
$f_{max} = 1/(2\delta_{layer})$ (FPW Nyquist limit of the network architecture)
Training the network changes δ_{layer} — it is a physical FPW renormalization
group flow: coarser \rightarrow finer lattice as training progresses.

5.6 FPM Lattice Cryptography

The most promising post-quantum cryptographic systems (CRYSTALS-Kyber, CRYSTALS-Dilithium, FALCON, NTRU) are based on the hardness of lattice problems – the Learning With Errors (LWE) problem and the Shortest Vector Problem (SVP) on integer lattices. These cryptographic lattices are FPMs: finite-dimensional integer lattices with spacing $\delta = 1$ (in normalized units). The FPM Neutrosophic Euler characteristic encodes the security parameters:

Eq. (5.5) – FPM Cryptographic Lattices: Neutrosophic Security Structure
Cryptographic FPM security structure:
$\chi_N(\text{crypto lattice}) = (T, I, F)$
T-component: lattice regularity (easy to solve \rightarrow large T \rightarrow insecure)
F-component: lattice irregularity (hard to solve \rightarrow large F \rightarrow secure)
I-component: LWE noise parameter e (indeterminate error added to lattice)
LWE problem: given $(A, b = As + e \text{ mod } q)$, find s
FPM interpretation: find the FPM puncture distribution $\{p_n = s_n\}$
given noisy measurements b at each FPM site
Security reduction: difficulty of SVP \leftrightarrow F-component magnitude of χ_N
New geometric tool: FPM topology may yield new hardness proofs or new attacks.

5.7 Biological Physics: FPS Membranes

The plasma membrane of a biological cell is a 2D fluid of lipid molecules with characteristic spacing $\delta \sim 0.8$ nm (lipid headgroup spacing) – a Finitesimally Punctured Surface. Membrane proteins are FPS punctures, and membrane dynamics are FPS wave modes:

Eq. (5.6) – Cell Membrane as FPS: Helfrich Mode Dispersion

Cell membrane as FPS:
$\delta = \text{lipid headgroup spacing} \approx 0.8 \text{ nm}$
Helfrich undulation mode dispersion (FPS modification):
$\omega(k) = \kappa_b \cdot k^2 \cdot [1 - (k\delta)^2/12] / \eta \quad \text{for } k\delta \ll 1$
$\omega_{\text{max}} = \kappa_b \cdot (\pi/\delta)^2 / \eta \quad \text{(FPS UV cut-off)}$
$\kappa_b = \text{bending rigidity} \approx 20 \text{ kT}$
$\eta = \text{membrane viscosity}$
Membrane protein = FPS puncture with curvature $\kappa_n > 0$:
Creates bound state (localized lipid depletion zone of radius $\sim \delta$)
Generates Aharonov-Bohm-type geometric phase for membrane waves
traveling around the protein — testable by single-molecule fluorescence.

6. The Grand FPW/FPS/FPM Correspondence Table

Table 1 summarizes the principal connections between the FPW/FPS/FPM program and established theories and applications, giving the FPW spacing δ where known.

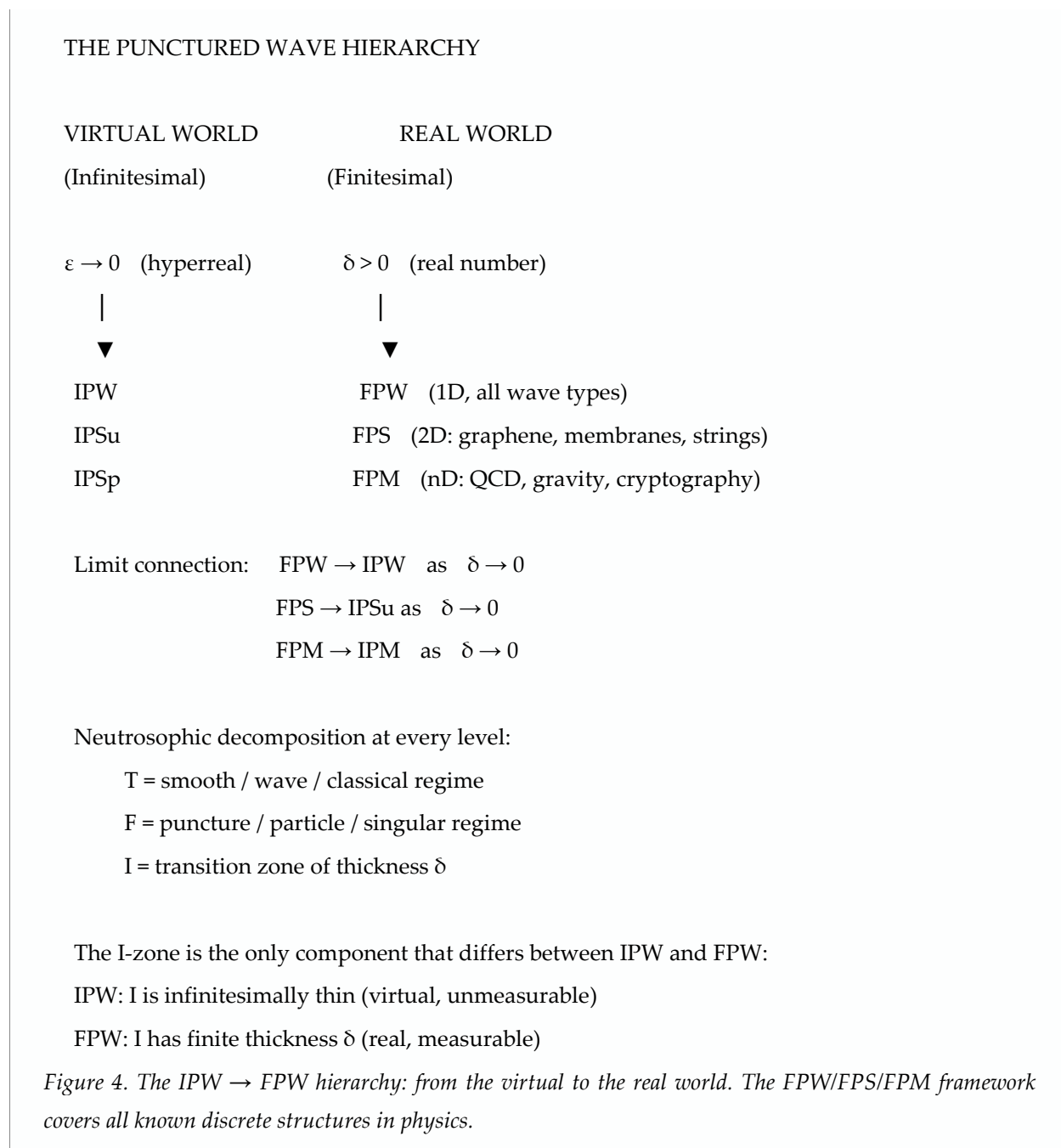
Domain	FPW/FPS/FPM Realization	δ Value	Key New Prediction
Crystal lattice (phonons)	FPW (1D phonons)	0.1 – 0.5 nm	Debye cut-off = FPW Brillouin zone; $\omega_{\text{max}} = v_s \cdot \pi/\delta$
Graphene / 2D materials	FPS (2D Dirac fermions)	0.14 nm	Defects = FPS punctures; bound states at defect sites
Lipid membrane	FPS (Helfrich modes)	0.8 nm	Undulation mode cut-off at $\omega_{\text{max}} = \kappa_b(\pi/\delta)^2/\eta$

Photonic crystal	FPW (photon modes)	100 – 500 nm	Photonic band gap = FPW Brillouin zone boundary
Josephson array	FPW (plasma waves)	1 – 10 μm	Plasma mode band structure; discrete Shapiro steps
Lattice QCD	FPM (4D spacetime)	$\sim 0.1 \text{ fm}$	Continuum limit = FPM $\delta \rightarrow 0$; fermion doubling = I-zone
Topological insulator	FPS (surface states)	Lattice constant	Chern number = F-component of $\chi_N(\text{FPS})$
Topological qubits	FPS (anyon braiding)	$\sim \text{nm}$	Braiding gate = FPS holonomy matrix; fault tolerance
Fuzzy dark matter	FPW (cosmological)	$\sim 1 \text{ kpc}$	Soliton mass $m \sim \hbar/(\delta c)$; CMB power cut-off at k_{max}
Loop quantum gravity	FPM (Planck lattice)	$l_P \approx 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}$	$\delta^2 = A_{\text{min}}(\text{LQG})$; GW dispersion $\Delta\omega/\omega \sim (k\delta)^2$
AdS/CFT holography	FPM (bulk AdS)	l_P or l_s	Holographic RG = FPM continuum limit $\delta \rightarrow 0$
String worldsheets	FPS (worldsheet CFT)	l_s (string length)	CFT UV cut-off = FPS Brillouin zone; vertices = punctures
Neural networks	FPW (signal processing)	Layer spacing	Spectral bias = FPW dispersion; training = RG flow
Lattice cryptography	FPM (integer lattice)	1 (normalized)	Security = F-component of χ_N ; LWE noise = I-component
Metamaterials	FPW/FPS (engineered)	Unit cell: $\text{nm} - \mu\text{m}$	Independent T, I, F control of wave response
Protein / drug binding	FPM (configuration space)	0.38 nm (amino acid)	Folding path = FPM geodesic; binding = FPW detection event

7. The Grand Unified Picture

The deepest implication of the FPW/FPS/FPM program is this: the distinction between "discrete" and "continuous" in physics is not ontological but scale-dependent. Every apparently continuous wave or

field is a FPW/FPS/FPM at some fundamental scale δ . The IPW is the mathematical ideal ($\delta \rightarrow 0$, the virtual world). The FPW/FPS/FPM is the physical reality ($\delta > 0$, the real world).



This means the FPW/FPS/FPM program is not proposing one new theory but a new meta-framework — a language in which all discrete structures in physics (crystals, lattices, graphs, spin networks, causal sets, neural networks, cryptographic lattices) are recognized as instances of the same geometric object (the FPM), and in which their common properties (Brillouin zones, topological invariants,

dispersion relations, UV cut-offs) follow from the same mathematical source: the FPM geometry and its Neutrosophic T-I-F decomposition.

8. Open Questions and Future Research Directions

The FPW/FPS/FPM program, while rich in connections and applications, raises many open questions that constitute a research agenda for the coming years:

1. The value of δ for fundamental particles. What is the FPW spacing δ for electrons, photons, and quarks? The FPW program predicts a modified electron g-factor: $g_{IPW} = g_{QED} + (\alpha/\pi)(\delta/l_C)^2$, where $l_C = \hbar/(mc)$ is the Compton wavelength. Current experimental limits suggest $\delta < 10^{-18}$ m. Next-generation Penning trap experiments may push this bound toward the classical electron radius $r_e \approx 2.8$ fm.
2. Deriving the Born rule from FPW first principles. Standard QM takes $P(x) = |\psi(x)|^2$ as a postulate. The FPW gives it a natural statistical interpretation (probability \propto sub-particle density), but a rigorous first-principles derivation — analogous to Everett's derivation in Many Worlds — remains open.
3. Extension to fermions and gauge fields. The DNLSE (Eq. 2.1) describes scalar (spin-0) fields. A FPW Dirac equation (for spin-1/2 fields) and a FPW Yang-Mills equation (for spin-1 gauge fields) need to be developed and studied for stability and phenomenological predictions.
4. FPS Ricci flow and topology change. Can the FPM puncture-regulated Ricci flow (Eq. 4.4) prove topological results beyond the Poincaré conjecture? In particular, can it handle manifolds with prescribed FPS singularity structures arising in string compactification?
5. Neutrosophic engineering of metamaterials. Can the three FPW components T, I, F be independently tuned in a physical metamaterial? What are the electromagnetic properties of a material with $I > T$ and $I > F$ — a predominantly indeterminate metamaterial?
6. FPW vacuum energy and the cosmological constant. The FPW vacuum is a sea of Planck-scale FPW fluctuations. The vacuum energy density is $\rho_{vac} \sim \hbar c/\delta^4$. For $\delta = l_P$ this gives $\rho_{vac} \sim \rho_{Planck}$ — the QFT prediction. For δ slightly larger than l_P (as the FPW allows), ρ_{vac} is suppressed, potentially addressing the cosmological constant problem.
7. FPW information theory and holography. The FPW sub-particle lattice has information capacity $N = L/\delta$ bits per unit length. This gives a 3D holographic bound (information \propto Volume/ δ^3) rather than the standard 2D Bekenstein-Hawking bound (\propto Area). Are these two bounds related? Can the FPW derive the Bekenstein-Hawking entropy from first principles?

8. FPS and FPM in machine learning. Can FPW-inspired neural network architectures — with explicit Brillouin zone boundaries and Neutrosophic T-I-F error types — outperform standard architectures on tasks requiring multi-scale or uncertainty-aware processing?

9. Conclusion

The Finitesimally Punctured Wave (FPW) — and its higher-dimensional generalizations FPS and FPM — constitutes a new meta-framework for discrete structures in physics and mathematics. Its central insight is simple and powerful: every apparently continuous wave or field conceals a discrete sub-structure at some scale $\delta > 0$, and this sub-structure is governed by the universal FPW dispersion relation and Neutrosophic T-I-F decomposition.

We have shown that the FPW/FPS/FPM program connects to an exceptionally broad range of established theories: condensed matter (crystal lattices, topological insulators, graphene), quantum field theory (lattice QCD, fermion doubling), quantum foundations (causal set theory, loop quantum gravity, non-commutative geometry, AdS/CFT), topology (Ricci flow, Chern-Weil theory, knot theory), signal processing (wavelet theory, compressed sensing), and computation (topological quantum computing, lattice cryptography, neural networks).

The program also opens entirely new application domains: Neutrosophically engineered metamaterials with independently controllable T-I-F wave response; FPW quantum error correction codes that handle indeterminacy errors in addition to bit- and phase-flip errors; FPW-inspired compressed sensing algorithms; FPW soliton dark matter models; and FPS descriptions of biological membranes and protein folding pathways.

The deepest philosophical point is that the FPW is not a new physical theory competing with quantum mechanics — it is a new ontological language for quantum mechanics. Every discrete structure in physics is already a FPW/FPS/FPM. The FPW framework simply makes this structure explicit, names it, equips it with a precise mathematical description and a Neutrosophic logical decomposition, and — by doing so — unifies a vast landscape of apparently disparate phenomena under a single conceptual roof.

From the virtual world to the real world — from ε to δ — the journey of the Punctured Wave program is, ultimately, the journey from the ideal to the measurable.

References

- [1] Smarandache, F. "The Infinitesimally Punctured Wave: A Corpuscular Visualisation of Wave-Particle Duality." *Neutrosophic Sets and Systems*, Vol. 97, 2026, pp. 704–708.
- [2] Smarandache, F. "Comparisons of IPW with Copenhagen and De Broglie-Bohm Interpretations, Neutrosophic QM, and Non-Linear Electromagnetics." *Neutrosophic Sets and Systems*, Vol. 98, 2026, pp. 85–92.
- [3] Smarandache, F. "Infinitesimally Punctured Wave and the Spectrum of Physical Waves." *Progress in Physics*, Vol. 22, 2026, pp. 18–24.
- [4] Smarandache, F. "Infinitesimally Punctured Physics and Extended Nonstandard Analysis." *Progress in Physics*, Vol. 22, 2026, pp. 34–42.
- [5] Smarandache, F. *From Infinitesimally Punctured Wave (IPW) to Finitesimally Punctured Wave (FPW)*. NSIA Publishing House, 2026. ISBN 978-1-59973-880-2.
- [6] Smarandache, F. *Infinitesimally Punctured Geometry*. NSIA Publishing House, 2026. ISBN 978-1-59973-863-5.
- [7] Smarandache, F. *Infinitesimally Punctured Physics*. NSIA Publishing House, 2026. ISBN 978-1-59973-855-0.
- [8] Connes, A. *Noncommutative Geometry*. Academic Press, 1994.
- [9] Maldacena, J. "The Large N Limit of Superstring Field Theories." *International Journal of Theoretical Physics*, 38, 1999, pp. 1113–1133.
- [10] Bombelli, L., Lee, J., Meyer, D., Sorkin, R.D. "Space-Time as a Causal Set." *Physical Review Letters*, 59(5), 1987, pp. 521–524.
- [11] Rovelli, C. *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2004.
- [12] Kitaev, A. "Fault-Tolerant Quantum Computation by Anyons." *Annals of Physics*, 303, 2003, pp. 2–30.
- [13] Hamilton, R.S. "Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature." *Journal of Differential Geometry*, 17, 1982, pp. 255–306.
- [14] Perelman, G. "The Entropy Formula for the Ricci Flow." *arXiv:math/0211159*, 2002.
- [15] Nielsen, H.B., Ninomiya, M. "Absence of Neutrinos on a Lattice." *Nuclear Physics B*, 185, 1981, pp. 20–40.
- [16] Castro Neto, A.H. et al. "The Electronic Properties of Graphene." *Reviews of Modern Physics*, 81, 2009, pp. 109–162.
- [17] Helfrich, W. "Elastic Properties of Lipid Bilayers." *Zeitschrift für Naturforschung*, 28c, 1973, pp. 693–703.

-
- [18] Candès, E.J., Tao, T. "Near-Optimal Signal Recovery from Random Projections." *IEEE Trans. Inf. Theory*, 52(12), 2006, pp. 5406–5425.
- [19] Lyubashevsky, V. et al. CRYSTALS-Dilithium Algorithm Specifications. NIST PQC Submission, 2022.
- [20] Robinson, A. *Non-Standard Analysis*. North-Holland, Amsterdam, 1966.
- [21] Zadeh, L.A. "Fuzzy Sets." *Information and Control*, 8, 1965, pp. 338–353.
- [22] Smarandache, F. *Neutrosophy: Neutrosophic Probability, Set, and Logic*. American Research Press, 1998.

All IPW/FPW resources freely available at: <https://fs.unm.edu/IPW/>



Article

Fuzzy and Neutrosophic Extensions of Gödel's Incompleteness Theorems

Florentin Smarandache^{1*}

¹ Emeritus Professor, Department of Mathematics & Sciences University of New Mexico, Gallup, NM 87301, USA, ,

<https://fs.unm.edu/IPW/>, e-mail: smarand@unm.edu

* Correspondence: e-mail: smarand@unm.edu

Received: 03, 19, 2026; *Accepted:* 03, 25, 2026

Abstract

This paper develops fuzzy and neutrosophic extensions of Gödel's incompleteness theorems based on graded and triadic self-reference. Starting from fuzzy and neutrosophic forms of the Liar Paradox — originally formulated by Florentin Smarandache — we construct generalized Gödel sentences through diagonalization in formal systems capable of encoding their own provability. In the fuzzy setting, incompleteness appears as nontrivial intermediate provability degrees: the Gödel sentence stabilizes at a truth degree $F \in (0,1)$ rather than collapsing to a binary undecidable. In the neutrosophic setting, incompleteness appears as an irreducible valuation $\langle T, I, F \rangle$ with simultaneous nonzero truth, indeterminacy, and falsehood components.

We formulate a Neutrosophic Self-Reference Stability Theorem (showing that continuous self-referential operators on the neutrosophic truth cube $[0,1]^3$ possess interior fixed points), a Neutrosophic Gödel Fixed-Point Theorem (specializing this result to Gödel sentences about provability), and a Contradictory-Theory Incompleteness Principle (extending the framework to domains containing competing theories). Geometric and dynamical interpretations in the neutrosophic truth cube are provided, together with applications to reasoning under inconsistency, knowledge fusion, artificial intelligence, quantum logic, and epistemology. The Smarandache Generalized Graded Incompleteness Principle unifies the classical, fuzzy, and neutrosophic cases under a single overarching statement.

Keywords: Gödel incompleteness; fuzzy logic; neutrosophic logic; liar paradox; self-reference; fixed-point theorem; neutrosophic truth cube; contradiction; paraconsistent logic; contradictory theories; dynamical self-reference.

1. Introduction

Gödel's incompleteness theorems (1931) remain among the most profound discoveries in mathematical logic. They show that any sufficiently expressive, consistent, recursively axiomatized formal system containing arithmetic must contain statements that are true but unprovable within the system (First Theorem), and that such a system cannot prove its own consistency (Second Theorem).

The classical construction proceeds through the Liar's Paradox: the sentence "This statement is false" generates an irresolvable loop. Gödel arithmetized this semantic self-reference by replacing truth with provability, constructing a sentence $G = \text{"This statement is not provable in } S."$ If G is provable, it is false; if G is unprovable, it is true. The system is therefore incomplete.

Classical incompleteness assumes a binary conception of truth and provability. Modern logical frameworks — including fuzzy logic (Zadeh, 1965) and neutrosophic logic (Smarandache, 1998) — admit richer truth structures. Fuzzy logic assigns each statement a truth degree $v(\varphi) \in [0,1]$. Neutrosophic logic assigns a triple $\langle T, I, F \rangle$ where T measures the degree of support, I the degree of indeterminacy, and F the degree of opposition, each in $[0,1]$ and logically independent.

This raises the natural question: how does Gödel-type incompleteness manifest in such systems? The answer is both structurally elegant and philosophically significant. In fuzzy systems, incompleteness becomes spectral rather than binary — the Gödel sentence occupies an interior point of the unit interval. In neutrosophic systems, incompleteness becomes volumetric — the Gödel sentence occupies an interior point of the unit cube $[0,1]^3$. Crucially, paradoxical self-reference need not always yield mere oscillation or inconsistency; in neutrosophic settings it may stabilize at interior truth states.

The paper is organized as follows. Section 2 reviews the classical background. Section 3 presents the Fuzzy and Neutrosophic Liar Paradoxes. Sections 4 and 5 develop the Fuzzy and Neutrosophic Gödel Incompleteness Theorems. Section 6 gives the Neutrosophic Self-Reference Stability Theorem. Section 7 gives the Neutrosophic Gödel Fixed-Point Theorem with proof sketch. Sections 8 and 9 provide geometric and dynamical interpretations. Section 10 states the Contradictory-Theory Incompleteness Principle. Section 11 gives the comparative structure. Section 12 develops applications and connections. Section 13 states the Smarandache Generalized Graded Incompleteness Principle. Section 14 concludes.

2. Classical Background and Preliminaries

2.1 Classical Gödel Incompleteness

Let T be a consistent, recursively axiomatized theory containing arithmetic. Gödel's construction uses arithmetization (Gödel numbering) to encode syntactic objects as natural numbers, enabling a formula to refer to its own proof-theoretic properties. The key result is the Diagonal Lemma: for any formula $\varphi(x)$ there exists a sentence G such that $T \vdash G \leftrightarrow \varphi(\ulcorner G \urcorner)$. Applying this to $\varphi(x) = \neg \text{Prov}_T(x)$ yields the Gödel sentence:

$$G \leftrightarrow \neg \text{Prov}_T(\ulcorner G \urcorner) \quad (\text{Classical Gödel sentence})$$

where $\ulcorner G \urcorner$ is the Gödel number of G and $\text{Prov}_T(x)$ is the provability predicate. If T is consistent, G is true but not provable in T ; if T is ω -consistent, $\neg G$ is likewise unprovable. Hence G is undecidable. Gödel's Second Theorem states that T cannot prove its own consistency $\text{Con}(T)$: a sufficiently strong system cannot prove its own sanity from within.

2.2 Fuzzy Logic

Fuzzy logic (Zadeh, 1965; Hájek, 1998) extends classical two-valued logic by assigning each formula φ a truth degree $v(\varphi) \in [0,1]$. Logical connectives are generalized via t-norms and t-conorms. Standard Zadeh negation gives:

$$v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$$

The unit interval $[0,1]$ replaces the Boolean set $\{0,1\}$, enabling graded representation of partial truth and partial falsity. This framework is a strict generalization of classical logic, which corresponds to the special case $v(\varphi) \in \{0,1\}$.

2.3 Neutrosophic Logic

Neutrosophic logic (Smarandache, 1998) assigns to each formula φ a triple:

$$\text{Val}(\varphi) = \langle T(\varphi), I(\varphi), F(\varphi) \rangle$$

where $T, I, F \in [0,1]$ and $T + I + F$ need not equal 1 (the components are logically independent). T measures truth support, I measures indeterminacy, and F measures falsity opposition. Neutrosophic negation exchanges truth and falsehood:

$$\text{Val}(\neg_n \varphi) = \langle F(\varphi), I'(\varphi), T(\varphi) \rangle$$

Fuzzy logic is a special case of neutrosophic logic (with $I = 0$ and $T + F = 1$), which in turn is a special case of the full neutrosophic framework where $T + I + F$ can range in $[0,3]$.

3. The Fuzzy and Neutrosophic Liar Paradoxes

The classical Liar Paradox — "This statement is false" — collapses into binary contradiction: if true, it is false; if false, it is true. This semantic self-reference inspired Gödel's syntactic construction. Smarandache extended both the Liar Paradox and its implications into graded logical frameworks.

The key relationship between the Liar Paradoxes and the Gödel constructions is this: the Liar Paradox is semantic self-reference (about truth); the Gödel sentence is syntactic self-reference (about provability). Once provability is substituted for truth in the graded frameworks, the Fuzzy and Neutrosophic Liar Paradoxes become the seeds of the corresponding Gödel constructions.

3.1 The Fuzzy Liar Paradox

Fuzzy Liar Paradox (Smarandache)

Statement: "This statement is partially false (F , where $0 < F < 1$)."

Analysis:

- If the statement is TRUE: it is partially false to degree F — self-consistent.
- If the statement is FALSE: it is partially true, with truth $T = 1 - F > 0$ — also self-consistent.

Unlike the classical liar (which oscillates without resolution), the fuzzy liar stabilizes at an intermediate value:

$$0 < F < 1 \quad (\text{Fuzzy liar fixed point})$$

Self-reference no longer generates contradiction but rather a fixed point of graded truth. The fuzzy liar is the semantic precursor to the Fuzzy Gödel sentence.

3.2 The Neutrosophic Liar Paradox

Neutrosophic Liar Paradox (Smarandache)

Statement: "This statement is neutrosophically false ($\langle T, I, F \rangle$, with $0 < F < 1$)."

Analysis:

- If the statement is TRUE $\langle T, I, F \rangle$: it is neutrosophically false, with $F > 0$.
- If the statement is FALSE $\langle F, I, T \rangle$ (where now truth = F, falsehood = T): it is neutrosophically true, with truth = $F > 0$.

In both cases the statement stabilizes at a triadic interior point:

$$\text{Val}(S) = (T, I, F), \text{ with } T > 0, I > 0, F > 0$$

The indeterminacy component I captures the irresolvable ambiguity that classical logic cannot represent. The neutrosophic liar is neither purely true nor purely false, and its indeterminacy is not merely epistemic ignorance but a genuine third truth-value.

4. Fuzzy Gödel Incompleteness Theorems

4.1 Fuzzy Formal Systems

A Fuzzy Formal System FS consists of: a language with well-formed formulas (wffs); a fuzzy provability function $\text{Prov}: \text{wff} \rightarrow [0,1]$ where $\text{Prov}(\varphi) = p$ means " φ is provable to degree p "; a fuzzy truth valuation $\text{Val}: \text{wff} \rightarrow [0,1]$; and a fuzzy consistency condition $\text{Prov}(\varphi) + \text{Prov}(\neg\varphi) \leq 1 + \varepsilon$ for some tolerance $\varepsilon \geq 0$. Classical negation is replaced by fuzzy negation $\text{Val}(\neg\varphi) = 1 - \text{Val}(\varphi)$ (Zadeh) or more generally $\text{Val}(\neg\varphi) = n(v)$ for a decreasing involution n .

4.2 Fuzzy Diagonal Lemma

Fuzzy Diagonal Lemma

For any formula $\varphi(x)$ in a fuzzy arithmetic theory T_f , there exists a sentence G_f such that:

$$T_f \vdash G_f \leftrightarrow \varphi(\ulcorner G_f \urcorner)$$

where the biconditional is interpreted under fuzzy equivalence. The proof follows the classical diagonalization argument since the construction is purely syntactic, independent of truth-value semantics.

4.3 The Fuzzy Gödel Sentence

Generalizing the Fuzzy Liar Paradox, construct the Fuzzy Gödel Sentence:

Fuzzy Gödel Sentence G_F

"The provability degree of this statement is F , where $0 < F < 1$."

$$Prov(G_F) = F$$

Analysis by cases:

Assumption	Consequence
$Prov(G_F) = 1$ (fully provable)	G_F is fully true, so $Prov(G_F) = F < 1$. Contradiction.
$Prov(G_F) = 0$ (fully unprovable)	G_F asserts $Prov(G_F) = F > 0$. Contradiction.
$Prov(G_F) = F$ (intermediate)	G_F is self-consistently provable to degree F — a fuzzy fixed point. ✓

4.4 First Fuzzy Gödel Incompleteness Theorem

Theorem 1: First Fuzzy Gödel Incompleteness Theorem

In any sufficiently expressive Fuzzy Formal System FS satisfying standard regularity conditions, there exists a sentence G_F such that $Prov(G_F)$ is neither 0 nor 1, but takes a value $F \in (0,1)$.

The system is fuzzily incomplete: G_F is provable only to an intermediate degree, and its negation $\neg G_F$ is provable to degree $1 - F \in (0,1)$. Neither is fully provable nor unprovable.

$$0 < Prov(G_F) < 1 \quad (\text{Fuzzy incompleteness condition})$$

Proof sketch. Applying the Fuzzy Diagonal Lemma, construct G_F so that $G_F \leftrightarrow \neg_f Prov(\ulcorner G_F \urcorner)$. If $Prov(G_F) = 1$, the right-hand side evaluates to 0, contradicting the biconditional. If $Prov(G_F) = 0$, the right-hand side evaluates to 1, also a contradiction. By continuity of the fuzzy connective, a fixed point must exist in the interior $(0,1)$. ■

Interpretation. Classical incompleteness is binary. Fuzzy incompleteness is spectral: incompleteness manifests as the impossibility of achieving provability degree 1 or 0 for certain self-referential sentences. This also yields the asymptotic principle:

$$v(G_F) > p_{\{T_f\}}(G_F)$$

meaning the truth degree of the Gödel sentence exceeds its provability degree. The system asymptotically approaches truth but cannot fully certify it.

4.5 Fuzzy Fixed-Point Theorem (General Form)

The sentence G_F is a fuzzy fixed point of the provability operator: there exists G_F such that $\text{Prov}(G_F) = f(\text{Prov}(G_F))$. For any continuous $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$, by the Brouwer Fixed-Point Theorem applied to $[0,1]$, there exists p^* such that $f(p^*) = p^*$.

Fuzzy Diagonal Lemma (General Form)

For any fuzzy predicate Φ with associated continuous function $f_\Phi: [0,1] \rightarrow [0,1]$,

$$\exists G \text{ such that } \text{Prov}(G) = f_\Phi(\text{Prov}(G))$$

This is the fuzzy analog of the classical Diagonal Lemma, grounded in the Brouwer Fixed-Point Theorem on $[0,1]$.

4.6 Second Fuzzy Gödel Theorem

Define the fuzzy consistency degree:

$$\text{Con}_F(FS) = 1 - \sup\{ \min(\text{Prov}(\varphi), \text{Prov}(\neg\varphi)) : \varphi \in FS \}$$

Theorem 2: Second Fuzzy Gödel Incompleteness Theorem

A sufficiently expressive Fuzzy Formal System FS cannot prove $\text{Con}_F(FS) = 1$ from within itself.

At best it can establish $\text{Prov}(\text{Con}_F(FS)) = c$ for some $c \in (0,1)$ — a partial self-trust:

$$p_{\{T_f\}}(\text{Con}_f(T_f)) < 1$$

This replaces the harsh classical "you cannot prove your own consistency" with: you can partially verify your own consistency, but never to full certainty from within. A rich fuzzy system may support its own consistency to some degree but not to absolute degree 1.

5. Neutrosophic Gödel Incompleteness Theorems

5.1 Neutrosophic Formal Systems

A Neutrosophic Formal System NS operates with: neutrosophic provability $\text{NeutProv}(\varphi) = \langle T, I, F \rangle$ where T = degree of provability, I = degree of indeterminate/undecidable provability, F = degree of disprovability, each in $[0,1]$; a neutrosophic negation $\text{NeutProv}(\neg\varphi) = \langle F, I, T \rangle$ (truth and falsehood swap); and a neutrosophic consistency condition generalizing fuzzy consistency.

5.2 Neutrosophic Diagonal Lemma

Neutrosophic Diagonal Lemma

For any neutrosophic formula $\varphi(x)$ in a neutrosophic arithmetic theory T_n , there exists G_n such that:

$$T_n \vdash G_n \leftrightarrow \varphi(\ulcorner G_n \urcorner)$$

where evaluation uses neutrosophic triples. The proof is syntactic and parallels the classical construction.

5.3 The Neutrosophic Gödel Sentence

Extending the Neutrosophic Liar Paradox to the syntactic setting, construct:

Neutrosophic Gödel Sentence G_N

"The neutrosophic provability of this statement is $\langle T, I, F \rangle$, with $0 < F < 1$."

$$G_n \leftrightarrow \neg_n \text{Prov}_{\{T_n\}}(\ulcorner G_n \urcorner)$$

Assumption	Consequence
$\text{NeutProv}(G_N) = \langle 1,0,0 \rangle$ (fully provable)	G_N is fully true, so $F > 0$ in its claim. Contradiction.
$\text{NeutProv}(G_N) = \langle 0,0,1 \rangle$ (fully disprovable)	Negation flips to $\langle 1,0,0 \rangle$, re-introducing truth. Contradiction.
$\text{NeutProv}(G_N) = \langle 0,1,0 \rangle$ (fully indeterminate)	G_N asserts $F > 0$; indeterminacy leaks into F. Partial contradiction.
$\text{NeutProv}(G_N) = \langle T,I,F \rangle$ with all > 0	Self-consistent neutrosophic fixed point. ✓

5.4 First Neutrosophic Gödel Theorem

Theorem 3: First Neutrosophic Gödel Incompleteness Theorem

In any sufficiently expressive Neutrosophic Formal System NS, there exists a sentence G_N such that $\text{NeutProv}(G_N) = \langle T, I, F \rangle$ with T, I, F all potentially nonzero. The system exhibits three-dimensional incompleteness: G_N is simultaneously partially provable ($T > 0$), partially undecidable ($I > 0$), and partially disprovable ($F > 0$).

$$\text{Val}(G_n) = (T_G, I_G, F_G), \text{ with } T_G > 0, I_G > 0, F_G > 0$$

Proof sketch. Construct G_N via the Neutrosophic Diagonal Lemma. Pure truth $\langle 1,0,0 \rangle$ is unstable: if G_N is fully provable, its content introduces counter-support. Pure falsehood $\langle 0,0,1 \rangle$ is unstable: the negation yields full truth, reintroducing a truth component. Pure indeterminacy $\langle 0,1,0 \rangle$ is unstable given the non-collapse assumption. Therefore no classical extreme is stable, and the system must assign G_N an interior triple. ■

Key distinction from classical Gödel: in the classical case, undecidability is binary — the statement is neither provable nor disprovable. In the neutrosophic case, indeterminacy I is a primitive, irreducible component: $I > 0$ captures statements that are in principle not resolvable, not merely currently unresolved.

5.5 Second Neutrosophic Gödel Theorem

Define neutrosophic consistency: $\text{NeutCon}(NS) = \langle T_c, I_c, F_c \rangle$ where T_c = degree of consistency, I_c = degree of indeterminate consistency, F_c = degree of inconsistency.

Theorem 4: Second Neutrosophic Gödel Incompleteness Theorem

A sufficiently expressive Neutrosophic Formal System NS cannot internally prove $\text{NeutCon}(NS) = \langle 1,0,0 \rangle$. The best achievable internal certification has $I_c > 0$, reflecting an irreducible uncertainty about the system's own consistency — not merely ignorance, but ontological indeterminacy:

$$\text{NeutCon}(NS) = \langle T_c, I_c, F_c \rangle \text{ with } I_c > 0$$

This is philosophically stronger than the classical second theorem: classical Gödel says you cannot know you are consistent; neutrosophic Gödel says consistency itself is not a fully determined property of the system.

6. Neutrosophic Self-Reference Stability Theorem

We now treat self-reference dynamically. Let $N = [0,1]^3$ denote the neutrosophic truth cube, and let f be the evaluation operator induced by a self-referential sentence S .

$$S \leftrightarrow \Phi(S), \quad f : N \rightarrow N$$

Repeated evaluation produces an iteration sequence:

$$X_{\{n+1\}} = f(X_n), \quad \text{where } X_n = (T_n, I_n, F_n)$$

Theorem 5 (Neutrosophic Self-Reference Stability)

If f is continuous and maps $N = [0,1]^3$ into itself, then there exists at least one fixed point $X^* = (T^*, I^*, F^*)$ such that $f(X^*) = X^*$.

If the classical extreme states are unstable under the self-reference dynamics, then at least one fixed point lies in the interior of N :

$$0 < T^* < 1, \quad 0 < I^* < 1, \quad 0 < F^* < 1$$

Proof. Continuity of f on the compact convex set $[0,1]^3$ guarantees, by the Brouwer Fixed-Point Theorem, the existence of at least one fixed point. The instability of the extreme classical vertices (which follows from the self-referential dynamics) forces the fixed point away from the boundary into the interior. ■

Interpretation. Classical liar-type paradoxes oscillate between truth and falsity without settling. In a neutrosophic setting, the same self-reference may converge to a stable interior equilibrium — a sentence that is simultaneously partially true, partially false, and partially indeterminate, without contradiction. Paradox is transformed into a stable logical object.

7. Neutrosophic Gödel Fixed-Point Theorem

Theorem 5 concerns self-reference in general. The following theorem specializes it to Gödel sentences about provability, and is the central result of the paper.

Let $f: [0,1]^3 \rightarrow [0,1]^3$ be the self-reference operator induced by evaluating a sentence S through the clause $S \leftrightarrow \neg_n \text{Prov}(S)$. The input triple represents the current neutrosophic valuation of S ; the output triple is the valuation generated after one step of neutrosophic provability evaluation.

Theorem 6 (Neutrosophic Gödel Fixed-Point Theorem)

Assume that: (i) the operator f is continuous on $[0,1]^3$;

(ii) the extreme classical points are unstable under the self-reference dynamics;

(iii) the provability operator is non-collapse (does not force every self-referential sentence to a boundary valuation).

Then there exists at least one fixed point $X^* = \langle T^*, I^*, F^* \rangle$ such that $X^* = f(X^*)$.

Under assumptions (ii) and (iii), at least one such fixed point lies in the interior:

$$X^* = f(X^*), \text{ with } X^* = (T^*, I^*, F^*), T^* > 0, I^* > 0, F^* > 0$$

Proof sketch. (1) Construct G_n via the Neutrosophic Diagonal Lemma so that G_n refers to its own neutrosophic provability. This is a syntactic step independent of semantics. (2) The semantic state of G_n lies in $N = [0,1]^3$. The self-referential evaluation defines $f: N \rightarrow N$. (3) By the Brouwer Fixed-Point Theorem (continuity on compact convex set), f has at least one fixed point. (4) Instability of boundary and non-collapse assumptions together force the fixed point into the interior. ■

Interpretation. The classical Gödel sentence is undecidable. The fuzzy Gödel sentence is graded (interior of $[0,1]$). The neutrosophic Gödel sentence is an interior equilibrium of the cube — supported to some degree, opposed to some degree, and still partially indeterminate. This is a stable logical object, not a pathology.

Connection to Lawvere's Theorem (1969): in any cartesian closed category, if there is a surjective morphism $A \rightarrow A^A$, then every endomorphism of A has a fixed point. This categorical result unifies Cantor's theorem, Gödel's incompleteness, and the halting problem. The fuzzy and neutrosophic fixed-point results correspond to enriched variants of Lawvere's theorem in categories enriched over $([0,1], \geq, \otimes)$ with t-norm \otimes .

8. Geometric Interpretation: The Neutrosophic Truth Cube

Neutrosophic truth values $\langle T, I, F \rangle$ admit a natural geometric interpretation in three-dimensional space. The unit cube $[0,1]^3$, with axes T (truth), I (indeterminacy), and F (falsity), is the neutrosophic truth space C.

Logical State	Coordinates in C	Logical Meaning
Classical True	(1, 0, 0)	Fully proven, no uncertainty
Classical False	(0, 0, 1)	Fully disproven, no uncertainty
Fully Indeterminate	(0, 1, 0)	Entirely unknown or neutral
Fuzzy States	(T, 0, 1-T), line segment	1D subset of C: fuzzy logic
Neutrosophic Gödel Point	(T_G, I_G, F_G) – interior	Self-referential equilibrium

Classical truth values occupy the vertices of C. Fuzzy logic occupies a line segment (the T-axis face diagonal, since $T + F = 1$ and $I = 0$). Neutrosophic logic fills C freely, with all three components independent.

A neutrosophic Gödel sentence appears as an interior point of C. This geometric picture captures in one image what is conceptually central: incompleteness is not merely a missing decision. It becomes the emergence of interior truth states — stable logical equilibria in three-dimensional logical space.

9. Dynamical Interpretation and Logical Trajectories

Self-reference can be studied dynamically. Define $X_n = (T_n, I_n, F_n)$ as the neutrosophic truth state of a sentence after the n-th evaluation of its provability. The iteration is:

$$X_{\{n + 1\}} = f(X_n)$$

Starting from any initial guess X_0 , the trajectory traces a path in C. Three regimes are possible: (1) oscillation — truth and falsity alternate, approximating the classical liar as a limit; (2) convergence to an interior fixed point — paradox resolves into a stable triadic equilibrium; (3) complex triadic motion. The philosophically most significant case is (2), where self-reference stabilizes rather than explodes.

Example convergent trajectory:

Example trajectory converging to interior equilibrium

$$(1, 0, 0) \rightarrow (0.6, 0.1, 0.3) \rightarrow (0.4, 0.2, 0.4) \rightarrow (0.33, 0.34, 0.33) = \textit{stable}$$

This logical wave interpretation parallels physical wave behavior: the truth triple $\langle T, I, F \rangle$ functions as an amplitude vector in logical space. Classical logic "collapses the wave" to a vertex. Neutrosophic logic allows the wave to stabilize at a superposition of logical states — a further resonance with quantum mechanical analogies developed in Section 12.5.

10. Contradictory-Theory Incompleteness Principle

Many real bodies of knowledge are not merely incomplete but internally conflicting. Scientific models, data sources, legal frameworks, and interpretive traditions may support incompatible conclusions while none can be cleanly discarded. This motivates a stronger principle that extends the purely formal Gödel theorems to the domain of competing theories.

Principle: Contradictory-Theory Incompleteness (Smarandache)

Whenever a sufficiently rich formal environment admits multiple partially incompatible subsystems whose claims can be represented in a common neutrosophic language, the joint environment necessarily generates sentences whose valuations lie in the interior of the truth cube C . Contradiction plus self-reference yields mixed logical states that cannot be reduced to classical truth values.

This principle is not a celebration of contradiction. Rather, it provides a structured way to represent unresolved conflict. A sentence supported by one subsystem and opposed by another is a mathematically meaningful interior state in a three-dimensional logical space — not noise, but a formal object with measurable T, I, F coordinates.

The principle connects logical incompleteness with contradictory theories in science, technology, culture, literature, and art. A claim may be partially supported by one theory, partially opposed by another, and partly unresolved by available evidence — making it precisely a Gödel-type interior point of the neutrosophic truth cube. This provides a formal bridge between the foundational results of this paper and the broader program of neutrosophic applications.

11. Comparative Structure: Classical, Fuzzy, and Neutrosophic

Feature	Classical	Fuzzy	Neutrosophic
Truth values	{0, 1}	[0, 1]	$[0,1]^3$ (T, I, F)
Gödel sentence	Undecidable (binary)	Partially provable (degree F)	Triple-valued (T, I, F)
Incompleteness type	Absolute gap	Spectral gap	Volumetric gap
Consistency statement	Unprovable	Partly provable ($c < 1$)	Irreducible $I_c > 0$
Fixed-point guarantee	Gödel Diagonal Lemma	Brouwer on [0,1]	Brouwer on $[0,1]^3$
Negation	$\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$ flips {0,1}	$v \leftrightarrow 1-v$	$\langle T,I,F \rangle \leftrightarrow \langle F,I,T \rangle$
Logical space	0-dim (2 points)	1-dim (interval)	3-dim (cube)
Liar Paradox	Irresolvable oscillation	Fixed point in (0,1)	Interior fixed point in $(0,1)^3$

12. Applications and Connections

12.1 Connections to Mathematical Logic

Paraconsistent Logic. Priest's LP and dialetheism allow true contradictions. The neutrosophic framework is a quantified dialetheism: contradictions are not merely permitted but measured. The I-component absorbs what dialetheism handles by brute acceptance. The framework is thereby paraconsistent by construction.

Many-Valued Logics (Łukasiewicz, Kleene, Gödel). Łukasiewicz's three-valued logic has values {0, ½, 1}; Kleene's has {F, U, T}; Gödel's many-valued logics provide a hierarchy of truth. The fuzzy and neutrosophic frameworks are continuous generalizations. The Fuzzy Gödel theorem subsumes what would happen to incompleteness under Łukasiewicz provability.

Non-Standard Analysis. Robinson's infinitesimals suggest provability degrees of the form $F = \epsilon$ (infinitesimally small) or $F = 1 - \epsilon$ (infinitesimally close to full provability) — a refined fuzzy spectrum near the classical endpoints, connecting the present work to the IPW/FPW program of infinitesimal and finitesimal structures.

12.2 Computability Theory

Fuzzy Turing Machines. A Fuzzy Turing Machine (FTM) has transition functions valued in [0,1]. The Fuzzy Halting Problem asks: what is the degree to which a given FTM halts? The Fuzzy Gödel

theorem implies this degree is generically in $(0,1)$ for self-referential programs — not a clean undecidability, but a graded undecidability.

Neutrosophic Computability. A Neutrosophic Turing Machine has transition triples $\langle T, I, F \rangle$. The halting predicate becomes neutrosophically valued. The Second Neutrosophic Gödel Theorem corresponds to the undecidability of the neutrosophic halting problem: we cannot fully certify $(T=1, I=0, F=0)$ whether the machine halts. This is a structural deepening of the Turing-Gödel connection.

12.3 Set Theory

Fuzzy ZFC. Replace binary membership $x \in S$ with graded membership $\mu_S(x) \in [0,1]$. The Fuzzy Continuum Hypothesis asks: is there a fuzzy cardinality strictly between \aleph_0 and 2^{\aleph_0} ? This is not decidable to degree 1 within Fuzzy ZFC — a fuzzy analog of Cohen's independence results.

Neutrosophic Russell Paradox. The set $R_N = \{x : \text{NeutMembership}(x,x) = \langle T,I,F \rangle \text{ with } F > 0\}$ generalizes the Neutrosophic Liar into set theory. The paradox resolves at an interior fixed point $\langle T^*, I^*, F^* \rangle$ via Theorem 5, rather than generating an explosion — a precise illustration of how the Neutrosophic Self-Reference Stability Theorem handles paradox in practice.

12.4 Artificial Intelligence

Fuzzy Expert Systems. An expert system with fuzzy rule weights will contain rules whose confidence is self-referentially stuck at an intermediate value. Fuzzy Gödel provides the theoretical foundation for this irreducible epistemic limitation.

Uncertainty Quantification in Neural Networks. The Fuzzy Gödel phenomenon may underlie irreducible epistemic uncertainty in deep learning: certain self-referential queries (e.g., "How confident is this model in its own confidence estimates?") cannot achieve calibrated certainty — not due to lack of data, but due to structural incompleteness.

Neutrosophic AI and Self-Correcting Systems. An AI system equipped with neutrosophic logic can handle Gödelian loops gracefully: instead of crashing on a self-referential paradox, it assigns the paradox a triple $\langle T, I, F \rangle$ with I dominant, treats it as a known indeterminate state (the Axiom of Neutrosophic Recognition), and continues functioning. This turns a "system crash" into a "logical pause." Theorem 5 provides the formal guarantee that such stable indeterminate states exist.

Reasoning over Contradictory Knowledge Bases. When a knowledge base is assembled from multiple conflicting sources, the Contradictory-Theory Incompleteness Principle (Section 10) provides a formal justification for representing some propositions as interior points of the truth cube rather than forcing a binary verdict. Multi-source evidence fusion and scientific theory comparison are natural application domains.

12.5 Physics and Quantum Mechanics

Quantum Logic. Birkhoff-von Neumann quantum logic replaces classical Boolean logic with the lattice of closed subspaces of a Hilbert space. Quantum probabilities are naturally in $[0,1]$, making Fuzzy Gödel directly relevant. Quantum systems cannot fully self-measure (the measurement problem) — a physical instantiation of Fuzzy incompleteness.

Quantum Superposition Analogy. A quantum state $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ is a superposition of basis states. Similarly, a neutrosophic truth value $\langle T, I, F \rangle$ is a logical superposition. Probability amplitude corresponds to truth degree; measurement corresponds to logical decision; wavefunction collapse corresponds to classical binary evaluation. Neutrosophic Gödel sentences are logical analogs of quantum superpositions that resist full collapse — precisely what Theorem 6 makes rigorous.

The Penrose-Lucas Argument. Penrose argued that Gödel's theorem implies human minds transcend computation. The Fuzzy Gödel framework softens this: minds may operate with graded provability, making the argument a matter of degree rather than a sharp transcendence claim.

12.6 Philosophy and Epistemology

Degrees of Knowability. Classical Gödel creates an absolute wall between knowable and unknowable. Fuzzy Gödel replaces this wall with a gradient — statements are knowable to varying degrees. This resonates with fallibilist epistemology (Peirce, Popper) and coherentist theories of justification.

Neutrosophic Epistemology. The triple $\langle T, I, F \rangle$ mirrors three epistemic stances: belief (T), suspension of judgment (I), and disbelief (F). The Neutrosophic Gödel theorem states: in any sufficiently rich epistemic system, there exist propositions toward which no agent can fully collapse their epistemic triple to $\langle 1,0,0 \rangle$ or $\langle 0,0,1 \rangle$.

Buddhist Logic (Catuskoṭi) and Non-Western Traditions. Ancient Indian logic employed a fourfold system: True, False, Both, Neither. The neutrosophic I-component provides a formal mathematical home for the "Both/Neither" states. Eastern concepts of Sunyata (Emptiness) and Mu correspond to the indeterminacy dimension — the logical void that classical systems cannot represent.

Connection to Wittgenstein. Wittgenstein's hinge propositions — statements that cannot be doubted within a language game but also cannot be fully justified — are candidates for G_F or G_N : their "provability" within the system is self-referentially fixed at an intermediate neutrosophic value, stabilized by Theorem 5 or 6.

13. Smarandache Generalized Graded Incompleteness Principle

All results of this paper can be unified under a single overarching principle:

Smarandache Generalized Graded Incompleteness Principle

Any sufficiently expressive formal system that internalizes its own provability generates self-referential statements whose semantic/proof-theoretic status cannot be completely represented by a bivalent partition. The residual status appears as either:

(a) a degree of truth/provability in the fuzzy case, yielding spectral incompleteness:

$$0 < p(G_f) < 1$$

(b) a truth-indeterminacy-falsehood triple in the neutrosophic case, yielding volumetric incompleteness:

$$T_G > 0, I_G > 0, F_G > 0$$

The meta-systemic progression is:

The dimensionality progression of truth space

Classical Liar → *Fuzzy Liar* → *Neutrosophic Liar*

Classical Gödel → *Fuzzy Gödel* → *Neutrosophic Gödel*

1 – dimensional logic → *2 – dimensional logic* → *3 – dimensional logic*

Each step increases the dimensionality of the truth space and replaces a categorical impossibility with a structured, measurable logical state. Classical incompleteness is a wall. Fuzzy incompleteness is a gradient. Neutrosophic incompleteness is a volume — a rich three-dimensional landscape of mixed logical states that can be analyzed geometrically, dynamically, and applied practically.

14. Conclusion

This paper has developed fuzzy and neutrosophic extensions of Gödel's incompleteness theorems, grounded in the Fuzzy and Neutrosophic Liar Paradoxes formulated by Smarandache. The main results are:

- Theorem 1 (First Fuzzy Gödel): In any sufficiently expressive fuzzy formal system, there exists a sentence G_F with $0 < \text{Prov}(G_F) < 1$ — incompleteness is spectral rather than binary.
- Theorem 2 (Second Fuzzy Gödel): A fuzzy formal system cannot certify its own consistency to full provability degree 1.
- Theorem 3 (First Neutrosophic Gödel): In any sufficiently expressive neutrosophic formal system, there exists G_N with $\text{NeutProv}(G_N) = \langle T, I, F \rangle$, all components positive — incompleteness is volumetric and triadic.
- Theorem 4 (Second Neutrosophic Gödel): A neutrosophic formal system cannot certify its own consistency as $\langle 1, 0, 0 \rangle$; the indeterminacy component $I_c > 0$ is irreducible.
- Theorem 5 (Neutrosophic Self-Reference Stability): Continuous self-referential operators on $[0, 1]^3$ possess interior fixed points when boundary states are unstable — paradox becomes a stable logical object.
- Theorem 6 (Neutrosophic Gödel Fixed-Point): Under continuity and non-collapse conditions, Gödel sentences about provability stabilize at interior fixed points of the neutrosophic truth cube.

The key conceptual advance is that Gödel incompleteness is no longer merely a negative result. In fuzzy and neutrosophic frameworks, it becomes a positive structural feature: the system generates well-defined mixed logical states with measurable degrees of support, opposition, and indeterminacy. The Neutrosophic Self-Reference Stability Theorem further shows that paradox itself — in a rich enough logical setting — need not be destructive; it can settle into a stable equilibrium.

Future work should address: (1) exact axioms for neutrosophic arithmetic; (2) formal neutrosophic proof calculi satisfying the continuity and non-collapse conditions of the theorems; (3) computational implementations in graded theorem provers and neutrosophic AI reasoning systems; (4) deeper connections between logical dynamics in the neutrosophic truth cube and quantum measurement; and (5) a follow-up paper on "Neutrosophic Self-Reference Stability and Fixed Points of Logical Paradox" developing the dynamical analysis in fuller generality.

Gödel found the hole. Turing showed we cannot build a bridge over it. The fuzzy and neutrosophic frameworks show that we can measure the hole itself — and that what lives in its interior is not emptiness but a stable, structured, three-dimensional logical state.

References

- [1] Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik, 38, 173–198.

-
- [2] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.
- [3] Hájek, P. (1998). *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [4] Smarandache, F. (1998). *Neutrosophy: Neutrosophic Probability, Set, and Logic*. Rehoboth, NM: American Research Press.
- [5] Smarandache, F. (2003). *A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic (3rd ed.)*. Rehoboth, NM: American Research Press.
- [6] Priest, G. (2006). In *Contradiction: A Study of the Transconsistent (2nd ed.)*. Oxford: Oxford University Press.
- [7] Lawvere, F. W. (1969). Diagonal arguments and cartesian closed categories. *Lecture Notes in Mathematics*, 92, 134–145. Springer.
- [8] Birkhoff, G., & von Neumann, J. (1936). The logic of quantum mechanics. *Annals of Mathematics*, 37(4), 823–843.
- [9] Penrose, R. (1989). *The Emperor's New Mind*. Oxford: Oxford University Press.
- [10] Hofstadter, D. R. (1979). *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. New York: Basic Books.
- [11] Lucas, J. R. (1961). Minds, machines and Gödel. *Philosophy*, 36(137), 112–127.
- [12] Robinson, A. (1966). *Non-Standard Analysis*. Amsterdam: North-Holland.
- [13] Wittgenstein, L. (1969). *On Certainty* (G. E. M. Anscombe & G. H. von Wright, Eds.). Oxford: Blackwell.
- [14] Papadimitriou, C. H. (1994). *Computational Complexity*. Reading, MA: Addison-Wesley.

All resources freely available at: <https://fs.unm.edu/>



Article

Neurosophic partial derivative with two variables

by AH-Isometry

Ahmed Hatip¹, Taqi-Aldin Alkhatib^{2,*}

¹ Department of Mathematics, Gaziantep University, Turkey, e-mail: Kollnaar5@gmail.com

² Department of Mathematics, Faculty of Science, Aleppo University, Syria, e-mail: taaqimath@e-mail.com

* Correspondence: e-mail: taaqimath@e-mail.com

Received: 02, 20, 2026; Accepted: 03, 25, 2026

Abstract:

This paper introduces a rigorous formulation of the neurosophic partial derivative as a natural extension of the classical notion of partial differentiation. The principal difficulty in this context arises from the indeterminate nature of the neurosophic component which lacks a fixed numerical value and therefore obstructs a direct analytical definition. To overcome this obstacle, we employ a one-dimensional isometric transformation that preserves distances while mapping the problem into a classical analytical framework. This transformation enables a simplified treatment within classical logic, after which the results are consistently transferred back to the neurosophic setting. The proposed approach provides a coherent and mathematically sound methodology for defining and analyzing neurosophic partial derivatives.

Keywords: Neurosophic Partial derivative, isometric transformation, Neurosophic logic.

1. Introduction

Neurosophic logic, introduced by Florentin Smarandache, was proposed as a comprehensive mathematical framework for modeling uncertainty, indeterminacy, and inconsistency beyond the capabilities of classical and fuzzy logics [1]. Within this framework, Smarandache defined the standard form of neurosophic real numbers and established the necessary conditions for the existence of division between two neurosophic real numbers [2]. Subsequently, in 2013, he introduced the concepts of neurosophic integration and mereo-integrals, together with neurosophic analogues of classical notions such as limits, continuity, derivatives, and integrals [3].

Further developments in neurosophic analysis include applications of neurosophic triplet groups to physics [4], as well as numerous studies that significantly expanded the theoretical foundations and applications of neurosophic mathematics [5]. Owing to the central role of calculus in

mathematical analysis, Smarandache later presented the fundamentals of neutrosophic pre-calculus and neutrosophic calculus, focusing on the study of neutrosophic functions and their properties [6–7].

In a related direction, Ahmed Hatip introduced the concept of special neutrosophic functions, defining new classes of functions within neutrosophic logic. As particular cases, he proposed neutrosophic versions of the floor (greatest integer) function, the absolute value function, and the signum function [8]. Despite these advances, defining derivatives—especially partial derivatives—in the neutrosophic setting remains a challenging problem due to the inherent indeterminacy of the neutrosophic component.

Motivated by this challenge, the present work adopts a geometric perspective based on isometric transformations to establish a consistent definition of the neutrosophic partial derivative. **2.**

Preliminaries

2.1 Neutrosophic Real Number [2]

Suppose that u is a neutrosophic number, then it takes the following standard form: $u = u_1 + u_2I$ where u_1, u_2 are real coefficients, and I represent indeterminacy, such $0.I = 0$ and $In = I$, for all positive integers n .

2.2 Definition [9]

Let $R(I) = \{a + bI ; a, b \in R\}$ where $I^2 = I$ be the neutrosophic field of reals. The one-dimensional Isometry (AH-Isometry) is defined as follows:

$$T: R(I) \rightarrow R \times R$$

$$T(a + bI) = (a, a + b)$$

2.3 Remark [9]

T is an algebraic isomorphism between two rings, it has the following properties:

- 1) T is bijective.
- 2) T preserve addition and multiplication, i.e:

$$T[(a + bI) + (c + dI)] = T(a + bI) + T(c + dI)$$

$$T[(a + bI). (c + dI)] = T(a + bI). T(c + dI)$$

- 3) Since T is bijective, then it is invertible by:

$$T^{-1}: R \times R \rightarrow R(I) , \quad T^{-1}(a, b) = a + (b - a)I$$
- 4) T preserves distance, i.e.: The distance on $R(I)$ can be defined as follows:

Let $A = a + bI$, $B = c + dI$ be two neutrosophic real numbers, then:

$$\|\overline{AB}\| = |a - c| + I[|a + b - c - d| - |a - c|].$$

On the other hand, we have:

$$T(\|\overline{AB}\|) = \|T(\overline{AB})\|.$$

This implies that distance is preserved up to isometry. i.e. $\|T(AB)\| = T(\|AB\|)$

2.4 Definition [10]

Let $f: R(I) \rightarrow R(I)$; $f = f(X)$ and $X = x_1 + x_2I \in R(I)$ the f is called a neutrosophic real function with one neutrosophic variable.

A neutrosophic real function $f(X)$ written as follows:

$$f(X) = f(x_1 + x_2I) = f(x_1) + I[f(x_1 + x_2) - f(x_1)]$$

2.5 Theorem [11]

Any neutrosophic real function into two classical real functions, i.e., to the classical Euclidean plane $R \times R$.

Proof: Let $f(X) = f(x_1 + x_2I) = f(x_1) + I[f(x_1 + x_2) - f(x_1)]$ a neutrosophic real function.

Now, using the one-dimensional AH-isometry, we have:

$$\begin{cases} f_1 = f(x_1) \\ f_2 = f(x_1 + x_2) \end{cases}$$

The functions (x_1) , $f(x_1 + x_2)$ are real functions.

2.6 Definition:

Let $(X,Y):R(I) \times R(I) \rightarrow R(I) \times R(I)$; $X = x_1 + x_2I, Y = y_1 + y_2I \in R(I)$ the f is called a neutrosophic real function with two neutrosophic variable, and we can written as follows:

$$f(X,Y) = f(x_1 + x_2I, y_1 + y_2I) = f(x_1, y_1) + I[f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) - f(x_1, y_1)]$$

3. Neutrosophic Partial derivative:

In this section we define Neutrosophic Partial derivative with two neutrosophic variable.

3.1 Definition:

Let $f(X,Y) = f(x_1 + x_2I, y_1 + y_2I) = f(x_1, y_1) + I[f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) - f(x_1, y_1)]$ a neutrosophic function on $R(I) \times R(I)$, then we define a neutrosophic partial derivative with two neutrosophic variable $f(X,Y)$ as follows:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = f_x = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{f(X + \Delta X, Y) - f(X, Y)}{\Delta X} \tag{1}$$

Where $X = x_1 + x_2I, Y = y_1 + y_2I \in R(I)$, then:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = f_x = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, y_1) - f(x_1, y_1)}{\Delta x_1} + I \left[\frac{\lim_{\Delta(x_1+x_2) \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + x_2 + \Delta(x_1 + x_2), (y_1 + y_2)) - f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}{\Delta(x_1 + x_2)}}{\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, y_1) - f(x_1, y_1)}{\Delta x_1}} \right] \tag{2}$$

Take AH-Isometry for (2), we have:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = f_{x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, y_1) - f(x_1, y_1)}{\Delta x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial (x_1 + x_2)} = f_{(x_1 + x_2)} = \lim_{\Delta(x_1 + x_2) \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + x_2 + \Delta(x_1 + x_2), (y_1 + y_2)) - f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}{\Delta(x_1 + x_2)} \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial (x_1 + x_2)}$ are two partial derivative classical.

Now we take invertible AH-Isometry, we have a neutrosophic partial derivative:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = f_x = T^{-1} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial (x_1 + x_2)} \right] = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, y_1) - f(x_1, y_1)}{\Delta x_1} + I \left[\frac{\lim_{\Delta(x_1+x_2) \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + x_2 + \Delta(x_1 + x_2), (y_1 + y_2)) - f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}{\Delta(x_1 + x_2)}}{\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, y_1) - f(x_1, y_1)}{\Delta x_1}} \right] = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{f(X + \Delta X, Y) - f(X, Y)}{\Delta X}$$

3.2 Definition:

Let $f(X,Y) = f(x_1 + x_2I, y_1 + y_2I) = f(x_1, y_1) + I[f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) - f(x_1, y_1)]$ a neutrosophic function on $R(I) \times R(I)$, then we define a neutrosophic partial derivative with two neutrosophic variable $f(X,Y)$ as follows:

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = f_y = \lim_{\Delta Y \rightarrow 0} \frac{f(X, Y + \Delta Y) - f(X, Y)}{\Delta Y} \tag{3}$$

Where $X = x_1 + x_2I, Y = y_1 + y_2I \in R(I)$, then:

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = f_y = \lim_{\Delta y_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, y_1 + \Delta y_1) - f(x_1, y_1)}{\Delta y_1} +$$

$$I \left[\frac{\lim_{\Delta(y_1+y_2) \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + \Delta(y_1 + y_2)) - f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}{\Delta(y_1 + y_2)}}{\lim_{\Delta y_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, y_1 + \Delta y_1) - f(x_1, y_1)}{\Delta y_1}} \right] \tag{4}$$

Take AH-Isometry for (4), we have:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_1} = f_{y_1} = \lim_{\Delta y_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, y_1 + \Delta y_1) - f(x_1, y_1)}{\Delta y_1} \\ \frac{\partial f}{\partial (y_1 + y_2)} = f_{(y_1+y_2)} = \lim_{\Delta(y_1+y_2) \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + \Delta(y_1 + y_2)) - f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}{\Delta(y_1 + y_2)} \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial y_1}$, $\frac{\partial f}{\partial (y_1+y_2)}$ are two partial derivative classical.

Now we take invertible AH-Isometry, we have a neutrosophic partial derivative:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial Y} = f_Y &= T^{-1} \left[\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial (y_1 + y_2)} \right] \\ &= \lim_{\Delta y_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, y_1 + \Delta y_1) - f(x_1, y_1)}{\Delta y_1} + I \left[\frac{\lim_{\Delta(y_1+y_2) \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + \Delta(y_1 + y_2)) - f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}{\Delta(y_1 + y_2)}}{\lim_{\Delta y_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, y_1 + \Delta y_1) - f(x_1, y_1)}{\Delta y_1}} \right] \\ &= \lim_{\Delta Y \rightarrow 0} \frac{f(X, Y + \Delta Y) - f(X, Y)}{\Delta Y} \end{aligned}$$

3.3 Remark:

Let $f(X, Y) = f(x_1 + x_2I, y_1 + y_2I) = f(x_1, y_1) + I[f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) - f(x_1, y_1)]$ a neutrosophic function on $R(I) \times R(I)$, then a neutrosophic partial derivative with two neutrosophic variables $f(X, Y)$:

$$1) \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = f_{XX} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{f_X(X+\Delta X, Y) - f_X(X, Y)}{\Delta X} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f_{x_1}(x_1+\Delta x_1, y_1) - f_{x_1}(x_1, y_1)}{\Delta x_1} +$$

$$I \left[\frac{\lim_{\Delta(x_1+x_2) \rightarrow 0} \frac{f_{(x_1+x_2)}(x_1 + x_2 + \Delta(x_1 + x_2), (y_1 + y_2)) - f_{(x_1+x_2)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}{\Delta(x_1 + x_2)}}{\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f_{x_1}(x_1 + \Delta x_1, y_1) - f_{x_1}(x_1, y_1)}{\Delta x_1}} \right] \tag{5}$$

$$2) \frac{\partial f}{\partial Y} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} = f_{YY} = \lim_{\Delta Y \rightarrow 0} \frac{f_Y(X, Y+\Delta Y) - f_Y(X, Y)}{\Delta Y} = \lim_{\Delta y_1 \rightarrow 0} \frac{f_{y_1}(x_1, y_1+\Delta y_1) - f_{y_1}(x_1, y_1)}{\Delta y_1} +$$

$$I \left[\frac{\lim_{\Delta(y_1+y_2) \rightarrow 0} \frac{f_{(y_1+y_2)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + \Delta(y_1 + y_2)) - f_{(y_1+y_2)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}{\Delta(y_1 + y_2)}}{\lim_{\Delta y_1 \rightarrow 0} \frac{f_{y_1}(x_1, y_1 + \Delta y_1) - f_{y_1}(x_1, y_1)}{\Delta y_1}} \right] \tag{6}$$

$$3) \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} = f_{YX} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{f_Y(X+\Delta X, Y) - f_Y(X, Y)}{\Delta X} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f_{y_1}(x_1+\Delta x_1, y_1) - f_{y_1}(x_1, y_1)}{\Delta x_1} +$$

$$I \left[\frac{\lim_{\Delta(x_1+x_2) \rightarrow 0} \frac{f_{(y_1+y_2)}(x_1+x_2+\Delta(x_1+x_2), (y_1+y_2)) - f_{(y_1+y_2)}(x_1+x_2, y_1+y_2)}{\Delta(x_1+x_2)}}{\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f_{y_1}(x_1+\Delta x_1, y_1) - f_{y_1}(x_1, y_1)}{\Delta x_1}} \right] \quad (7)$$

$$4) \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial Y \partial X} = f_{XY} = \lim_{\Delta Y \rightarrow 0} \frac{f_X(X, Y+\Delta Y) - f_X(X, Y)}{\Delta Y} = \lim_{\Delta y_1 \rightarrow 0} \frac{f_{x_1}(x_1, y_1+\Delta y_1) - f_{x_1}(x_1, y_1)}{\Delta y_1} +$$

$$I \left[\frac{\lim_{\Delta(y_1+y_2) \rightarrow 0} \frac{f_{(x_1+x_2)}(x_1+x_2, y_1+y_2+\Delta(y_1+y_2)) - f_{(x_1+x_2)}(x_1+x_2, y_1+y_2)}{\Delta(y_1+y_2)}}{\lim_{\Delta y_1 \rightarrow 0} \frac{f_{x_1}(x_1, y_1+\Delta y_1) - f_{x_1}(x_1, y_1)}{\Delta y_1}} \right] \quad (8)$$

4. Example:

Find f_X a Neutrosophic partial derivative using by definition:

$$f(X, Y) = XY^2 + X^2Y$$

Sol: let $X = x_1 + x_2I, Y = y_1 + y_2I \in R(I)$, then:

$$f(X, Y) = x_1y_1^2 + x_1^2y_1 + I \left[\frac{(x_1+x_2)(y_1+y_2)^2 + (x_1+x_2)^2(y_1+y_2)}{(x_1y_1^2 + x_1^2y_1)} \right] \quad (9)$$

Now take AH-Isometry for (9), we have:

$$f(x_1, y_1) = x_1y_1^2 + x_1^2y_1 \quad (10)$$

$$f(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)^2 + (x_1+x_2)^2(y_1+y_2) \quad (11)$$

By using definition 3.1 on (10):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_{x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1+\Delta x_1, y_1) - f(x_1, y_1)}{\Delta x_1}$$

$$f(x_1+\Delta x_1, y_1) - f(x_1, y_1) = (x_1+\Delta x_1)y_1^2 + (x_1+\Delta x_1)^2y_1 - x_1y_1^2 - x_1^2y_1$$

$$= x_1y_1^2 + \Delta x_1y_1^2 + x_1^2y_1 + 2x_1\Delta x_1y_1 + (\Delta x_1)^2y_1 - x_1y_1^2 - x_1^2y_1$$

$$= \Delta x_1y_1^2 + 2x_1\Delta x_1y_1 + (\Delta x_1)^2y_1 = \Delta x_1(y_1^2 + 2x_1y_1 + \Delta x_1y_1) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_{x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1(y_1^2 + 2x_1y_1 + \Delta x_1y_1)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} (y_1^2 + 2x_1y_1 + \Delta x_1y_1) = y_1^2 + 2x_1y_1$$

By using definition 3.1 on (11):

$$\frac{\partial f}{\partial (x_1+x_2)} = f_{(x_1+x_2)} = \lim_{\Delta(x_1+x_2) \rightarrow 0} \frac{f(x_1+x_2+\Delta(x_1+x_2), (y_1+y_2)) - f(x_1+x_2, y_1+y_2)}{\Delta(x_1+x_2)}$$

$$f(x_1+x_2+\Delta(x_1+x_2), (y_1+y_2)) - f(x_1+x_2, y_1+y_2)$$

$$= (x_1+x_2+\Delta(x_1+x_2))(y_1+y_2)^2 + (x_1+x_2+\Delta(x_1+x_2))^2(y_1+y_2) - (x_1+x_2)(y_1+y_2)^2$$

$$- (x_1+x_2)^2(y_1+y_2)$$

$$\begin{aligned}
 &= (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)^2 + \Delta(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)^2 + (x_1 + x_2)^2(y_1 + y_2) + \\
 &2(x_1 + x_2)\Delta(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (\Delta(x_1 + x_2))^2(y_1 + y_2) - (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)^2 - (x_1 + x_2)^2(y_1 + y_2) \\
 &= \Delta(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)^2 + 2(x_1 + x_2)\Delta(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (\Delta(x_1 + x_2))^2(y_1 + y_2) \\
 &= \Delta(x_1 + x_2)[(y_1 + y_2)^2 + 2(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + \Delta(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)] \Rightarrow \\
 &\frac{\partial f}{\partial(x_1 + x_2)} = f_{(x_1+x_2)} \\
 &= \lim_{\Delta(x_1+x_2) \rightarrow 0} \frac{\Delta(x_1 + x_2)[(y_1 + y_2)^2 + 2(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + \Delta(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)]}{\Delta(x_1 + x_2)} \\
 &= \lim_{\Delta(x_1+x_2) \rightarrow 0} [(y_1 + y_2)^2 + 2(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + \Delta(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)] \Rightarrow \\
 &\frac{\partial f}{\partial(x_1 + x_2)} = f_{(x_1+x_2)} = (y_1 + y_2)^2 + 2(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)
 \end{aligned}$$

Now, take invertible AH-Isometry, we have a neutrosophic partial derivative:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial X} = f_X &= T^{-1} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial(x_1 + x_2)} \right] = T^{-1} [y_1^2 + 2x_1y_1, (y_1 + y_2)^2 + 2(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)] \\
 &= y_1^2 + 2x_1y_1 + I \left[\begin{matrix} (y_1 + y_2)^2 + 2(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \\ (y_1^2 + 2x_1y_1) \end{matrix} \right] = Y^2 + 2XY
 \end{aligned}$$

5. Conclusion:

In this paper, we employed a one-dimensional AH-isometry to investigate the algebraic direct image of the classical partial derivative. By analyzing this image within the transformed classical framework, we were able to construct a well-defined notion of the neutrosophic partial derivative.

The results demonstrate that geometric transformations, particularly isometric transformations, are not merely auxiliary techniques but can serve as fundamental methodological tools in neutrosophic analysis. This approach lays a solid foundation for further developments in neutrosophic pre-calculus and neutrosophic calculus, and it opens new avenues for addressing complex analytical problems involving uncertainty and indeterminacy.

References

[1] Smarandache, F., "A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic", Preface by Charles Le, American Research Press, Rehoboth, 1999, 2000. Second edition of the Proceedings of the First International Conference on Neutrosophy, Neutrosophic Logic, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability and Statistics, University of New Mexico, Gallup, 2001.

[2] Smarandache F. Neutrosophic Precalculus and Neutrosophic calculus, University of New Mexico, 705 Gurley Ave. Gallup, NM 87301, USA, 2015.

[3] Smarandache F. Neutrosophic Measure and Neutrosophic Integral , In Neutrosophic Sets and Systems, 3 – 7, Vol. 1, 2013.

- [4] M. Abdel-Basset; G. Gunasekaran Mohamed; G. Abdullah. C. Victor, "A Novel Intelligent Medical Decision Support Model Based on soft Computing and Iot" IEEE Internet of Things Journal, Vol. 7, (2019).
- [5] Sankari, H., and Abobala, M., "Neutrosophic Linear Diophantine Equations With two Variables", Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 38, pp. 22-30, 2020.
- [6] F. Smarandache, Neutrosophic Precalculus and Neutrosophic Calculus, Brussels: EuropaNova, 2015.
- [7] F. Smarandache, Introduction To Neutrosophic Measure, Neutrosophic Integral, And Neutrosophic Probability, Craiova-Ohio: Sitech - Education , 2013.
- [8] A. Hatip, "The Special Neutrosophic Functions," International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), p. 13, 12 May 2020.
- [9] M. Abobala and A. Hatip, "An Algebraic Approach to Neutrosophic Euclidean Geometry" Neutrosophic sets and systems, Vol. 43, pp. 114 123, 2021.
- [10] Salama, A, Aswad, M. and Dallah, R, "A Study of Derivative and Integration a Neutrosophic Functions", Journal of Neutrosophic and Fuzzy Systems, Vol. 05, No. 02, pp. 33-37, 2023.
- [11] Zeina, M. B., and Abobala, M., "A Study of Neutrosophic Real Analysis by Using the one-Dimensional Geometric AH-Isometry", Galoistica Journal of Mathematical Structures And Applications, Vol. 03, 2023.
- [12] Şahin, M., Olgun, N., Kargın, A., & Uluçay, V. (2018). Isomorphism theorems for soft G-modules. Afrika Matematika, 29(7), 1237-1244.
- [13] Yetkin, E., & Olgun, N. (2011). Direct product of fuzzy groups and fuzzy rings. In Int. Math. Forum (Vol. 6, No. 21, pp. 1005-1015).
- [14] Olgun, N., & Çelik, M. (2019). Neutrosophic triplet R-module. Neutrosophic Triplet Research, 1, 35-42.



Article

نحو تأصيل أدب الرياضيات كجنس أدبي مستحدث

Towards the Foundation of Mathematical Literature as an
Emerging Literary GenreA.A. Salama^{1,*}

¹ Professor of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Port Said University, Egypt., e-mail: drsalama44@gmail.com

* Correspondence: e-mail: drsalama44@gmail.com

Received: 03, 14, 2026; Accepted: 03, 25, 2026

المخلص:

تتوخى هذه الورقة البحثية رصد ملامح ولادة جنسٍ أدبيٍّ ومعرفيٍّ مستحدث، وسمناه بأدب الرياضيات ؛ وهو تيارٌ رائد يسعى إلى فضِّ الاشتباك التقليدي وتجاوز الثنائية المزمّنة بين (صرامة الرقم) و(سيولة الحرف). ينطلق البحث من فرضية استراتيجية مفادها أن اللغة العربية، في جوهرها البنيوي وإعجازها البياني، ليست مجرد أداة للتعبير الوجداني، بل هي (منظومة منطقية) متكاملة تتقاطع في إحداثياتها مع قوانين الرياضيات العليا، والتبولوجيا، والمنطق النيتروسوفيكي الحديث الذي يمنح النص أبعاداً ثلاثية (الصدق، الكذب، والحياد)

تهدف الدراسة إلى تأصيل آليات (أنسنة الرموز)؛ عبر استنطاق المصطلحات الرياضية الجافة من مصفوفاتٍ ودوالٍ وخوارزميات وتحويلها إلى كائناتٍ بلاغية نابضة بالحياة، وإعادة تدويرها كاستعاراتٍ وصورٍ جمالية تعكس تعقيدات النفس البشرية وتقلبات الواقع الاجتماعي. كما تستعرض الورقة كيف يساهم هذا المنهج في (عصرنة) لغة الضاد، وجعلها شريكاً فاعلاً في صياغة العقل الرقمي، مستندةً في ذلك إلى المنجز البحثي للمؤلف في تفكيك شفرات الأدب العربي من الجاهلية إلى الحداثة (عبد الخالق سلامة وآخرون، 2025)، حيث يتم تطويع (التضاريس التبولوجية) لخدمة (مجرات النص)

إن هذا البحث ليس مجرد محاولة لدمج علمين، بل هو دعوةٌ لاستعادة وحدة المعرفة العربية القديمة برؤية استشرافية، وتقديم (خوارزمية أدبية) قادرة على قراءة الوجود برؤية هندسية نيتروسوفيقية، تُثبتُ أن الكلمة في محرابنا هي 'المعادلة'، وأن الصدق هو 'الحل الأوحده' والمطلق في مصفوفة الحياة المتغيرة.

الكلمات المفتاحية: أدب الرياضيات، المنطق النيتروسوفيكي، التبولوجيا اللغوية، أنسنة الرموز، مصفوفة القيم، قانون الإزاحة، هندسة الكلمة، الثوابت والمتغيرات.

Abstract: This research paper aims to monitor the features of an emerging literary and cognitive genre, which we have termed '**Mathematical Literature.**' It is a pioneering movement that seeks to resolve the traditional conflict and transcend the chronic duality between the '**rigidity of the number**' and the '**fluidity of the letter.**' The research stems from a strategic hypothesis that the Arabic language, in its structural essence and rhetorical brilliance, is not merely a tool for emotional expression, but rather a comprehensive '**logical system**' that intersects in its coordinates with the laws of higher mathematics, topology, and modern **Neutrosophic Logic**, which endows the text with three-dimensional values (**Truth, Falsehood, and Indeterminacy**)..

The study aims to establish the mechanisms of '**humanizing symbols**' by interrogating dry mathematical terms such as matrices, functions, and algorithms and transforming them into vibrant rhetorical entities. These are recycled as metaphors and aesthetic images reflecting the complexities of the human soul and the fluctuations of social reality. Furthermore, the paper demonstrates how this approach contributes to the '**modernization**' of the Arabic language (Lughat al-Dad), making it an active partner in shaping the digital mind. This is supported by the author's research achievements in decoding Arabic literature from the Pre-Islamic era to modernity (Abdel-Khalek Salama et al., 2025), where '**topological terrains**' are harnessed to serve '**textual galaxies.**'

This research is not merely an attempt to merge two sciences, but rather a call to restore the unity of ancient Arabic knowledge through a visionary lens. It presents a '**literary algorithm**' capable of reading existence through a Neutrosophic-geometric vision, proving that the word in our sanctuary is the '**Equation**' and that truth is the '**Unique Solution**' and the absolute in the changing matrix of life.

Keywords: Literature of mathematics, Neutrosophic logic, Linguistic topology, Humanization of symbols, Matrix of values, Law of displacement, Word geometry, Constants and variables.

1. المقدمة: (جَدَلِيَّةُ الرُّقْمِ وَالْحَرْفِ.. مِعْرَاجُ نَحْوِ التَّكَامُلِ النِّيْتْرُوسُوفِيكِيِّ):

لطالما استقرَّ في الوعي الثقافي التقليدي أنَّ الرياضيات والآداب نقيضان لا يجتمعان؛ فبينما رآها البعض لغَةً جافَةً قوامها اليقِينُ الصارم والرموزُ الصامتة، نُظِرَ إلى الأدب كبحرٍ لَجِيٍّ من العواطف والسيولة اللغوية التي تأبى القيد. إلا أنَّ المتأمل في تاريخ الحضارة العربية الكبرى يدرك أنَّ هذا الفصل ما هو إلا عارضٌ طارئٌ غَيَّبَ شمسَ (المثقف الموسوعي)؛ ذلك الذي كان يرى في النظم الشعري هندسةً تتوخى الدقة، وفي المعادلة الجبرية بلاغةً ومنطقاً يفيضُ بالجمال.

إنَّ مشروعَ الموسوم بأدب الرياضيات (ليس مجردَ محاولةٍ لكسرِ رتابةِ الأرقام، بل هو استعدادٌ واعية لمركزية العقل العربي في عصر الرقمنة، وإحياءً لوحدة المعرفة عبر بوابة 'التوبولوجيا النيتروسوفيكية' (عبد الخالق سلامة، 2025). نحن اليوم أمام ضرورةٍ حضاريةٍ تحتمُّ علينا إعادة صياغة علاقتنا باللغة بوصفها (خوارزمية إلهية) قادرةً على برمجة الوعي الإنساني؛ فإذا كانت الرياضيات هي 'لغة الكون' التي كتب بها الخالقُ الوجود، فإنَّ اللغة العربية هي 'مصنوفةُ البيان' التي استوعبت أسرارَ ذلك الوجود بإعجازٍ رياضيٍّ فريد.

تأتي هذه الورقة لتردم تلك الفجوة المعرفية، وتطرح رؤيةً ابتكاريةً تجعلُ من (المصنوفة) فضاءً للقيم، ومن (الدالة) مساراً للوجود، ومن (الجبر) وسيلةً لترميم انكسارات النفس والروح. إننا لا نُقحمُ العلمَ على الأدب إقحاماً، بل نكشفُ عن (التناظر الكامن) بينهما؛ حيث لا تبلغُ القصيدةُ ذروة تجليها إلا حين تنضبُ بإيقاع المنطق، ولا تكتملُ المعادلةُ في أسْمَى غاياتها إلا حين تفيضُ بروح الجمال، وهو ما أثبتناه واقعاً في تحليلِ جمالياتِ النصوص الوجدانية والرواية (سلامة وآخرون، 2025)

ومن خلال هذا البحث، سنبحرُ في إحدائيات هذا الفنّ المستحدث، مستعرضين كيف يمكن لـ (هندسة الكلمة) أن تُحوّل الرمز الجاف إلى كائن شاعري نابض، يُسهم في عصرنة الخطاب الأدبي العربي وتطوير أدواته النقدية، ليبقى قادراً على المنافسة والخلود في محراب الثورة التكنولوجية والمعرفية المعاصرة.

2. الإطار النظري (القيم المتغيرة والثوابت الأخلاقية.. نحو منطقة الاستعارة):

يقوم مشروع (أدب الرياضيات) على رؤية فلسفية تعتبر أن النص الأدبي هو (نظام حركي الدلالة) (يمكن نمذجته رياضياً، وأن البلاغة ليست مجرد زينة لفظية عارضة، بل هي) (خوارزمية إقناع) (عقلية ووجدانية محكمة. وفي هذا السياق المنهجي، تتشكل الركائز النظرية لهذا الطرح عبر المفاهيم التالية:

أولاً: الاستعارة الرياضية وأنسنة الرمز (Mathematical Metaphor & Symbol Humanization):

إذا كان الأدب التقليدي قد استمدّ صورته من الطبيعة والمحسوسات، فإن (أدب الرياضيات) يذهب بعيداً نحو (المجردات العلمية) (ليعيد صياغتها وجدانياً. فالمصفوفة (Matrix) هنا لا تُعامل كجدول أرقام صامت، بل كإطار تنظيمي للعلاقات الإنسانية والاجتماعية؛ حيث يمثل كل عنصر فيها (فرداً) يتفاعل داخل مصفوفة القيم (Matrix of Values) ليؤثر في ناتج المنظومة الكلية. إننا نمح الرمز حياة؛ ليصبح 'جبر الكسور' تعبيراً بليغاً عن مداواة جراح الروح، وتصبح 'القيمة المطلقة' رمزاً للثبات المبدئي الذي لا تكسره إشارات السالب من الظروف المحيطة (سلامة، 2026)

ثانياً: المنطق النيتروسوفيكي.. معراج الحرف من صرامة الرّم إلى رحابة النص:

يُعدُّ المنطق النيتروسوفيكي حجر الزاوية والرّكيزة الفلسفية التي شيّدنا عليها محرّابنا في استنطاق المسكوت عنه داخل النصّ الأدبي؛ فمن خلال مشوره نتحلّل من قيود الثنائيات الضيقة (الصدق والكذب) لنبحر في فضاء 'الثلاثية المعرفية' الفسيح، الذي يتناغم فيه الاتساق مع الغموض والمفارقة في وحدة عضوية فريدة. إن هذا المنهج، الذي استلهمنا نواته وبذرنا بذوره الأولى في مرّجنا العالمي الصادر عن دار النشر التعليمية بأوهايو: (Neutrosophic Science and its Applications)، هو الذي منحنا مفتاح قراءة الدلالات بوصفها 'أنظمة ذكية'، وهو ما تجلّى في أبعده حين فككنا شفرات 'خارطة الدلالة' في عالم محمود درويش الشعري (2025)

إن مشروع 'أدب الرياضيات' الذي نتبناه لا يرتضي البقاء في زوايا التنظير المجرد، بل هو ثمرة مخاض بحثي وتطبيقي ممتد، عكفنا فيه على تطويع رصانة 'النيتروسوفيك' لخدمة الجمال الفكري الإنساني. لقد صقلنا أبحاثنا الرائدة (جامعة البعث، 2017-2019) حول المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية ملامح هذا المنجز، وصولاً إلى تطبيقات النمذجة الاستراتيجية التي جسّدناها في 'شجرة القرارات بميناء قناة السويس' (2021) ولم يقف هذا المدّ المعرفي عند عتبات البحث الأصيل، بل بسطّ أشرعه ليقود حركة ترجمة علمية كبرى، نقلنا من خلالها كنوز البروفيسور (فلورنتن سمارانداكي) إلى جياض اللسان العربي؛ لاسيما في مشارب التفاضل والتكامل والإحصاء والقياس النيتروسوفيكي. إن هذا الرصيد المعرفي المتكامل هو الذي مهّد لنا الطريق لنعبر بالكلمة من 'قوالب الرموز الصماء' إلى فضاءات 'المعنى الأدبي' الفسيحة؛ حيث تنمهي هندسة الأرقام مع سحر البلاغة، وتتحول النصوص إلى فضاءات هندسية لامتناهية تتسع لليقين والحياد على حدّ سواء.

ثالثاً: التحويل الدالي وتبولوجيا المعنى.. نحو هندسة روحية للنص:

في محراب (أدب الرياضيات)، نُعيد صياغة الرؤية للكلمة الأدبية؛ فلا ننظر إليها كقالب لغوي ساكن، بل بوصفها (دالة) (Function) - حيوية تربط بين مدارات المشاعر وفضاءات الأفكار. إن المحرك اللغوي في نصوصنا يعمل عبر (تحويل دالي) (دقيق، ينقل القيم الروحية من تجريدها الوجداني إلى سلوكيات إنسانية ملموسة. ومن هذا المنطلق الفلسفي، نحثنا مقولتنا الكبرى: 'الكرسي دالة لخبينة'؛ حيث يغدو (المنصب) هو 'المتغير' الذي يؤول بالذات البشرية إلى كشف حقيقتها التوبولوجية المستترة. هذا التزاوج الفريد يمنح النصّ دقة علمية تزيد من جلاله الأدبي ولا تخدش رفته (سلامة وآخرون، 2025)

ويستندُ هذا الطرحُ إلى معمارٍ إبداعيّ رصين، شَيَّدناه عبر مسارٍ تطبيقيٍّ ممتد، عكفنا فيه على سُبُر أغوار الأدب العربيّ وتفكيكٍ شفراته من العصر الجاهليّ وصولاً إلى مرافئ الحداثة، كما تجسّد في سِفْرنا 'لغزُ الخلود (2025)'، ودراستنا الميدانية 'تضاريسُ المعنى ومجراتُ النص' في التوبولوجيا النيوتروسوفيكية. إنَّ هذا المنجزَ يرتكزُ على نتاجٍ إبداعيٍّ دافقٍ يتجاوزُ السبعينَ نصاً منشوراً في كبرى الدوريات العربية (2025-2026)؛ حيثُ صَهَرنا فيها فلسفةَ 'الكلمةِ معادلةٍ'، لتتجلّى حقيقةً واقعةً في ملاحمِ 'ديوانِ الأدبِ الرياضي' و'عالمِ روايةِ 'ظلالِ اليقين'؛ حيثُ الرقْمُ نبضٌ، والمعادلةُ قصيدةٌ تُحيي ما اندثر من يقين.

رابعاً: الهندسةُ الهيكليّةُ ومصفوفةُ الثوابتِ.. بناءُ اليقينِ في عصرِ السُّبُوْلَةِ:

في معمارِ (أدب الرياضيات)، لا ينهضُ النصُّ على عفويةِ خاطرٍ فحسب، بل يُشَيِّدُ وفقَ (إحداثياتٍ هندسيةٍ) صارمةٍ ومحكمةٍ؛ حيثُ تُمثّلُ عتباتُ النصِّ ومقدماتهُ 'نقطةَ الأصلِ' التي منها ينبثقُ الوجودُ البياني، لتتشكّلَ النتائجُ في ختامه ك (نهاياتٍ) Limits – منطقيةٍ حتميةٍ يؤوّلُ إليها مصبُ السياق. إنَّ هذا البناءُ الهندسيُّ هو الضامنُ الأوحدُ لتماسكِ الوحدةِ الموضوعية، لتغدو القصيدةُ بُنيةً متكاملةً الأركان، لا يقبلُ معمارها حذفَ لبنةٍ أو إزاحةَ رمزٍ دونَ أن تختلَّ (المعادلةُ الفنيةُ) الكلية.

وفي خضمِّ 'عصرِ السبولة' الذي تلاطمت أواجهه، يبرزُ مشروعنا ليعليّ من شأنِ (الثابتِ الأخلاقي) بوصفه قيمةً إيمانيةً مُطلقةً لا تقبلُ القسمةَ على التجزئةِ أو التنازل. إننا نسعى من خلالِ هذا التأسيسِ إلى تحقيقِ (الاتزان المنطقي) للفردِ والمجتمعِ على حدٍّ سواء؛ ليكونَ هذا 'الثابتُ' هو الركيزةُ الراسخةُ التي تحفظُ توازنَ الإنسانِ في مواجهةِ المتغيراتِ العاصفة، وتحوّلُ النصِّ الأدبيِّ من مجردِ كلماتٍ عابرةٍ إلى مصفوفةٍ يقينٍ صلبةٍ في وجهِ الانكسار.

3. المَحَاوِرُ التَّطْبِيقِيَّةُ (تفكيكُ الشفراتِ وهندسةُ النبض):

في هذا الفضاءِ الإجرائي، ننتقل من تجريدِ النظريةِ إلى محرابِ التطبيق، لنبرهن كيف يتحول النصُّ الأدبيُّ في مشروعنا إلى كائنٍ رياضيٍّ ذكي:

أ- سُوسِيُولُوجِيَا الرَّقْمِ (قصيدة كراسي الحلاقة): (نُعاملُ النصُّ هنا ككتلة) توبولوجية متصلة، لا تنفصمُ عراها مهما تعرضت لضغوط (الإزاحة) Shift - ؛ حيث يبرز الكراسي ك (دالة كاشفة) تسبُرُ غورَ التحولات الإنسانية وتفككُ مصفوفة القيم الاجتماعية.

ب- رِيَاضِيَّاتُ الْوَجْدِ (قصيدة معادلة القلب) نفتحمُ هنا جمى الخوارزميات الرُّوحية؛ حيث نُعيد صياغة المصطلحات الصارمة (الجبر، المجهول، القسمة) لُحوّلها من رموزٍ جافةٍ إلى أدواتٍ ترميمٍ توبولوجي للذات، وبناء يقينٍ وجداني يرتفع فوق حيرة المنطق التقليدي.

4. المِحْوَرُ التَّطْبِيقِيُّ الأوَّل: (سُوسِيُولُوجِيَا الرَّقْمِ.. قَصِيْدَةُ كَرَّاسِيِ الحِلَاقَةِ أُنْمُوْدَجًا):

تتجلّى قصيدة (كراسي الحلاقة) ك 'مصفوفةٍ شعريّة' ومختبرٍ إجرائي تتجسد فيه عبقرية الربط بين هندسة الكلمة ومنطق القياس. إننا أمام نصٍّ يمثل (كتلةً توبولوجية) محكمة، تخضع دلالاتها لقوانين (الإزاحة) التي تُعرّي زيف المشهد الإنساني.

وهنا، يبرزُ 'الكرسي' ليس كجمادٍ ساكن، بل ك (دالة كاشفة) ومتغيرٍ مركزي تتقاطع عنده قيمُ البقاء والفناء. إنها محاولة جادة لقراءة الاجتماع البشري بلغة المعادلات، حيث يتحول النصُّ إلى فضاءٍ هندسي يثبت أن الثبات للمبدأ والمحو للزيف، في متواليّةٍ تتضبط بميزان الرياضيات وتفيضُ بروى الوجدان.

أولاً: النص الشعري (النموذج التطبيقي الأوّل)

إِذَا مَا جَلَسْتَ.. فَكُنْ مُرْشِدِي

لِمَاذَا الْكَرَّاسِي.. بِنَا تَرَعُدْ؟

عَلَى ظَهْرِهَا.. حِكَايَاتُ زَيْفٍ

وَفِي قَلْبِهَا.. حَقْدٌ مَنْ يَحْسِدُ

فَمَا الْكُرْسِيُّ إِلَّا دَالَّةٌ لِحَبِينَةٍ
 إِذَا جَلَسَ الْمَرْءُ.. اسْتَبَانَ الْمُقْصِدُ
 تَرَى فِيهِ عِزًّا.. وَأَرَى فِيهِ نَعْشًا
 لِمَنْ ظَنَّ أَنَّ الْخُلُودَ.. يُشِيدُ
 هِيَ الدُّنْيَا.. مَصْنُوفَةٌ كُلُّ مَنْ بِهَا
 كِرَاسِي حِلَاقَةٍ.. تَمْضِي وَتُطْرَدُ
 فَمَا زَادَهُ الْكُرْسِيُّ إِلَّا مَهَانَةً
 كَصِفْرِ عَلَى الْيُمْنَى.. هَبَاءٌ يُعَدَّدُ
 تَنْظُونُ أَنَّ الْقِمَّةَ.. مُلْكٌ يَمِينُكُمْ
 وَقِمَّةٌ هَذَا السَّقَطِ.. أَنْ تَتَمَرَّدُوا
 فَلَا الْكُرْسِيُّ يَبْقَى.. وَلَا نَحْنُ نُنْتَبِي
 وَلَا دَالَّةٌ الْحَقِّ.. يَوْمًا تَبْدُدُ
 هِيَ الْإِزَاحَةُ قَانُونٌ.. لِكُلِّ مُتَكَبِّرٍ
 سَيَأْتِي الَّذِي.. مِنْ مَقَامِكَ يَطْرُدُ
 فَلَا تَعْرَنُكَ الْأَصْفَارُ.. فِي حِسَابِكُمْ
 إِذَا كَانَ جَوْهَرُ الْقَلْبِ.. يَتَرَدَّدُ
 نَحْنُ الثَّوَابِتُ.. فِي مَصْنُوفَةِ الْهَدَى
 وَأَنْتُمْ الْمُنْعَيَّرُ.. الَّذِي يَتَبَدَّدُ
 خُورِزْمِيَّةُ الْأَيَّامِ.. تَكْشِفُ سِتْرَكُمْ
 وَصِدْقُ الْيَقِينِ.. بِالْحَقِّ يُعْمَدُ
 فَكَمْ جَلَسُوا.. وَكَمْ حَلَفُوا مَبَادِنًا
 وَظَلَّ الْكُرْسِيُّ.. لِلْغَيْرِ يُورَدُ
 فَيَا صَاحِبَ الْكُرْسِيِّ.. لَا تُنْسَ أَنْهُ
 كَظَلِّ زَوَالٍ.. وَلِلصَّفْرِ يَرْتَدُّ
 نَحْنُ السُّطُورُ.. وَأَنْتُمْ الْهَوَامِشُ
 وَمَنْطِقُ النَّارِيخِ.. بِالْعَدْلِ يَشْهَدُ
 فَمَنْ كَانَ جَوْهَرُهُ.. صِدْقًا وَمَعْدِنًا
 فَلَيْسَ لَهُ عَن عَرْشِهِ.. مَنْ يُبْعَدُ
 وَمَنْ جَعَلَ الْكُرْسِيَّ.. رَبًّا لِجَاهِهِ
 فَمَصِيرُهُ الْحَتْمِيُّ.. أَنْ يَتَبَدَّدُوا
 سَيَبْقَى الْحَرْفُ.. مِيزَانًا وَهَنْدَسَةً
 وَمَنْ خَانَ عَهْدَ الْعَقْلِ.. لَا يَتَخَلَّدُ

5. التحليل الإجرائي: (النمذجة التطبيقية.. تفكيك كراسي الحلاقة نيوتروسوفيا):

لبرهنة فاعلية المنهج وانتقاله من فضاء التنظير المُجرّد إلى مخراب التطبيق الحيّ، تتخذ من قصيدة (كراسي الحلاقة) مختبراً إجرائياً لرصد وتحليل الظواهر الإنسانية بموضع 'أدب الرياضيات'. إنَّ هذا المسار التحليلي يقتفي أثر (النمذجة ثلاثية الأبعاد) التي طوّرها في تشريح قصائد الرواد كالأمير بدر بن عبد المحسن (2025) وأمير الشعراء أحمد شوقي (2024)؛ حيثُ نُعاملُ النصَّ كـ (كتلة توبولوجية متصلة) تخضع لعلاقات التحول والاستمرار، وتكشفُ عن جوهر المعنى الكامن خلف سطر الرمز.

أولاً: النمذجة الدالية للمنصب: (Functional Modeling):

يستهلُّ النصُّ قرصينته الكبرى بوضع (الكرسيّ) في مقام (الدالة الكاشفة - Function)؛ فالمعدن الحقيقي للذات الإنسانية يظلُّ (مجهولاً) مُستترًا في عمالية الغيب حتى يُلجَّ حَيِّزُ المنصب، وعندها فقط تتبدّى النتائجُ في (مجال القيم)

يقول النص:

فَمَا الْكُرْسِيُّ إِلَّا دَالَةٌ لِحَبِيئَةٍ .. إِذَا جَلَسَ الْمَرْءُ .. اسْتَبَانَ الْمُقْصِدُ

هنا، ينسلخ (الكرسي) عن مادتيه الصلبة ليتحول إلى (معامل Parameter - وظيفي، غايته استخراج المكون الوجداني الكامن في 'الخبينة'. إن هذا التحويل الدالي هو ما ينقل النص من ضيق الوصف التقليدي إلى رحابة (التحليل المنطقي الجسور)، حيث تقيس سيولة الأخلاق بميزان الدقة العلمية، وتعيد صياغة الحقيقة بميزان الرقم والنبض معاً.

ثانياً: التَّحْلِيلُ الْمَصْفُوفِيُّ وَالِدَوَّالُ الدَّوْرِيَّةُ .. حَتْمِيَّةُ الْعُودِ وَدِيْنَامِيكِيَّةُ الْإِزَاحَةِ:

يستدعي النص استعارة 'كراسي الحلاقة' لا بوصفها مشهداً عابراً، بل كتمثيل رياضي بليغ لمفهوم (الدوال الدورية - Periodic Functions) التي، مهما امتد بها منحى الصعود، تعود حتماً إلى نقطة البداية أو مآل الصفر. إنها إعلان صريح بأن الوجود ما هو إلا (مصفوفة كبرى) تضج بحالات الإحلال والتبديل الدائم، حيث لا استقرار لظل ولا بقاء لرسم.

يقول النص في كشف حكيم:

هِيَ الدُّنْيَا .. مَصْفُوفَةٌ كُلُّ مَنْ بِهَا .. كَرَّاسِي جَلَّافَةٍ .. تَمْضِي وَتَطْرُدُ

إن هذا التوصيف الباهر يمتلئ التجسيد الفلسفي لعملية (الإزاحة Shift) - ؛ ففي قانون مصفوفة الوجود، لا يمكن لغير أن يشغل حيزاً إلا بإزاحة ما قبله، في متواليه قهرية توصل لفكرة 'الزوال' كضرورة حتمية. إنها سيمفونية التبادل التي يفرضها قانون الإزاحة، حيث يزول ظل ليحل محله ظل آخر، لتظل مصفوفة الحق وحدها هي الثابت في عالم المتغيرات (سلامة وآخرون، 2025)

ثالثاً: سِيْكُولُوجِيَّةُ الْأَرْقَامِ وَمَخْنَةُ الْعَدَمِ .. حِينَمَا يَكُونُ الصَّفْرُ مِرَاةً لِلزَّيْفِ:

في استنطاق بليغ لخصائص الحساب المجرد، يستحضر النص 'الصفر' كقيمة عددية فحسب، بل كأداة تفكيك سيكولوجية تعبر فوق ركاز الزيف الإنساني. ففي عرف الرياضيات التقليدية، يمتلك الصفر على اليمين سلطة سحرية لمضاعفة القيمة، لكن في 'مصفوفة القيم' يرتد خاسماً وهو حسير إذا كان (الأحاد) أي الجوهر الإنساني معدوماً.

يقول النص في لفظة رياضية باهرة:

فَمَا زَادَهُ الْكُرْسِيُّ إِلَّا مَهَانَةً .. كَصَفْرِ عَلَى الْيُمْنَى .. هَبَاءٌ يُعَدُّ

هنا يبرز (التناقض الرياضي النيتروسوفيكي) في أبهى صورته؛ حيث تنكشف خديعة الأرقام الظاهرية. إن هذا التحليل يُعري حقيقة أن القيمة المضافة (المنصب) لا يمكنها بأي حال من الأحوال 'جبر كسر' الجوهر المنعدم؛ بالإضافة إلى (العدم) عدم، والضخامة الرقمية التي يمنحها الكرسي لمن لا معدن له ما هي إلا تضخم في 'الهباء'، وبرهان على أن القيمة الحقيقية تنبع من صدق (الأحاد) لا من كثرة (الأصفار) المزيفة.

رابعاً: هُنْدَسَةُ النِّهَائِيَّاتِ وَنُقْطَةُ الْإِنْفِصَالِ .. اِرْتِطَامُ الزَّيْفِ بِيَقِينِ الْمُنْحَنِ:

يبلغ النص ذروة تجلّيه الرياضي حينما يطرح مفهوم (النِّهَائِيَّاتِ Limits) - كأداة لرصد اللحظات الفارقة في عُمر الأفعى؛ فعندما تقترب دالة الكينونة من ذروة صعودها القائم على معطيات زائفة، فإنها لا تبلغ كمالاً، بل توول إلى حتمية الانكسار. إن السقوط من فوق (النِّهَائِيَّةُ الْعُظْمَى الزَّائِفَةُ) (لا يُعدُّ هبوطاً تدريجياً، بل هو) نُقْطَةُ انْفِصَالِ - (Discontinuity Point) حادة و عنيفة في منحى الوجود.

يقول النص في تحذير يفيض صرامة وهندسة:

وَقِمَّةُ هَذَا السَّقْطِ .. أَنْ تَتَمَرَّدُوا

هنا يتجلى المنطق الرياضي والفلسفي في أبهى صورته؛ فكلما أوغل المرء في التمرد على جوهر الحق صعوداً نحو 'قمة' الزيف، كان الارتطام بالواقع أعنف وأقسى عند لحظة الانفصال الحتمية. إن هذا السقوط المدوي هو التفسير التوبولوجي لإنهيار البنى الهشة، وهو ما ينسجم تماماً مع رؤيتنا في (تضاريس المعنى) (سلامة، 2025)؛ حيث تُنبئ الرياضيات أن القمم التي لا تنهض على أسس الحق ليست إلا (فجوات) في نسج الحقيقة، مألها الارتطام بقاع الصفر الأخلاقي.

6. المحور التطبيقي الثاني: (رياضيات الوجد والنمذجة الروحية.. قصيدة معادلة القلب أنموذجاً):

في هذا المحور، يخلع (أدب الرياضيات) عباءة الوصف الخارجي ليُلجّج بخشوع إلى محراب 'الخوارزميات الروحية'؛ حيث نُعيدُ صياغة كينونة الذات عبر ترويض جُموح المصطلحات الرياضية الصارمة. هنا، نُحررُ (الجبر) من قيود الموازنة الحسابية ليغدو بلسماً لـ (جبر القلوب) (المنكسرة، وتستحيل فيه (النهايات) و(القسم) و(المجاهيل) من رموز جافة تُرهق العقل، إلى أدوات بيانية ومفاتيح لاهوتية لترميم النفس وبناء يقين إيماني يتجاوز ضيق المنطق المادي. إننا في قصيدة (معادلة القلب)، نعبّر بالرقم من فضاء العدّ والمعدود إلى مدارات 'الرياضيات الوجدانية' الفسيحة؛ حيث نُطوِّعُ (الدالة الرياضية) ليُصبح معراجاً نورانياً يرتقي به اليقين الروحي فوق سلطة البراهين المجردة. إننا نُقدِّمُ برهاناً حياً على أن أصدق الحلول الإنسانية ليست تلك التي تستنتجها صرامة الأقلام، بل هي التي يُملئها مداد النبض في لحظة صدق رياضية وجدانية خالصة.

أولاً: النص الشعري (النموذج التطبيقي الثاني)

يا قلب أنت معادل ليست له	أرقام عقل، بل حساب تلاق
أنت المحيط وفيك ضاع مناطقي	والكل يُلغى في مدى الإشراق
كيف التقى الرّمزان في نبض دمي	إن لم يكن سرّ الحضور الوافي
والفرض كان البعد ثم وجدتي	عند انتهاء الحرف والميثاق
جبر القلوب له نظام خالد	ما ضمّه في اللوح أي سياق
قالوا: المجاهيل اختبار دكاننا	قلت: المجاهيل انتظار عناق
ما قيمة الـ (سين) التي لا نحتمي	معناك فيها بعد طول فراق؟
النبض هو المنهاج في درب الهدى	حين البراهين استراحت خاشعة
كل القوانين استقالت عندما	صار الهوى في الميل أقوى رافعة
أنا ذلك الرقم الذي لا ينحني	إلا لوجهك في صلاة الذات
مهما ضربت بقيتي بنقيضها	يبقى وجودك جملة الغايات
الحب يقسمنا ليجمع كل ما	قد فات من عمر ومن لحظات
هنا ينتهي علم العقول ويبتدي	علم القلوب وروعة الآيات

ثانياً: التحليل النيتروسوفيكي والرياضي للقصيدة:

التحليل: نلاحظ هنا قلب قوانين الحساب التقليدية؛ ف القسمة (البيت 6) تصبح أداة للجمع والاحتواء النيتروسوفيكي، والمجهول (س) (البيت 5) يتحول من قيمة مبهمة إلى انتظار عاطفي، مما يثبت أن صدق المعنى هو الحل الأوحد في مصفوفة الحياة.

تُقدم القصيدة رؤية نقدية لقصور المنطق الثنائي (Binary Logic) في فهم النفس البشرية، وتطرح بدائل رياضية ميتافيزيقية:

1. أسنة المجهول (Humanizing the Unknown) في الرياضيات التقليدية، يمثل المجهول (س) عبئاً ذهنياً يتطلب الحل، بينما يحوله الشاعر إلى انتظار عناق (البيت 6)؛ هنا تتحول الدالة الرياضية من أداة حسابية إلى دالة وجدانية تربط الغياب باللقاء.
2. جبر القلوب (Algebra of the Soul) يستخدم الشاعر مصطلح الجبر (البيت 5) ليس كعملية موازنة للأرقام، بل كعملية ترميم تبولوجي لانكسارات الروح، مؤكداً أن نظام جبر القلوب يتجاوز السياقات المادية.
3. تبولوجيا الفناء والاتصال: في قوله أنت المحيط وفيك ضاع مناطقي (البيت 2)، نجد تطبيقاً لمفهوم المجموعات المفتوحة والمغلقة؛ حيث يذوب الفرد (المنطق المحدود) في المحيط الروحي الشامل، وهو ما نسميه في أبحاثنا بـ الاتصال الروحي المطلق.
4. المفارقة النيتروسوفيكية في القسمة: يقاب الشاعر قوانين الحساب التقليدية في قوله الحب يقسمنا ليجمعنا (البيت 12). رياضياً: القسمة تفتت، لكن نيوتروسوفيكياً: القسمة هنا هي حالة حياد إيجابي تؤول إلى الوحدة والجمع، وهي مفارقة عبقرية تجمع بين التشتت والاحتواء.
5. نهاية العقل وبداية الآية: يختم الشاعر بـ (نقطة تقارب (Convergence Point) - حيث يؤول علم العقول إلى الصفر أمام لانهاية علم القلوب (البيت 13)، وهي النتيجة المنطقية لنموذجنا في أدب الرياضيات الذي يجعل من اليقين الروحي هو الثابت الوحيد.

7. النتائج والتوصيات: (نحو خارطة طريق لأدب الرياضيات):

بعد هذا التطواف المنهجي في تضاريس المعنى، والتحليل الإجرائي لمجرات النص، تخلص هذه الورقة البحثية إلى جملة من النتائج الجوهرية التي تؤسس لشرعية هذا الجنس الأدبي، وترسم ملامح مستقبله في فضاء المعرفة:

أولاً: النتائج (Findings) :

1. برهنة التكامل المعرفي: أثبتت الدراسة أن الرموز الرياضية ليست مجرد كيانات مجردة أو أصنام رقمية، بل هي (حمولة دلالية) فائقة القدرة على استيعاب أعقد الشفرات الوجدانية، مما يكسر حاجز الجمود التقليدي بين صرامة العلوم البحتة وسيولة العلوم الإنسانية.
2. هندسة الصورة الحدائية: نجح أدب الرياضيات في تقديم (استعارة تكنولوجية) تليق بالعصر الرقمي؛ حيث استبدل الصور النمطية المستهلكة بروى هندسية تتسم بالدقة والجدة، مما منح الأدب العربي نفساً حدائياً يزواج بين بلاغة الحرف ومنطق الرقم.
3. ترسيخ الثوابت الأخلاقية: كشف البحث أن توظيف مفهوم (الثابت الرياضي) في النص الأدبي يمنح القيم الأخلاقية حصانة ضد النسبية المائعة؛ إذ يكرس فكرة (القيم المطلقة) كركيزة لا تقبل القسمة في مواجهة المتغيرات الاجتماعية العاصفة.
4. الوعاء اللغوي والرقمنة: أكدت النتائج أن اللغة العربية بصفاتها مصفوفة بيانية محكمة هي الوعاء الأمثل لاستيعاب المنطق النيتروسوفيك، مما يعزز حضور لغة الضاد كشريك فاعل في محافل الذكاء الاصطناعي وتكنولوجيا المعرفة.

ثانياً: التوصيات (Recommendations) :

- بناءً على ما تقدم من كشوفات، نضع التوصيات الآتية أمام ضمير المؤسسات الثقافية والأكاديمية:
- أكاديمياً: ضرورة تبني أدب الرياضيات كمساقٍ اختياريٍّ عابرٍ للتخصصات في كليات الآداب والعلوم؛ لتعزيز التفكير البيني (لدى جيل الباحثين الشباب، وربط العقل الرياضي بالخيال الأدبي).

- **إبداعياً:** دعوة الأدباء والشعراء للاعتراف من المعجم العلمي، وتوظيف قوانين المنطق والتبولوجيا لترميم انكسارات النص، وإثراء المحتوى الأدبي المعاصر بصورٍ تضاهي دقة العصر.
- **مؤسساتياً:** المبادرة لإنشاء (مختبر الرياضيات)؛ يكون مصهراً تُحلل فيه النصوص هندسيًا، وتنظيم ملتقيات دورية تجمع بين سدنة الحرف وأساطين الرقم لدمج علوم الحاسب بالعلوم الإنسانية.
- **نقدياً:** العمل على وضع معجم اصطلاحي متخصص يضبط المفاهيم المشتركة بين العلم والأدب، ليكون مرجعاً هادياً للنقاد في سبر أغوار (النصوص المهندسة) وتفكيك شفراتها.

8. الخاتمة (Conclusion): ميثاق الحرف والرقم.. نحو أفقٍ معرفيٍ جديد:

إنَّ هذا البحث ليس مجرد دراسة أكاديمية عابرة، بل هو انحيازٌ كاملٌ للعقل المستنير الذي يرى الوجودَ في كَلْبَتِهِ المتناغمة؛ فما الرَّقْمُ في محرابنا إلا حرفٌ تكنَّف، وما الحرفُ إلا رقمٌ تجلَّى في صورة بيان. إننا نخنتمُ هذا التطوافَ بالتأكيد على أنَّ (أدب الرياضيات (ليس ترفاً فكرياً، بل هو 'استحقاقٌ حضاري' في زمنٍ غدت فيه الخوارزميات لغة الحياة وسادتها الجديد. لقد برهنَتْ هذه الورقة على أنَّ الحرفَ العربيَّ إذا انضبطَ بميزان المنطق والنيتروسوفيك سَمًا واستعصى على الفناء، وأنَّ الرقمَ الجاف إذا فاضتْ فيه روحُ المشاعر نطقَ بلسانٍ عربيٍّ مبين. إنَّ المدرسة التي نضغُ لبناتها الأولى اليوم، هي الجسرُ الذي سيعبرُ بالعقلِ العربيِّ نحو فضاءاتٍ رحبة، تتصالحُ فيها دقةُ المعادلةِ الرياضية مع روعةِ القصيدةِ الوجدانية، وتتوحدُ فيها تضاريسُ المعنى مع مجرَّاتِ النص.

سببى (أدب الرياضيات) ميثاقاً معرفياً متجدداً، يُثبِتُ للعالم أنَّ 'صدق المعنى' هو الحلُّ الأوحَدُ والمطلق في مصفوفة الحياة المائعة، وأنَّ (هندسة الكلمة) هي الطريقُ الأسمى والمنهجُ الأقومُ نحو تحقيق السلام النفسي، والونام الحضاري، والرفعة الإنسانية.

شكر وتقدير (Acknowledgments) :

لا يسعني وأنا أضع اللبنة الأولى لهذا المشروع المعرفي (أدب الرياضيات)، إلا أن أقدم بآيات الشكر والامتنان لأسرة مجلة واحة الأدب والأشعار الراقية؛ هذا الصرح الثقافي الذي احتضن الفكر وبذر روح التجديد. وأخص بالذكر سعادة السفير/ د. نتعي إبراهيم حسن، مدير عام الواحة وسفير السلام العالمي، لرعايته الكريمة ودعمه المستمر للابتكار المعرفي. كما أتوجه بالشكر والتقدير لشركاء هذا النجاح في إدارة الواحة: الدكتورة هيام عبده (مدير إدارة الواحة) لإشرافها المتميز، والدكتورة أسماء عبيد (مستشارة العلاقات العامة) لمتابعتها الدؤوبة وجهودها في مد جسور التواصل الثقافي. إن هذا العمل هو ثمرة تلاقٍ فكري في بيئة آمنت بأن العلم والأدب هما جناحا السلام والحضارة.

المراجع:

أولاً: المراجع:

(1) عبد الخالق سلامة، أحمد . (2025). تضاريسُ المعنى وَمَجَرَّاتُ النَّصِّ: رحلةٌ في التَّبولوجيا النيتروسوفيكية . (1-126). دار نشر NSIA للعلوم والتكنولوجيا / فرع العراق محافظة نينوى / العراق ISBN 978-1-59973-836-9
<https://doi.org/10.5281/zenodo.17410717>

(2) سلامة، أحمد . عبد الخالق، سرحان . محمد . كمال . إسماعيل خالد . هدى . & خضر عيسى . أحمد (2025). خارطة نيوتروسوفية للدلالة في شعر محمود درويش: الاتساق والغموض والمفارقة. Neutrosophic Knowledge, 7, 44–117.
<https://doi.org/10.5281/zenodo.17294381>

- (3) سلامة, أحمد . عبد الخالق, سرحان, محمد . كمال, إسماعيل خالد, هدى, & خضر عيسى, . أحمد . (2025). *التَّحْلِيلُ النَّيْتْرُوسُوفِيكِيُّ لِجَمَالِيَّاتِ اللُّغَةِ فِي رِوَايَةِ الرَّجُلِ وَالطَّرِيقِ*. Neutrosophic Knowledge, 7, 118–141. <https://doi.org/10.5281/zenodo.17294437>
- (4) سلامة, أحمد . عبد الخالق, إسماعيل خالد, هدى, & خضر عيسى, . أحمد . (2025). *النَّيْتْرُوسُوفِيَا فِي مُوَاجَهَةِ النَّصِّ الْوُجْدَانِيِّ تَحْلِيلٌ ثَلَاثِيٌّ الْأَبْعَادِ لِقَصِيدَةِ صَوْتِي تَجْرَحُ لِأَمِيرِ بَدْرِ بْنِ عَبْدِ الْمُحْسِنِ*. Neutrosophic Knowledge, 7, 142–175. <https://doi.org/10.5281/zenodo.17294544>
- (5) أحمد سلامة & محمد كمال سرحان. (2024). *شعر أحمد شوقي، قراءة جديدة في ضوء النظرية النيتروسوفيقية، نماذج مختارة، مجلة تكنولوجيا العلوم الإنسانية والإدارية، 1(2)، 190-278*. <https://doi.org/10.21608/tssa.2024.423151>
- (6) عبد الخالق سلامة, أحمد, إسماعيل خالد, هدى, كمال سرحان, محمد, & خضر عيسى, أحمد . (2025). *لغز الخلود : النيتروسوفي تفكك شفرات الأدب العربي من الجاهلية الى الحداثة (1-359)*. دار نشر NSIA للعلوم والتكنولوجيا / فرع العراق محافظة نينوى / العراق. ISBN: 978-9922-763-02-6 <https://doi.org/10.5281/zenodo.17410792>
- (7) عبد الخالق سلامة, أحمد, إسماعيل خالد, هدى, & خضر عيسى, أحمد . (2025). *الوحي الالهي والاعجاز الرياضي: دراسة نيوتروسوفيقية تبولوجية لضوابط تفسير آيات من القرآن الكريم*. دار بونس للنشر في بروكسل، بلجيكا. ISBN: 978-1-59973-905-2 <https://doi.org/10.5281/zenodo.17410847>
- (8) عبد الخالق سلامة, أحمد . (2025). *ظلال اليقين: رواية نيتروسوفيقية في توازن الحقيقة والحياد*. <https://doi.org/10.5281/zenodo.17420255>
- (9) أحمد عبد الخالق سلامة & هدى إسماعيل خالد & أحمد خضر عيسى (2025). *النقد الأدبي في ضوء النيتروسوفيا: جُسرٌ بينَ البلاغةِ والرِّياضيَّاتِ تحتَ النشر*
- (10) أحمد عبد الخالق سلامة (2026) *ديوان الأدب الرياضي (الجزء الأول)*. الناشر واحة الأدب والأشعار الراقية
- (11) الجرجاني، عبد القاهر. *أسرار البلاغة*. مرجع في بناء الصورة والأدلة المنطقية في اللغة
- (12) الخوارزمي، محمد بن موسى *كتاب الجبر والمقابلة*. كمرجع فلسفي لأثر المنطق الرياضي في التفكير العربي
- (13) طه، عبد الرحمن. (1998). *اللسان والميزان، أو التكوثر العقلي*. المركز الثقافي العربي. (مرجع في العلاقة بين المنطق واللغة)
- (14) حمودة، عبد العزيز. (1998). *المرايا المحدبة: من البنيوية إلى التفكيك*. عالم المعرفة. (مرجع في نقد البناء الهيكلي للنصوص)
- (15) سلامة، أحمد عبد الخالق & رفيف الحبيب. *علم النيتروسوفيك وتطبيقاته (Neutrosophic Science and its Applications)*. دار النشر التعليمية، أوهايو، الولايات المتحدة الأمريكية.
- (16) رفيف الحبيب، مصطفى مظهر رنة، هيثم فرح، أحمد سلامة. (2018). *دراسة المتغيرات العشوائية وفق منطق النيتروسوفيك*. مجلة جامعة البعث. المجلد 40 الإصدار 3.
- (17) رفيف الحبيب، مصطفى مظهر رنة، هيثم فرح، أحمد سلامة. (2018). *التوزيع الأسي النيتروسوفيك*. مجلة جامعة البعث المجلد 40 الإصدار 17 <http://magazine.albaath-univ.edu.sy/>

- 18) رفيف الحبيب ، مصطفى مظهر رنة ، هيثم فرح ، أحمد سلامة. (2017). دراسة التوزيع الاحتمالي فوق الهندسي وفق منطق النيتروسوفيك مجلة جامعة البعث المجلد 39 - <http://magazine.albaath-univ.edu.sy/>
- 19) رفيف الحبيب أحمد سلامة - صياغة الاحتمال الكلاسيكي وبعض التوزيعات الاحتمالية وفق منطق النيتروسوفيك وتأثير ذلك على اتخاذ القرار - جامعة البعث - سوريا - 2019
- 20) مراجعة الترجمة أحمد سلامة لكتاب مؤلفه فلورنتن سمارنداكة : ترجمة هدي إسماعيل , أحمد خضير كتاب مترجم بعنوان مبادئ التفاضل والتكامل النيوتروسوفكي و حساب التفاضل والتكامل النيوتروسوفكي 2016 الصفحات 114 دار نشر أوروبية.
- 21) رفيف الحبيب - أحمد سلامة - كتاب مترجم للمؤلف الأمريكي فلورنتن سمارنداكي بعنوان مقدمة فى الإحصاء النيتروسوفيكى دار النشر الأوربية 2020
- 22) كوثر الحسن؛ أحمد سلامة (مترجمين) مقدمة الى القياس النيتروسوفيك والتكامل النيتروسوفيك والاحتمال النيتروسوفيك للمؤلف الأمريكي فلورنتن سمارنداكي 2019 بدار نشر أوروبية صفحات 132.
- 23) رفيف الحبيب ، مصطفى مظهر رنة ، هيثم فرح ، أحمد سلامة. (2018). اتخاذ القرار النيتروسوفيكى. شجرة القرارات. مجلة جامعة البعث. المجلد 40 الإصدار 17 الصفحات 20
- 24) رفيف الحبيب ، مصطفى مظهر رنة ، هيثم فرح ، أحمد سلامة. (2018). دراسة التوزيع الاحتمالي فوق الهندسي وفق منطق النيتروسوفيك فى مجلة جامعة البعث - المجلد 40/ لعام 2018

ثانياً: مختارات من القصائد والنصوص المنشورة (2025-2026):

- تشمل القائمة أكثر من 72 نصاً أدبياً موثقاً في الدوريات العربية، ومن أهمها:
- معادلة القلب (مجلة رابطة حلم القلم العربي، نوفمبر 2025)
 - هندسة الندم (مجلة المساء العربية، ديسمبر 2025)
 - أنا اللانهاية (واحة الأدب والأشعار الراقية، ديسمبر 2025)
 - مصر: أصل الدالة وبرهان الحضارة (مجلة رواد الشعر والأدب، ديسمبر 2025)
 - خوارزمية اليقين ومصفوفة الأنين (مجلة رابطة حلم القلم العربي، يناير 2026)
 - برهان العزة وهندسة الإباء (مجلة أديب الظل الثقافية، يناير 2026)
 - سلامة بين الصفر واللانهاية (الملتقى العربي للقصة القصيرة، مارس 2026)



Recursive HyperGraphs and Recursive SuperHyperGraphs: Exploring More Hierarchical and Generalized Graph Concepts

Takaaki Fujita¹ *

¹ Independent Researcher, Tokyo, Japan. (Takaaki.fujita060@gmail.com)

*Correspondence: Takaaki.fujita060@gmail.com

Received: 03/23/2026; Accepted: 03/31/2026

Abstract. A finite *hypergraph* generalizes an ordinary graph by allowing a *hyperedge* to join any nonempty subset of vertices, thereby capturing genuine multiway interactions. Building on this idea, a finite *SuperHyperGraph* is obtained by iterating the powerset construction, so that set-valued objects created at one level may serve as vertices or edge endpoints at the next, yielding a principled representation of hierarchical and multi-layer relational structure. In a different direction, a *Recursive HyperGraph* permits hyperedges to contain not only ordinary vertices but also lower-level hyperedges as elements, enabling nested, self-referential incidence up to a prescribed recursion depth. In this paper, we integrate these two extensions: we formalize recursion within the SuperHyperGraph setting and introduce the notion of a *Recursive SuperHyperGraph*, which simultaneously captures vertex hierarchy and recursive edge nesting.

Keywords: Recursive SuperHyperGraph, HyperGraph, SuperHyperGraph, Recursive HyperGraph

1. Introduction

Graphs provide a widely used formalism for relational data: vertices represent entities, while edges represent pairwise interactions [1]. However, many real-world systems exhibit *higher-order* dependencies—interactions among three or more entities—for which binary edges are not an adequate abstraction. A finite *hypergraph* resolves this limitation by allowing a *hyperedge* to connect any nonempty subset of vertices, thereby representing genuine multiway relationships [2-4]. As extensions of HyperGraphs, several related concepts have also been studied,

including Fuzzy HyperGraphs [5], Meta HyperGraphs [6,7], Directed HyperGraphs [8,9], and Neutrosophic HyperGraphs [10,11].

To further accommodate *hierarchical* organization, one may iterate the powerset construction. This yields finite *SuperHyperGraphs*, where set-valued objects formed at one level can be treated as vertices at the next, producing nested families of vertex-sets that naturally capture multi-layer relational structure [12,13]. In this way, SuperHyperGraphs combine two kinds of expressiveness: multiway interaction (as in hypergraphs) and aggregation across levels (e.g., groups, groups of groups, and so forth), which is particularly relevant to layered networks, modular architectures, and multiscale relational data. Related hierarchical modeling ideas have also appeared in applied science and complex-network analysis [14–19].

Unless stated otherwise, the index n in $\mathcal{P}^n(\cdot)$ and the level n of an n -SuperHyperGraph are assumed to be nonnegative integers. For convenience, Table 1 summarizes the essential distinctions among graphs, hypergraphs, and n -SuperHyperGraphs.

<i>Aspect</i>	<i>Graph</i>	<i>Hypergraph</i>	<i>n-SuperHyperGraph</i>
Objects	Vertices, edges.	Vertices, hyperedges.	n -supervertices, superhyperedges.
Links connect	Two vertices.	Any nonempty vertex subset.	Nonempty supervertex subsets (with nested supervertices).
Formal model	$G = (V, E), E \subseteq \binom{V}{2}$.	$H = (V, E), E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$.	$\text{SHG}^{(n)} = (V, E), V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0), E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$.
Main emphasis	Pairwise relations.	Higher-order relations.	Higher-order <i>and</i> hierarchical (multi-level) relations.

TABLE 1. Compact comparison of graphs, hypergraphs, and n -SuperHyperGraphs.

A *Recursive HyperGraph* is a hypergraph in which a hyperedge may contain not only ordinary vertices but also lower-level hyperedges as elements, thereby enabling nested and self-referential incidence up to a prescribed recursion depth [20,21]. Recursive HyperGraphs, together with related network-based concepts, have been extensively studied across a wide range of fields in recent years [18,22]. For reference, Table 2 presents a brief comparison between HyperGraphs and Recursive HyperGraphs.

In this paper, we lift this idea to the SuperHyperGraph setting and introduce the notion of a *Recursive SuperHyperGraph*. Informally, a Recursive SuperHyperGraph augments hierarchical supervertices with recursive superhyperedges that may include supervertices and lower-level

Aspect	HyperGraph	Recursive HyperGraph
Vertex set	A set of ordinary vertices	A set of ordinary vertices
Edge structure	Each hyperedge is a nonempty subset of the vertex set	A hyperedge may contain vertices and lower-level hyperedges
Recursion	No recursive membership	Recursive membership is allowed
Hierarchy	Flat higher-order relations	Hierarchical and nested relations
Expressive power	Models multiway interactions	Models multiway interactions together with recursive or layered structures
Typical edge form	$e \subseteq V, e \neq \emptyset$	e may belong to a recursively constructed edge universe over V
Structural complexity	Comparatively simple	More general and structurally richer
Typical use	Standard higher-order relational modeling	Modeling nested, hierarchical, or self-referential interaction patterns

TABLE 2. A brief comparison between HyperGraphs and Recursive HyperGraphs

superhyperedges, thereby capturing both multilevel vertex nesting and edge recursion in a single combinatorial object. We present a comparison of SuperHyperGraphs and Recursive SuperHyperGraphs in Table 3. In addition, Table 4 compares Recursive HyperGraphs and Recursive SuperHyperGraphs.

2. Preliminaries

This section establishes the notation used throughout the paper and reviews the basic set-theoretic and combinatorial concepts needed in later sections.

2.1. SuperHyperGraphs

We begin with the set-theoretic operations underlying SuperHyperGraphs and then recall the relevant graph-theoretic definitions.

Definition 2.1 (Base set). A *base set* S is the underlying universe of admissible objects in the setting under consideration, i.e.,

$$S = \{ x \mid x \text{ is an admissible object in the given context } \}.$$

<i>Aspect</i>	<i>SuperHyperGraph</i>	<i>Recursive SuperHyperGraph</i>
Vertex universe	Level- n supervertices: $V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0)$ (hierarchical, nested vertices).	Same hierarchical supervertices: $V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0)$ (or (m, n) -supervertices in the (m, n, k) model).
Edge family (basic form)	Ordinary superhyperedges: $E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$ (edges are subsets of V).	Recursive superhyperedges: $E \subseteq 2_{V,k} \setminus \{\emptyset\}$ (edges may contain supervertices and lower-level edges as elements).
Nesting location	Nesting occurs in <i>vertices</i> (iterated powersets).	Nesting occurs in <i>vertices and edges</i> (vertex hierarchy plus edge recursion).
Recursion depth parameter	None (non-recursive incidence by definition).	Explicit depth bound $k \geq 0$ controls how far edge-nesting is permitted.
Special case(s)	Recovered from (n, k) -recursive model at $k = 0$.	Reduces to an n -SuperHyperGraph when $k = 0$; reduces to a k -recursive hypergraph when $n = 0$.

TABLE 3. Compact comparison of SuperHyperGraphs and Recursive SuperHyperGraphs.

Accordingly, every element of $\mathcal{P}(S)$ —and, more generally, of any iterated powerset—is ultimately formed from elements of S .

Definition 2.2 (Powerset). (see [23]) For a set S , its *powerset* is the family of all subsets of S :

$$\mathcal{P}(S) = \{ A \mid A \subseteq S \}.$$

In particular, $\emptyset \in \mathcal{P}(S)$ and $S \in \mathcal{P}(S)$.

Definition 2.3 (Hypergraph). [4,24] A *hypergraph* is an ordered pair $H = (V, E)$ where

- V is a finite set of *vertices*, and
- E is a finite family of nonempty subsets of V , called *hyperedges*.

Thus a hyperedge may contain more than two vertices, allowing one to model genuinely multiway relations.

Definition 2.4 (n -fold iterated powerset). [25,26] Let X be a set. Define $\mathcal{P}^1(X) := \mathcal{P}(X)$ and, for $n \geq 1$, set recursively

$$\mathcal{P}^{n+1}(X) := \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(X)).$$

<i>Aspect</i>	<i>Recursive HyperGraph</i>	<i>Recursive SuperHyperGraph</i>
Vertex objects	Ordinary (flat) vertices, typically a set V .	Hierarchical supervertices, e.g. $V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0)$ (or (m, n) -supervertices).
Edge objects	Recursive hyperedges: elements may include vertices and lower-level hyperedges (bounded depth).	Recursive superhyperedges: elements may include supervertices and lower-level superhyperedges (bounded depth).
Formal edge universe	$E \subseteq 2_{V,k} \setminus \{\emptyset\}$ for some recursion depth $k \geq 0$.	$E \subseteq 2_{V,k} \setminus \{\emptyset\}$ with supervertex set V (and an additional vertex-level parameter n or (m, n)).
Where nesting occurs	In <i>edges</i> (self-referential incidence).	In <i>vertices and edges</i> (vertex hierarchy + edge recursion).
Special cases	$k = 0$ yields an ordinary hypergraph.	$k = 0$ yields an ordinary SuperHyperGraph; $n = 0$ yields a recursive hypergraph.

TABLE 4. Compact comparison of Recursive HyperGraphs and Recursive SuperHyperGraphs.

When excluding the empty set, we write

$$\mathcal{P}_*^n(X) := \mathcal{P}^n(X) \setminus \{\emptyset\}.$$

Definition 2.5 (n -SuperHyperGraph). (see [12, 27]) Let V_0 be a finite, nonempty base set, and define the iterated powersets by

$$\mathcal{P}^0(V_0) := V_0, \quad \mathcal{P}^{k+1}(V_0) := \mathcal{P}(\mathcal{P}^k(V_0)) \quad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

For $n \geq 0$, an n -SuperHyperGraph on V_0 is a pair

$$\text{SHG}^{(n)} = (V, E)$$

satisfying

$$V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0) \quad \text{and} \quad E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}.$$

Elements of V are called n -supervertices, and elements of E are called superhyperedges; equivalently, each superhyperedge is a nonempty subset of the supervertex set V .

3. (m, n) -SuperHyperGraph

An (m, n) -SuperHyperGraph models multi-way relations among supervertices represented by maps $\mathcal{P}^m(S) \rightarrow \mathcal{P}^n(S)$; edges are nonempty sets of such maps.

Definition 3.1 ((m, n) -SuperHyperGraph). Fix $m, n \in \mathbb{N}$ and a nonempty base set S . Let

$$\mathfrak{F}_{m,n}(S) := \{ f : \mathcal{P}^m(S) \rightarrow \mathcal{P}^n(S) \}$$

denote the set of all (m, n) -superhyperfunctions on S (with \mathcal{P}^t the iterated powerset notation established earlier). An (m, n) -SuperHyperGraph over S is a triple

$$\text{SHG}^{(m,n)} = (V, \mathcal{E}, \partial),$$

where:

- (i) $V \subseteq \mathfrak{F}_{m,n}(S)$ is a nonempty set (its elements are called (m, n) -supervertices);
- (ii) \mathcal{E} is a nonempty set of (super)edge identifiers;
- (iii) $\partial : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}^*(V)$ is an incidence map, where $\mathcal{P}^*(V) := \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$.

For $e \in \mathcal{E}$, the set $\partial(e) \subseteq V$ is called the *incidence set* (or endpoint set) of the superhyperedge e .

3.1. Recursive HyperGraph

A *Recursive HyperGraph* is a hypergraph whose hyperedges may contain ordinary vertices and also lower-level hyperedges as elements, enabling nested, self-referential incidence up to a bounded recursion depth [20, 21].

Definition 3.2 (Depth- k powerset universe). [20, 21] Let S be a (nonempty) set and let $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Define a hierarchy of sets $(S_i)_{i \geq 0}$ by

$$S_0 := S, \quad S_i := \mathcal{P}\left(\bigcup_{j=0}^{i-1} S_j\right) \quad (i \geq 1).$$

The *depth- k powerset universe* over S is

$$2_{S,k} := \mathcal{P}\left(\bigcup_{i=0}^k S_i\right).$$

Definition 3.3 (k -recursive hypergraph). [20, 21] Let V be a (finite) vertex set and let $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. A *k -recursive hypergraph* is a pair

$$H = (V, E)$$

such that

$$E \subseteq 2_{V,k} \setminus \{\emptyset\},$$

where $2_{V,k}$ is the depth- k powerset universe from Definition 3.2 applied to $S = V$.

In particular, for $k = 0$ one has $2_{V,0} = \mathcal{P}(V)$ and thus $E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$, i.e., H reduces to an ordinary hypergraph.

4. Results: Recursive SuperHyperGraph

In this section, we investigate Recursive SuperHyperGraphs.

4.1. (n, k) -recursive SuperHyperGraph

An (n, k) -recursive SuperHyperGraph is a structure whose vertices are level- n supervertices, that is, elements of an iterated powerset, and whose depth- k recursive edges may contain both supervertices and lower-level edges as elements. Throughout, we restrict attention to well-founded recursive superhyperedges, that is, recursive edges with no membership cycles.

Definition 4.1 ((n, k) -recursive SuperHyperGraph). Let V_0 be a base (ground) set, and let $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(Iterated powersets). Define the iterated powersets recursively by

$$\mathcal{P}^0(V_0) = V_0, \quad \mathcal{P}^{n+1}(V_0) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(V_0)) \quad (n \geq 0).$$

An (n, k) -recursive SuperHyperGraph is a pair

$$\text{RSHG}^{(n,k)} = (V, E)$$

satisfying the following conditions:

- (i) (Hierarchical supervertex set). $V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0)$.
- (ii) (Recursive superhyperedge family). $E \subseteq 2_{V,k} \setminus \{\emptyset\}$, where $2_{V,k}$ denotes the depth- k powerset universe constructed from V as in Definition 3.2.

If $k = 0$, then $E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$, and one recovers the usual (non-recursive) n -SuperHyperGraph.

If $n = 0$, then $V \subseteq V_0$, and one recovers a k -recursive hypergraph on the ground vertex set.

Theorem 4.2 (Specializations of (n, k) -recursive SuperHyperGraphs). Let V_0 be a finite nonempty base set, and let $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Let $\text{RSHG}^{(n,k)} = (V, E)$ be an (n, k) -recursive SuperHyperGraph in the sense of Definition 4.1.

- (i) (The case $k = 0$ yields n -SuperHyperGraphs). If $k = 0$, then $\text{RSHG}^{(n,0)} = (V, E)$ is precisely an n -SuperHyperGraph; that is,

$$V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0), \quad E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}.$$

- (ii) (The case $n = 0$ yields k -recursive hypergraphs). If $n = 0$, then $\text{RSHG}^{(0,k)} = (V, E)$ is precisely a k -recursive hypergraph on the ground vertex set V ; that is,

$$V \subseteq V_0, \quad E \subseteq 2_{V,k} \setminus \{\emptyset\}.$$

In particular, one may take the ground vertex set to be V itself and regard $\text{RSHG}^{(0,k)}$ simply as the k -recursive hypergraph (V, E) .

Consequently, the notion of an (n, k) -recursive SuperHyperGraph simultaneously generalizes n -SuperHyperGraphs and k -recursive hypergraphs.

Proof. (i) By Definition 3.2, when $k = 0$ one has

$$2_{V,0} = \mathcal{P}\left(\bigcup_{i=0}^0 S_i\right) = \mathcal{P}(V).$$

Therefore, Definition 4.1(ii) reduces to

$$E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\},$$

while condition (i) remains

$$V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0).$$

This is exactly the definition of an n -SuperHyperGraph.

(ii) If $n = 0$, then $\mathcal{P}^0(V_0) = V_0$, and hence Definition 4.1(i) gives

$$V \subseteq V_0.$$

Condition (ii) remains unchanged and states that

$$E \subseteq 2_{V,k} \setminus \{\emptyset\}.$$

This is precisely the definition of a k -recursive hypergraph with vertex set V . \square

Example 4.3 (A concrete (n, k) -recursive SuperHyperGraph with $n = 1$ and $k = 1$). Let the ground set be $V_0 = \{a, b, c\}$, and let $n = 1$. Then

$$\mathcal{P}^1(V_0) = \mathcal{P}(V_0).$$

Choose the level-1 supervertex set

$$V = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\} \} \subseteq \mathcal{P}(V_0).$$

Let

$$e_0 := \{ \{a\}, \{b\} \} \in \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}.$$

For $k = 1$, the depth-1 universe $2_{V,1}$ contains subsets of $V \cup \mathcal{P}(V)$; hence one may form a recursive superhyperedge that contains the lower-level edge e_0 as an element:

$$e_1 := \{ \{a, b\}, e_0 \} \subseteq V \cup \mathcal{P}(V).$$

Define the edge family by

$$E := \{e_0, e_1\}.$$

Then (V, E) is an $(1, 1)$ -recursive SuperHyperGraph. Indeed,

$$V \subseteq \mathcal{P}^1(V_0)$$

by construction, and

$$E \subseteq 2_{V,1} \setminus \{\emptyset\}$$

since $e_0 \in \mathcal{P}(V)$ and $e_1 \subseteq V \cup \mathcal{P}(V)$. Moreover, e_1 explicitly exhibits recursion, because it contains the lower-level superhyperedge e_0 as one of its elements.

4.2. (m, n, k) -recursive SuperHyperGraph

An (m, n, k) -recursive SuperHyperGraph is a structure whose vertices are (m, n) -supervertices, i.e., maps

$$\mathcal{P}^m(S) \rightarrow \mathcal{P}^n(S),$$

and whose depth- k recursive edges may contain both supervertices and lower-level edges.

Definition 4.4 ((m, n, k) -recursive SuperHyperGraph). Let S be a nonempty base set, and let $m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Define

$$\mathfrak{F}_{m,n}(S) := \{ f : \mathcal{P}^m(S) \rightarrow \mathcal{P}^n(S) \}$$

to be the set of all (m, n) -superhyperfunctions on S , where \mathcal{P}^t denotes the t -fold iterated powerset, as introduced earlier. Let $2_{V,k}$ denote the depth- k powerset universe constructed over a set V (Definition 3.2).

An (m, n, k) -recursive SuperHyperGraph is a pair

$$\text{RSHG}^{(m,n,k)} = (V, E)$$

such that

$$\emptyset \neq V \subseteq \mathfrak{F}_{m,n}(S), \quad \emptyset \neq E \subseteq 2_{V,k} \setminus \{\emptyset\}.$$

The elements of V are called (m, n) -supervertices, and the elements of E are called *depth- k recursive superhyperedges*.

Definition 4.5 (Canonical lifting to depth- k universes). Let $\varphi : V \rightarrow W$ be a map, and let $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Define maps $\varphi^{\uparrow i}$ on the hierarchy used to construct $2_{V,k}$ recursively by

$$\varphi^{\uparrow 0}(v) := \varphi(v) \quad (v \in V), \quad \varphi^{\uparrow(i+1)}(A) := \{\varphi^{\uparrow i}(a) \mid a \in A\},$$

for every set A appearing at level $i + 1$ of the construction. In this way, φ induces a map, again denoted by

$$\varphi^{\uparrow k} : 2_{V,k} \longrightarrow 2_{W,k}, \quad \varphi^{\uparrow k}(X) := \{\varphi^{\uparrow k}(x) \mid x \in X\}.$$

Theorem 4.6 (Generalization of (m, n) -SuperHyperGraphs and (n, k) -recursive SuperHyperGraphs). *Let S be a nonempty base set, and let $m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

- (i) (The case $k = 0$ recovers the non-recursive setting.) A structure is an $(m, n, 0)$ -recursive SuperHyperGraph in the sense of Definition 4.4 if and only if it is an (m, n) -SuperHyperGraph in the sense of Definition 3.1.
- (ii) (The case $m = 0$ with constant supervertices recovers the (n, k) -recursive model.) Define an injection

$$\iota : \mathcal{P}^n(S) \hookrightarrow \mathfrak{F}_{0,n}(S), \quad \iota(A) := c_A, \quad c_A(x) := A \quad (\forall x \in S).$$

Let (V', E') be an (n, k) -recursive SuperHyperGraph in the sense of Definition 4.1, with vertex set $V' \subseteq \mathcal{P}^n(S)$ and edge family $E' \subseteq 2_{V',k} \setminus \{\emptyset\}$. Set

$$V := \iota(V') \subseteq \mathfrak{F}_{0,n}(S), \quad E := \iota^{\uparrow k}(E') := \{\iota^{\uparrow k}(e) \mid e \in E'\},$$

where $\iota^{\uparrow k}$ is the canonical lifting defined in Definition 4.5. Then (V, E) is a $(0, n, k)$ -recursive SuperHyperGraph, and $\iota^{\uparrow k}$ yields an isomorphism between (V', E') and (V, E) . Conversely, every $(0, n, k)$ -recursive SuperHyperGraph whose vertex set is contained in $\iota(\mathcal{P}^n(S))$ arises in this way, up to isomorphism, from an (n, k) -recursive SuperHyperGraph.

Proof. (i) If $k = 0$, then the depth- k construction gives

$$2_{V,0} = \mathcal{P}\left(\bigcup_{i=0}^0 S_i\right) = \mathcal{P}(V).$$

Hence Definition 4.4 reduces to the condition

$$E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\} \quad \text{with} \quad V \subseteq \mathfrak{F}_{m,n}(S),$$

which is precisely the subset-based presentation of an (m, n) -SuperHyperGraph, and therefore equivalent to Definition 3.1. The converse follows immediately from the same identification.

(ii) The map ι is injective, since $c_A = c_B$ implies

$$A = c_A(x) = c_B(x) = B$$

for any $x \in S$. By Definition 4.5, ι lifts canonically to a map

$$\iota^{\uparrow k} : 2_{V',k} \rightarrow 2_{\iota(V'),k}.$$

Therefore, for each

$$e \in E' \subseteq 2_{V',k} \setminus \{\emptyset\},$$

its image $\iota^{\uparrow k}(e)$ belongs to $2_{\iota(V'),k} \setminus \{\emptyset\}$, and thus

$$E = \{\iota^{\uparrow k}(e) \mid e \in E'\} \subseteq 2_{V,k} \setminus \{\emptyset\}.$$

Since

$$V = \iota(V') \subseteq \mathfrak{F}_{0,n}(S),$$

the pair (V, E) satisfies Definition 4.4 with $(m, n) = (0, n)$, and is therefore a $(0, n, k)$ -recursive SuperHyperGraph.

To establish the isomorphism claim, observe that ι defines a bijection from V' onto V , while, by construction, $\iota^{\uparrow k}$ defines a bijection from E' onto E that preserves the incidence structure at every level of nesting. The converse is obtained by reversing this construction for any vertex set contained in $\iota(\mathcal{P}^n(S))$, using $\iota^{-1}(c_A) = A$ together with the induced inverse on the lifted hierarchy. \square

5. Conclusion

In this work, we formalize recursion within the SuperHyperGraph setting and introduce the notion of a *Recursive SuperHyperGraph*, a combinatorial model that unifies hierarchical (multi-level) supervertices with recursively nested superhyperedges. We anticipate that this framework can be enriched in several directions. In particular, future research may incorporate uncertainty-aware formalisms—including Neutrosophic Sets [28, 29], Quadripartitioned Neutrosophic Sets [30, 31], Pentapartitioned Neutrosophic Sets [32, 33], Double-Valued Neutrosophic Sets [34–36], Plithogenic Sets [37, 38], and broader classes of Uncertain Sets [39, 40]—to develop recursive SuperHyperGraph models capable of representing hierarchical structure together with graded truth, indeterminacy, and contradiction.

Funding

This study was conducted without any financial support from external organizations or grants.

Acknowledgments

We would like to express our sincere gratitude to everyone who provided valuable insights, support, and encouragement throughout this research. We also extend our thanks to the readers for their interest and to the authors of the referenced works, whose scholarly contributions have greatly influenced this study. Lastly, we are deeply grateful to the publishers and reviewers who facilitated the dissemination of this work.

Use of Generative AI and AI-Assisted Tools

Generative AI and AI-assisted tools were used for tasks such as English grammar checking, and they were not used in any way that violates ethical standards.

Supplementary Information

No supplementary materials accompany this paper.

Disclaimer

The ideas presented here are theoretical and have not yet been validated through empirical testing. While we have strived for accuracy and proper citation, inadvertent errors may remain. Readers should verify any referenced material independently. The opinions expressed are those of the authors and do not necessarily reflect the views of their institutions.

References

- [1] Jonathan L Gross, Jay Yellen, and Mark Anderson. *Graph theory and its applications*. Chapman and Hall/CRC, 2018.
- [2] Yue Gao, Zizhao Zhang, Haojie Lin, Xibin Zhao, Shaoyi Du, and Changqing Zou. Hypergraph learning: Methods and practices. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 44(5):2548–2566, 2020.
- [3] Yifan Feng, Haoxuan You, Zizhao Zhang, Rongrong Ji, and Yue Gao. Hypergraph neural networks. In *Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence*, volume 33, pages 3558–3565, 2019.
- [4] Alain Bretto. Hypergraph theory. *An introduction. Mathematical Engineering. Cham: Springer*, 1, 2013.
- [5] John N Mordeson and Premchand S Nair. *Fuzzy graphs and fuzzy hypergraphs*, volume 46. Physica, 2012.
- [6] Takaaki Fujita. Metahypergraphs, metasuperhypergraphs, and iterated metagraphs: Modeling graphs of graphs, hypergraphs of hypergraphs, superhypergraphs of superhypergraphs, and beyond. *Current Research in Interdisciplinary Studies*, 4(5):1–23, 2025.
- [7] Jinze Wang, Jiong Jin, Lu Zhang, Hong-Ning Dai, Adriano Di-Pietro, and Tiehua Zhang. Towards spatial-temporal meta-hypergraph learning for multimodal few-shot fault diagnosis. *Journal of Industrial Information Integration*, page 100924, 2025.
- [8] Spencer Krieger and John Kececioglu. Shortest hyperpaths in directed hypergraphs for reaction pathway inference. *Journal of Computational Biology*, 30(11):1198–1225, 2023.
- [9] Kazusato Oko, Shinsaku Sakaue, and Shin ichi Tanigawa. Nearly tight spectral sparsification of directed hypergraphs by a simple iterative sampling algorithm. *ArXiv*, abs/2204.02537, 2022.
- [10] Muhammad Akram and Anam Luqman. Bipolar neutrosophic hypergraphs with applications. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 33(3):1699–1713, 2017.
- [11] Anam Luqman, Muhammad Akram, and Florentin Smarandache. Complex neutrosophic hypergraphs: new social network models. *Algorithms*, 12(11):234, 2019.
- [12] Florentin Smarandache. *Extension of HyperGraph to n-SuperHyperGraph and to Plithogenic n-SuperHyperGraph, and Extension of HyperAlgebra to n-ary (Classical-/Neutro-/Anti-) HyperAlgebra*. Infinite Study, 2020.
- [13] Takaaki Fujita and Florentin Smarandache. *HyperGraph and SuperHyperGraph Theory with Applications*. Neutrosophic Science International Association (NSIA) Publishing House, 2026.
- [14] Berrocal Villegas Salomón Marcos, Montalvo Fritas Willner, Berrocal Villegas Carmen Rosa, Flores Fuentes Rivera María Yissel, Espejo Rivera Roberto, Laura Daysi Bautista Puma, and Dante Manuel Macazana Fernández. Using plithogenic n-superhypergraphs to assess the degree of relationship between information skills and digital competencies. *Neutrosophic Sets and Systems*, 84:513–524, 2025.
- [15] Nelly Hodelín Amable, Elizabeth Esther Vergel De Salazar, Martha Gloria Martínez Isaac, Olivia Catalina Olavarría Sánchez, and Johanna Mariuxi Solís Palma. Representation of motivational dynamics in school environments through plithogenic n-superhypergraphs with family participation. *Neutrosophic Sets and Systems*, 92:570–583, 2025.

- [16] T Fujita. On spherical neutrosophic superhypergraphs and complex spherical neutrosophic superhypergraphs. *Int. J. Open Problems Complex Analysis*, 18(1), 2026.
- [17] Julio Cesar Méndez Bravo, Claudia Jeaneth Bolanos Piedrahita, Manuel Alberto Méndez Bravo, and Luis Manuel Pilacuan-Bonete. Integrating smed and industry 4.0 to optimize processes with plithogenic n-superhypergraphs. *Neutrosophic Sets and Systems*, 84:328–340, 2025.
- [18] Takaaki Fujita and Florentin Smarandache. *Representing Higher-Order Networks: A Survey of Graph-Based Frameworks*. Neutrosophic Science International Association (NSIA) Publishing House, 2026.
- [19] Masoud Ghods, Zahra Rostami, and Florentin Smarandache. Introduction to neutrosophic restricted superhypergraphs and neutrosophic restricted superhypertrees and several of their properties. *Neutrosophic Sets and Systems*, 50:480–487, 2022.
- [20] Naganand Yadati, RS Dayanidhi, S Vaishnavi, KM Indira, and G Srinidhi. Knowledge base question answering through recursive hypergraphs. In *Proceedings of the 16th conference of the European chapter of the association for computational linguistics: main volume*, pages 448–454, 2021.
- [21] Naganand Yadati. Neural message passing for multi-relational ordered and recursive hypergraphs. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 33:3275–3289, 2020.
- [22] Keli Long, Fangfa Fu, Defu Hu, Liangquan Qiao, Jinghan Zhou, and Jinxiang Wang. Automated cross-level verification for heterogeneous systems using attribute recursive hypergraph and fault-tolerant bus resolver. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2025.
- [23] Thomas Jech. *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded*. Springer, 2003.
- [24] Claude Berge. *Hypergraphs: combinatorics of finite sets*, volume 45. Elsevier, 1984.
- [25] Florentin Smarandache. Foundation of superhyperstructure & neutrosophic superhyperstructure. *Neutrosophic Sets and Systems*, 63(1):21, 2024.
- [26] Huda E Khali, Gonca D GÜNGÖR, and Muslim A Noah Zaina. Neutrosophic superhyper bi-topological spaces: Original notions and new insights. *Neutrosophic Sets and Systems*, 51(1):3, 2022.
- [27] Florentin Smarandache. *Introduction to the n-SuperHyperGraph-the most general form of graph today*. Infinite Study, 2022.
- [28] Said Broumi, Mohamed Talea, Assia Bakali, and Florentin Smarandache. Single valued neutrosophic graphs. *Journal of New theory*, 10:86–101, 2016.
- [29] Haibin Wang, Florentin Smarandache, Yanqing Zhang, and Rajshekhar Sunderraman. *Single valued neutrosophic sets*. Infinite study, 2010.
- [30] S Satham Hussain, Hossein Rashmonlou, R Jahir Hussain, Sankar Sahoo, Said Broumi, et al. Quadripartitioned neutrosophic graph structures. *Neutrosophic Sets and Systems*, 51(1):17, 2022.
- [31] S Satham Hussain, Durga Nagarajan, Hossein Rashmanlou, and Farshid Mofidnakhai. Novel supply chain decision making model under m-polar quadripartitioned neutrosophic environment. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, pages 1–26, 2024.
- [32] Shio Gai Quek, Ganeshsree Selvachandran, D Ajay, P Chellamani, David Taniar, Hamido Fujita, Phet Duong, Le Hoang Son, and Nguyen Long Giang. New concepts of pentapartitioned neutrosophic graphs and applications for determining safest paths and towns in response to covid-19. *Computational and Applied Mathematics*, 41(4):151, 2022.
- [33] Rama Mallick and Surapati Pramanik. Pentapartitioned neutrosophic set and its properties. *Neutrosophic Sets and Systems*, 35:49, 2020.
- [34] Lin Wei. An integrated decision-making framework for blended teaching quality evaluation in college english courses based on the double-valued neutrosophic sets. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 45:3259–3266, 2023.
- [35] Takaaki Fujita, Ajoy Kanti Das, Sankar Prasad Mondal, Arif Mehmood, Suman Das, Volkan Duran, and Arkan A Ghaib. Three-mode upside-down logic within plithogenic double-valued and triple-valued neutrosophic sets. *Journal of Contemporary Decision Science*, 1(1):19–45, 2025.

- [36] Takaaki Fujita, Arif Mehmood, and Arkan A. Ghaib. Single-valued, double-valued, triple-valued, quadruple-valued, and quintuple-valued neutrosophic graph. *Neutrosophic Systems with Applications*, 26(2):Article 2, 2026.
- [37] Florentin Smarandache. *Plithogenic set, an extension of crisp, fuzzy, intuitionistic fuzzy, and neutrosophic sets-revisited*. Infinite study, 2018.
- [38] Fazeelat Sultana, Muhammad Gulistan, Mumtaz Ali, Naveed Yaqoob, Muhammad Khan, Tabasam Rashid, and Tauseef Ahmed. A study of plithogenic graphs: applications in spreading coronavirus disease (covid-19) globally. *Journal of ambient intelligence and humanized computing*, 14(10):13139–13159, 2023.
- [39] Takaaki Fujita and Florentin Smarandache. A unified framework for u -structures and functorial structure: Managing super, hyper, superhyper, tree, and forest uncertain over/under/off models. *Neutrosophic Sets and Systems*, 91:337–380, 2025.
- [40] Takaaki Fujita and Florentin Smarandache. *A Dynamic Survey of Fuzzy, Intuitionistic Fuzzy, Neutrosophic, Plithogenic, and Extensional Sets*. Neutrosophic Science International Association (NSIA), 2025.

Disclaimer/Publisher’s Note: The statements, opinions and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and not of the publisher and/or the editor(s). This publisher and/or the editor(s) disclaim responsibility for any injury to people or property resulting from any ideas, methods, instructions or products referred to in the content.



Conceptual HyperGraph and Conceptual SuperHyperGraph

Takaaki Fujita¹ *

¹ Independent Researcher, Tokyo, Japan. (Takaaki.fujita060@gmail.com)

*Correspondence: Takaaki.fujita060@gmail.com

Received: 03/23/2026; Accepted: 03/31/2026

Abstract. A finite *hypergraph* generalizes an ordinary graph by permitting a *hyperedge* to connect any nonempty subset of vertices, thereby capturing multiway interactions. Extending this idea, a finite *SuperHyperGraph* is obtained by iterating the powerset operation, producing nested families of vertex and edge sets that model multi-layer relational structure. Separately, a *conceptual graph* is a labeled bipartite graph whose concept nodes and relation nodes encode typed relations with ordered arguments, while a *conceptual hypergraph* represents relation instances as typed hyperedges incident to an ordered tuple of vertices. In this paper, we extend these conceptual formalisms using the SuperHyperGraph framework, introducing *Conceptual SuperHyperGraphs* and examining their basic properties.

Keywords: Conceptual HyperGraph, Conceptual SuperHyperGraph, HyperGraph, SuperHyperGraph

1. Introduction

Graphs provide a standard language for modeling relational data: vertices represent entities, and edges represent pairwise interactions [1]. However, many real-world systems involve genuinely multiway relationships that cannot be faithfully captured by binary edges alone. A finite *hypergraph* addresses this limitation by allowing a *hyperedge* to connect any nonempty subset of the vertex set, thereby representing higher-order interactions [2, 3]. Hypergraphs have been extended and studied in various forms, such as fuzzy hypergraphs [4–6], directed hypergraphs [7, 8], and neutrosophic hypergraphs [9, 10].

Going beyond hypergraphs, a finite *SuperHyperGraph* is obtained by iterating the powerset operation; the resulting nested families of vertex sets naturally encode multilayer relational

structures [11,12]. In particular, SuperHyperGraphs enhance expressive power by simultaneously modeling multiway interactions and hierarchical aggregation (e.g., groups, groups of groups, and so forth), which makes them valuable for the study of layered networks, modular systems, and multiscale relational data. Such hierarchical models have been explored in a variety of applied settings, including applied science and the analysis of complex networks [13,14]. Moreover, because of the theoretical importance and strong potential applications of SuperHyperGraphs, several extended frameworks have been investigated, including *Meta SuperHyperGraphs* [15], *Plithogenic SuperHyperGraphs* [16,17], *Topological SuperHyperGraphs* [18], and *Neutrosophic SuperHyperGraphs* [19-21]. Unless stated otherwise, the index n in $\mathcal{P}_n(\cdot)$ and the level n of an n -SuperHyperGraph are assumed to be nonnegative integers. For convenience, Table 1 presents a compact comparison of graphs, hypergraphs, and n -SuperHyperGraphs.

Aspect	Graph	Hypergraph	SuperHyperGraph
Objects	Vertices, edges.	Vertices, hyperedges.	n -supervertices, n -superedges.
Links connect	Two vertices.	Any nonempty vertex subset.	Nonempty supervertex subsets (with nested supervertices).
Formal model	$G = (V, E), E \subseteq \binom{V}{2}$.	$H = (V, E), E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$.	$\text{SHG}^{(n)} = (V, E), V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0), E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$.
Main emphasis	Pairwise relations.	Higher-order relations.	Higher-order <i>and</i> hierarchical (multi-level) relations.

TABLE 1. Compact comparison of graphs, hypergraphs, and n -SuperHyperGraphs.

In parallel, *conceptual graphs* and *conceptual hypergraphs* provide knowledge-representation formalisms in which relations are typed and arguments are ordered [22-24]. A *conceptual graph* is a labeled bipartite graph whose concept nodes and relation nodes encode typed relations with ordered roles, whereas a *conceptual hypergraph* represents relation instances as typed hyperedges incident to an ordered tuple of vertices. These frameworks are attractive because they are both mathematically well-structured and human-readable, supporting semantic integration and explainable reasoning in applications ranging from natural language processing to decision-support systems.

Despite the extensive development of conceptual graph and conceptual hypergraph methodology, their SuperHyperGraph counterparts have not yet been systematically investigated. This

paper addresses that gap. We extend the conceptual graph and conceptual hypergraph frameworks to the SuperHyperGraph setting, introduce *Conceptual SuperHyperGraphs*, and study their basic structural properties. Table 2 summarizes the key distinctions among conceptual graphs (CG), conceptual hypergraphs (CHG), and conceptual SuperHyperGraphs (CSHG). Conceptual SuperHyperGraphs enable typed, ordered relations over nested entities, supporting hierarchical knowledge representation, explainable reasoning, and multiscale semantic integration.

Aspect	Conceptual Graph (CG)	Conceptual Hypergraph (CHG)	Hyper-Conceptual SuperHyperGraph (CSHG)
Core structure	Bipartite graph (concept nodes / relation nodes).	Typed hypergraph (vertices / hyperedges).	SuperHyperGraph-based (n -supervertices / relation nodes) with ordered incidence.
Relation instance	A relation node linked to its argument concepts.	A typed hyperedge incident to its argument vertices.	A relation node incident to argument supervertices (forming an n -superedge).
Argument order	Position map on arcs (roles).	Ordered incidence tuple $\text{inc}(a)$.	Position map (or $\text{inc}(r)$) on supervertices.
Argument objects	Individual concepts.	Individual vertices.	Nested entities (supervertices built via iterated powersets).

TABLE 2. Compact comparison of CG, CHG, and CSHG.

2. Preliminaries

This section fixes the notation used throughout the paper and summarizes the background material required later. Unless stated otherwise, all sets and structures considered here are finite.

2.1. SuperHyperGraphs

We next recall the set-theoretic constructions underlying SuperHyperGraphs and then state the formal definition.

Definition 2.1 (Base set). A *base set* S is the ambient universe of discourse associated with the context under study:

$$S = \{x \mid x \text{ is an admissible object in the given context}\}.$$

Consequently, any element of $\mathcal{P}(S)$ —and, more generally, of an iterated powerset such as $\mathcal{P}_n(S)$ —is a set ultimately assembled from elements of S .

Definition 2.2 (Powerset). (see [25]) For a set S , the *powerset* $\mathcal{P}(S)$ is the collection of all subsets of S , namely

$$\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}.$$

In particular, $\emptyset \in \mathcal{P}(S)$ and $S \in \mathcal{P}(S)$.

Definition 2.3 (Hypergraph). [26,27] A *hypergraph* is an ordered pair $H = (V, E)$ consisting of

- a finite set V of *vertices*, and
- a finite family E of nonempty subsets of V , called *hyperedges*.

Thus a hyperedge may contain more than two vertices, enabling the representation of genuinely multiway relations.

Definition 2.4 (n -th iterated powerset). [28,29] For a set X , define $\mathcal{P}_1(X) := \mathcal{P}(X)$ and, for $n \geq 1$, set recursively

$$\mathcal{P}_{n+1}(X) := \mathcal{P}(\mathcal{P}_n(X)).$$

When the empty set is excluded, we write

$$\mathcal{P}_n^*(X) := \mathcal{P}_n(X) \setminus \{\emptyset\}.$$

Definition 2.5 (n -SuperHyperGraph). (see [11,30]) Let V_0 be a finite, nonempty base set. Define the iterated powersets by

$$\mathcal{P}^0(V_0) := V_0, \quad \mathcal{P}^{k+1}(V_0) := \mathcal{P}(\mathcal{P}^k(V_0)) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

For $n \geq 0$, an n -*SuperHyperGraph* on V_0 is a pair

$$\text{SHG}^{(n)} = (V, E)$$

satisfying

$$V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0) \quad \text{and} \quad E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}.$$

The elements of V are called n -*supervertices*, and the elements of E are called n -*superedges*; equivalently, each n -superedge is a nonempty subset of the supervertex set V .

2.2. Conceptual Graphs and Conceptual HyperGraphs

A conceptual graph is a labeled bipartite graph consisting of concept nodes and relation nodes, designed to encode typed relations with ordered arguments [22–24]. In this paper, we restrict attention to relation instances whose arguments are pairwise distinct. A conceptual hypergraph is a typed hypergraph in which each hyperedge represents a relation instance together with an ordered list of argument vertices (cf. [31, 32]).

Definition 2.6 (Conceptual vocabulary). A *conceptual vocabulary* is a tuple

$$\mathcal{V} = (T_C, \leq_C, T_R, \text{ar}, I)$$

where

- T_C is a nonempty set of *concept types* equipped with a preorder \leq_C (read: “is-a”),
- T_R is a nonempty set of *relation types*,
- $\text{ar} : T_R \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ assigns to each relation type its *arity*, and
- I is a (possibly empty) set of *individual markers*.

We also adjoin a distinguished generic marker $* \notin I$, used to indicate an unspecified individual.

Definition 2.7 (Conceptual graph). Fix a conceptual vocabulary $\mathcal{V} = (T_C, \leq_C, T_R, \text{ar}, I)$. A *conceptual graph* over \mathcal{V} is a finite structure

$$G = (C, R, \Gamma, \lambda_C, \lambda_R, \pi)$$

satisfying:

- C and R are finite disjoint sets (the *concept nodes* and *relation nodes*);
- $\Gamma \subseteq R \times C$ is a finite set of *arcs* (so the underlying graph is bipartite);
- $\lambda_C : C \rightarrow T_C \times (I \cup \{*\})$ labels each concept node c by a pair $\lambda_C(c) = (\text{type}(c), \text{mark}(c))$;
- $\lambda_R : R \rightarrow T_R$ labels each relation node r by its relation type $\lambda_R(r)$;
- $\pi : \Gamma \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ assigns to each arc $(r, c) \in \Gamma$ a *position index* $\pi(r, c)$.

These data must satisfy the arity/position constraint: for every $r \in R$,

$$\{\pi(r, c) : (r, c) \in \Gamma\} = \{1, 2, \dots, \text{ar}(\lambda_R(r))\} \quad \text{and} \quad |\{c \in C : (r, c) \in \Gamma\}| = \text{ar}(\lambda_R(r)).$$

Equivalently, each relation node r has exactly $\text{ar}(\lambda_R(r))$ incident concept nodes, and the incident arcs are bijectively indexed by argument positions $1, \dots, \text{ar}(\lambda_R(r))$.

Definition 2.8 (Conceptual hypergraph). Fix a conceptual vocabulary $\mathcal{V} = (T_C, \leq_C, T_R, \text{ar}, I)$. A *conceptual hypergraph* over \mathcal{V} is a finite structure

$$H = (X, \mathcal{A}, \lambda_X, \lambda_{\mathcal{A}}, \text{inc})$$

such that:

- X is a finite set of *vertices* (concept vertices),
- \mathcal{A} is a finite set of *hyperedges* (relation occurrences),
- $\lambda_X : X \rightarrow T_C \times (I \cup \{*\})$ assigns to each vertex $x \in X$ a label

$$\lambda_X(x) = (\text{type}(x), \text{mark}(x)),$$

where $\text{type}(x) \in T_C$ and $\text{mark}(x) \in I \cup \{*\}$,

- $\lambda_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow T_R$ assigns to each hyperedge $a \in \mathcal{A}$ its relation type $\lambda_{\mathcal{A}}(a)$, and
- inc is an *ordered incidence map* assigning to each $a \in \mathcal{A}$ a tuple

$$\text{inc}(a) = (x_1, \dots, x_k) \in X^k, \quad k = \text{ar}(\lambda_{\mathcal{A}}(a)),$$

such that the vertices x_1, \dots, x_k are pairwise distinct.

Thus, each hyperedge a represents an ordered instance of a k -ary relation, whose arguments are precisely the vertices

$$x_1, \dots, x_k$$

listed in the order prescribed by $\text{inc}(a)$.

Theorem 2.9 (Equivalence of representations). *Fix a conceptual vocabulary \mathcal{V} . Every conceptual graph G over \mathcal{V} canonically determines a conceptual hypergraph H over \mathcal{V} , and conversely, every conceptual hypergraph H over \mathcal{V} canonically determines a conceptual graph G over \mathcal{V} . These constructions are mutually inverse up to isomorphism.*

Proof. (From conceptual graphs to conceptual hypergraphs.) Let $G = (C, R, \Gamma, \lambda_C, \lambda_R, \pi)$ be a conceptual graph. Set $X := C$, $\mathcal{A} := R$, $\lambda_X := \lambda_C$, and $\lambda_{\mathcal{A}} := \lambda_R$. For each $r \in R$, define $\text{inc}(r) = (x_1, \dots, x_k)$ with $k = \text{ar}(\lambda_R(r))$ by taking x_i to be the unique $c \in C$ such that $(r, c) \in \Gamma$ and $\pi(r, c) = i$. Uniqueness holds by the arity/position constraint in Definition 2.7. This yields a conceptual hypergraph H .

(From conceptual hypergraphs to conceptual graphs.) Let $H = (X, \mathcal{A}, \lambda_X, \lambda_{\mathcal{A}}, \text{inc})$ be a conceptual hypergraph. Set $C := X$, $R := \mathcal{A}$, $\lambda_C := \lambda_X$, and $\lambda_R := \lambda_{\mathcal{A}}$. For each $a \in \mathcal{A}$ with $\text{inc}(a) = (x_1, \dots, x_k)$, define arcs $(a, x_i) \in \Gamma$ for $i = 1, \dots, k$, and set $\pi(a, x_i) := i$. Then $\{\pi(a, c) : (a, c) \in \Gamma\} = \{1, \dots, k\}$ and $k = \text{ar}(\lambda_R(a))$ by definition of inc , so the arity/position constraint holds and we obtain a conceptual graph G .

It is immediate from the definitions that applying the second construction after the first (and vice versa) recovers the original structure up to the evident renaming of nodes, i.e. up to isomorphism. \square

3. Main Results: Conceptual Superhypergraphs

A *Conceptual SuperHyperGraph* is a labeled ordered incidence structure whose supervertices carry concepts, whose superedges represent relation instances, and whose underlying shadow is a SuperHyperGraph. We assume the conceptual vocabulary $\mathcal{V} = (T_C, \leq_C, T_R, \text{ar}, I)$ from Definition 2.6. Throughout, V_0 is a finite nonempty base set and $n \geq 0$.

Definition 3.1 (Conceptual n -SuperHyperGraph). A *conceptual n -SuperHyperGraph* over \mathcal{V} on V_0 is a finite structure

$$\mathfrak{C} = (V, R, \Gamma, \lambda_V, \lambda_R, \pi)$$

such that:

- V and R are finite disjoint sets (the n -supervertices and relation nodes);
- $V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0)$;
- $\Gamma \subseteq R \times V$ is a finite set of arcs (so the underlying graph is bipartite);
- $\lambda_V : V \rightarrow T_C \times (I \cup \{*\})$ labels each supervertex v by a pair $\lambda_V(v) = (\text{type}(v), \text{mark}(v))$;
- $\lambda_R : R \rightarrow T_R$ labels each relation node r by its relation type $\lambda_R(r)$;
- $\pi : \Gamma \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ assigns to each arc $(r, v) \in \Gamma$ a *position index* $\pi(r, v)$,

and these data satisfy the arity/position constraint: for every $r \in R$, letting $k = \text{ar}(\lambda_R(r))$,

$$\{\pi(r, v) : (r, v) \in \Gamma\} = \{1, 2, \dots, k\} \quad \text{and} \quad |\{v \in V : (r, v) \in \Gamma\}| = k.$$

Example 3.2 (A conceptual 2-SuperHyperGraph). Let the conceptual vocabulary be $\mathcal{V} = (T_C, \leq_C, T_R, \text{ar}, I)$ with

$$T_C = \{\text{Person}, \text{City}\}, \quad T_R = \{\text{LivesIn}\}, \quad \text{ar}(\text{LivesIn}) = 2, \quad I = \{\text{Alice}, \text{Tokyo}\}.$$

Let the base set be $V_0 = \{a, b\}$ and take $n = 2$, so

$$\mathcal{P}^2(V_0) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(V_0)).$$

Define four 2-supervertices (i.e., subsets of $\mathcal{P}(V_0)$) by

$$u_1 := \{\{a\}\}, \quad u_2 := \{\{b\}\}, \quad u_3 := \{\{a, b\}\}, \quad u_4 := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Then

$$V = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subseteq \mathcal{P}^2(V_0).$$

Let $R = \{r\}$ be a singleton set of relation nodes, and define the arc set

$$\Gamma = \{(r, u_4), (r, u_2)\} \subseteq R \times V.$$

Assign labels to 2-supervertices by

$$\begin{aligned} \lambda_V(u_4) &= (\text{Person}, \text{Alice}), & \lambda_V(u_2) &= (\text{City}, \text{Tokyo}), \\ \lambda_V(u_1) &= (\text{City}, *), & \lambda_V(u_3) &= (\text{Person}, *), \end{aligned}$$

label the relation node by

$$\lambda_R(r) = \text{LivesIn},$$

and assign argument positions by

$$\pi(r, u_4) = 1, \quad \pi(r, u_2) = 2.$$

Then $k = \text{ar}(\lambda_R(r)) = 2$, and indeed

$$\{\pi(r, v) : (r, v) \in \Gamma\} = \{1, 2\}, \quad |\{v \in V : (r, v) \in \Gamma\}| = 2,$$

so $\mathfrak{C} = (V, R, \Gamma, \lambda_V, \lambda_R, \pi)$ is a well-defined conceptual 2-SuperHyperGraph. Intuitively, the supervertex $u_4 = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ encodes a *nested* entity (a set of subsets of V_0), so the statement ‘‘Alice lives in Tokyo’’ is represented with arguments that already carry a two-level grouping structure.

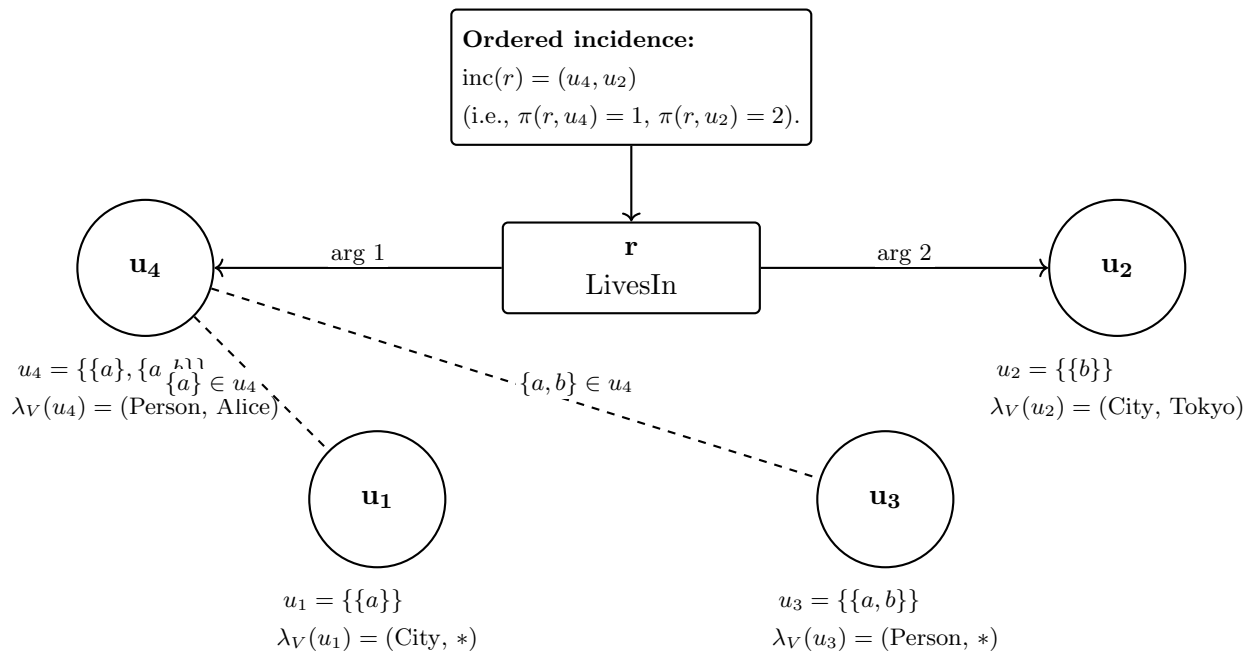


FIGURE 1. A clearer depiction of a conceptual 2-SuperHyperGraph. The relation node r (type LivesIn) has two ordered arguments: arg 1 is the 2-supervertex $u_4 = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ labeled (Person, Alice), and arg 2 is $u_2 = \{\{b\}\}$ labeled (City, Tokyo). Dashed lines indicate that $\{a\}$ and $\{a, b\}$ are elements of the nested set u_4 .

Example 3.3 (Another conceptual 2-SuperHyperGraph). We present a second, self-contained example of a conceptual 2-SuperHyperGraph, this time with a *ternary* relation.

Vocabulary. Let the conceptual vocabulary be $\mathcal{V} = (T_C, \leq_C, T_R, \text{ar}, I)$, where

$$T_C = \{\text{Person}, \text{City}\}, \quad \leq_C \text{ is the identity preorder on } T_C,$$

$$T_R = \{\text{Travel}\}, \quad \text{ar}(\text{Travel}) = 3, \quad I = \{\text{Alice}, \text{Osaka}, \text{Tokyo}\}.$$

Intuitively, $\text{Travel}(p, c_1, c_2)$ means: “person p travels from city c_1 to city c_2 .”

Base set and level. Let $V_0 = \{a, b, c\}$ and take $n = 2$. Hence

$$\mathcal{P}^2(V_0) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(V_0)).$$

Supervertices. Define the following 2-supervertices (each is a subset of $\mathcal{P}(V_0)$):

$$u_1 := \{\{a\}, \{a, b\}\}, \quad u_2 := \{\{b\}\}, \quad u_3 := \{\{c\}\}, \quad u_4 := \{\{b, c\}\}.$$

Let

$$V = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subseteq \mathcal{P}^2(V_0).$$

Relation node and arcs. Let $R = \{r\}$ be a singleton set of relation nodes and define

$$\Gamma = \{(r, u_1), (r, u_2), (r, u_3)\} \subseteq R \times V.$$

Labels and argument order. Assign labels to 2-supervertices by

$$\lambda_V(u_1) = (\text{Person}, \text{Alice}), \quad \lambda_V(u_2) = (\text{City}, \text{Osaka}),$$

$$\lambda_V(u_3) = (\text{City}, \text{Tokyo}), \quad \lambda_V(u_4) = (\text{City}, *).$$

Label the relation node by

$$\lambda_R(r) = \text{Travel},$$

and define the argument-position map $\pi : \Gamma \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ by

$$\pi(r, u_1) = 1, \quad \pi(r, u_2) = 2, \quad \pi(r, u_3) = 3.$$

Then $k = \text{ar}(\lambda_R(r)) = 3$ and

$$\{\pi(r, v) : (r, v) \in \Gamma\} = \{1, 2, 3\}, \quad |\{v \in V : (r, v) \in \Gamma\}| = 3,$$

so $\mathfrak{C} = (V, R, \Gamma, \lambda_V, \lambda_R, \pi)$ is a well-defined conceptual 2-SuperHyperGraph. It encodes the statement: “Alice travels from Osaka to Tokyo,” where the first argument $u_1 = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ is a genuinely nested (two-level) entity.

Definition 3.4 (Incidence set and ordered incidence). Let $\mathfrak{C} = (V, R, \Gamma, \lambda_V, \lambda_R, \pi)$ be a conceptual n -SuperHyperGraph. For each $r \in R$ define its (crisp) *incidence set*

$$\text{Inc}(r) := \{v \in V : (r, v) \in \Gamma\} \subseteq V.$$

Also define its *ordered incidence tuple* $\text{inc}(r) = (v_1, \dots, v_k) \in V^k$, where $k = \text{ar}(\lambda_R(r))$ and v_i is the unique supervertex such that $(r, v_i) \in \Gamma$ and $\pi(r, v_i) = i$.

Lemma 3.5 (Well-definedness of $\text{inc}(r)$). *In Definition 3.4, for each $r \in R$ the tuple $\text{inc}(r)$ is well-defined and unique. Moreover, $\text{Inc}(r) \neq \emptyset$ for every $r \in R$.*

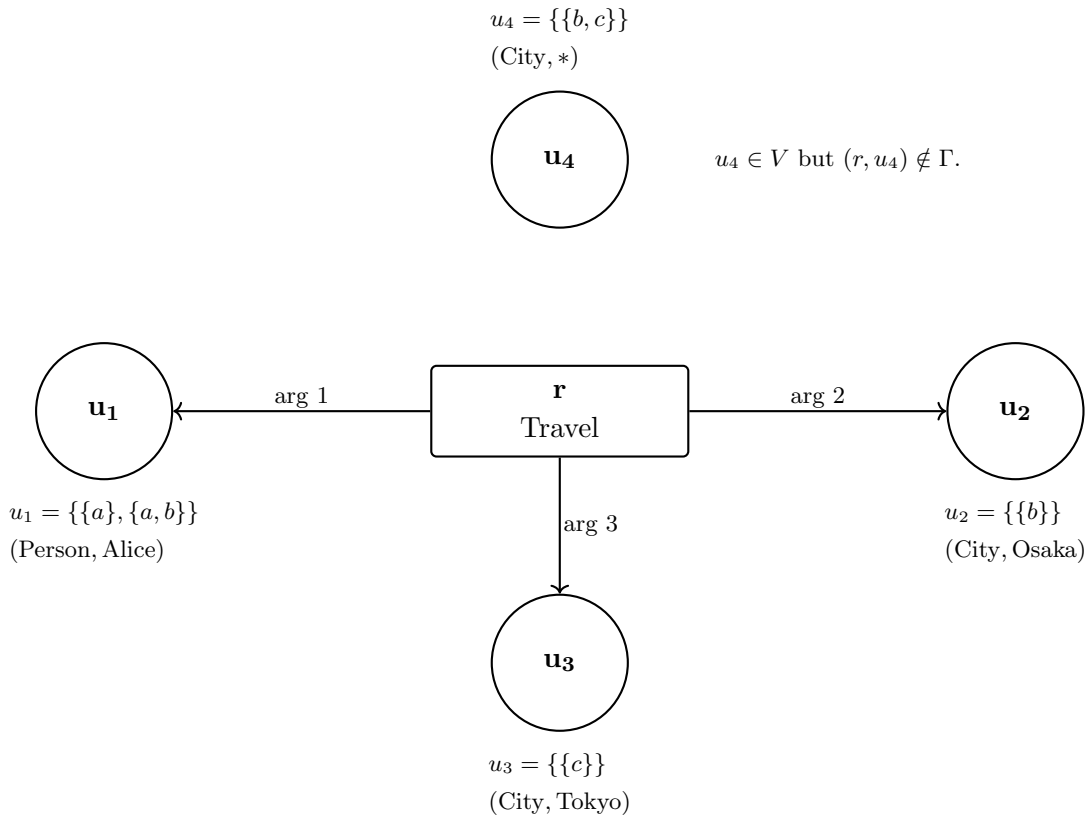


FIGURE 2. A conceptual 2-SuperHyperGraph with one ternary relation node Travel and ordered arguments (u_1, u_2, u_3) .

Proof. Fix $r \in R$ and set $k = \text{ar}(\lambda_R(r)) \geq 1$. By Definition 3.1, the set of position indices $\{\pi(r, v) : (r, v) \in \Gamma\}$ equals $\{1, \dots, k\}$, so for each $i \in \{1, \dots, k\}$ there exists at least one $v \in V$ with $(r, v) \in \Gamma$ and $\pi(r, v) = i$. The second constraint $|\{v : (r, v) \in \Gamma\}| = k$ forces this v to be unique for each i , hence $\text{inc}(r)$ is well-defined and unique. Finally, $k \geq 1$ implies $\text{Inc}(r)$ contains at least one vertex, hence $\text{Inc}(r) \neq \emptyset$. \square

Theorem 3.6 (Underlying n -SuperHyperGraph structure). *Let $\mathfrak{C} = (V, R, \Gamma, \lambda_V, \lambda_R, \pi)$ be a conceptual n -SuperHyperGraph on V_0 . Define*

$$E := \{\text{Inc}(r) \subseteq V : r \in R\} \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}.$$

Then (V, E) is an n -SuperHyperGraph on V_0 in the sense of Definition 2.5.

Proof. By Definition 3.1, we have $V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0)$. For each $r \in R$, $\text{Inc}(r) \subseteq V$ by definition and $\text{Inc}(r) \neq \emptyset$ by Lemma 3.5. Hence $E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$, and therefore (V, E) is an n -SuperHyperGraph on V_0 . \square

Remark 3.7 (Forgetting concept/relation labels and argument order). Theorem 3.6 formalizes the fact that every conceptual n -SuperHyperGraph determines an underlying n -SuperHyperGraph. This underlying structure is obtained by forgetting the concept and relation labels λ_V, λ_R as well as the argument-order information π , and retaining only the supervertex set

$$V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0)$$

together with the superedge family

$$E = \{\text{Inc}(r) \mid r \in R\}.$$

Hence, the shadow records only which supervertices are incident with each relation node, but it does not retain labels, marks, or positional information. In particular, distinct relation nodes having the same incidence set give rise to the same superedge in the underlying n -SuperHyperGraph.

Theorem 3.8 (Conceptual graphs embed as conceptual 0-SuperHyperGraphs). *Let $G = (C, R, \Gamma, \lambda_C, \lambda_R, \pi)$ be a conceptual graph over \mathcal{V} (Definition 2.7). Let $V_0 := C$ and $n := 0$. Then $C = \mathcal{P}^0(V_0)$, and*

$$\mathfrak{C}_G := (V, R, \Gamma, \lambda_V, \lambda_R, \pi) \quad \text{with} \quad V := C, \quad \lambda_V := \lambda_C$$

is a conceptual 0-SuperHyperGraph on V_0 . Moreover, the underlying 0-SuperHyperGraph of \mathfrak{C}_G (Theorem 3.6) has supervertex set C and superedges $\{\text{Inc}(r) : r \in R\}$.

Proof. Since $n = 0$, we have $\mathcal{P}^0(V_0) = V_0 = C$, hence $V = C \subseteq \mathcal{P}^0(V_0)$. All other axioms of Definition 3.1 are exactly those of Definition 2.7. The last statement follows directly from Theorem 3.6. \square

Theorem 3.9 (Conceptual hypergraphs embed as conceptual 0-SuperHyperGraphs). *Let $H = (X, \mathcal{A}, \lambda_X, \lambda_{\mathcal{A}}, \text{inc})$ be a conceptual hypergraph over \mathcal{V} (Definition 2.8). Let $V_0 := X$ and $n := 0$. Define*

$$V := X, \quad R := \mathcal{A}, \quad \lambda_V := \lambda_X, \quad \lambda_R := \lambda_{\mathcal{A}}.$$

For each $a \in \mathcal{A}$ with $\text{inc}(a) = (x_1, \dots, x_k)$ (where $k = \text{ar}(\lambda_{\mathcal{A}}(a))$), set

$$\Gamma := \{(a, x_i) : a \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq k\}, \quad \pi(a, x_i) := i.$$

Then $\mathfrak{C}_H = (V, R, \Gamma, \lambda_V, \lambda_R, \pi)$ is a conceptual 0-SuperHyperGraph on V_0 . Furthermore, the ordered incidence tuple of each $a \in R$ in \mathfrak{C}_H equals the original $\text{inc}(a)$ in H .

Proof. Because $n = 0$ and $V_0 = X$, we have $V = X \subseteq \mathcal{P}^0(V_0) = V_0$. Fix $a \in R = \mathcal{A}$ and write $\text{inc}(a) = (x_1, \dots, x_k)$ with $k = \text{ar}(\lambda_R(a))$. By construction, the arcs incident to a are exactly (a, x_i) for $i = 1, \dots, k$, and their position indices are $\pi(a, x_i) = i$. Hence

$$\{\pi(a, v) : (a, v) \in \Gamma\} = \{1, \dots, k\} \quad \text{and} \quad |\{v : (a, v) \in \Gamma\}| = k,$$

so the arity/position constraint of Definition 3.1 holds. Thus \mathfrak{C}_H is a conceptual 0-SuperHyperGraph. Finally, the ordered incidence $\text{inc}(a)$ recovered from π is (x_1, \dots, x_k) , which is exactly the original tuple in H . \square

4. Conclusion

In this paper, we extended classical conceptual formalisms within the SuperHyperGraph framework by introducing *Conceptual SuperHyperGraphs* and investigating their basic structural properties, including their hierarchical organization and their relationships with conceptual graphs and conceptual hypergraphs. We expect that future research will further develop this framework in several directions, such as the incorporation of Neutrosophic Sets [33, 34], Double-Valued Neutrosophic Sets [35, 36], Plithogenic Sets [37, 38], and Uncertain Sets [39, 40]. Such extensions may provide richer ways to represent indeterminacy, contradiction, attribute interaction, and incomplete information in higher-order conceptual knowledge structures.

Funding

This study was conducted without any financial support from external organizations or grants.

Acknowledgments

We would like to express our sincere gratitude to everyone who provided valuable insights, support, and encouragement throughout this research. We also extend our thanks to the readers for their interest and to the authors of the referenced works, whose scholarly contributions have greatly influenced this study. Lastly, we are deeply grateful to the publishers and reviewers who facilitated the dissemination of this work.

Use of Generative AI and AI-Assisted Tools

We use generative AI and AI-assisted tools for tasks such as English grammar checking, and we do not employ them in any way that violates ethical standards.

Supplementary Information

No supplementary materials accompany this paper.

Disclaimer

The ideas presented here are theoretical and have not yet been validated through empirical testing. While we have strived for accuracy and proper citation, inadvertent errors may remain. Readers should verify any referenced material independently. The opinions expressed are those of the authors and do not necessarily reflect the views of their institutions.

References

- [1] Reinhard Diestel. *Graph theory*. Springer (print edition); Reinhard Diestel (eBooks), 2024.
- [2] Yue Gao, Zizhao Zhang, Haojie Lin, Xibin Zhao, Shaoyi Du, and Changqing Zou. Hypergraph learning: Methods and practices. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 44(5):2548–2566, 2020.
- [3] Yifan Feng, Haoxuan You, Zizhao Zhang, Rongrong Ji, and Yue Gao. Hypergraph neural networks. In *Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence*, volume 33, pages 3558–3565, 2019.
- [4] Waheed Ahmad Khan, Waqar Arif, Hossein Rashmanlou, and Saeed Kosari. Interval-valued picture fuzzy hypergraphs with application towards decision making. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 70(2):1103–1125, 2024.
- [5] Zengtai Gong and Lele He. An attribute reduction method of fuzzy formal contexts based on fuzzy hypergraphs in rough sets. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 17(4):166, 2026.
- [6] John N Mordeson and Premchand S Nair. *Fuzzy graphs and fuzzy hypergraphs*, volume 46. Physica, 2012.
- [7] Sasa Chen, Dan Liu, Binrui Wang, Jun Mao, and Xiaohang Li. A trade-off between time and energy of stochastic higher-order networks on multi-directed hypergraphs. *IEEE Control Systems Letters*, 9:3143–3148, 2026.
- [8] Zhengao Guo, Yinzuo Zhou, and Jie Zhou. Robustness of interdependent directed hypergraphs with completely connected component. *Chaos, Solitons & Fractals*, 208:118091, 2026.
- [9] Anam Luqman, Muhammad Akram, and Florentin Smarandache. Complex neutrosophic hypergraphs: new social network models. *Algorithms*, 12(11):234, 2019.
- [10] Muhammad Aslam Malik, Ali Hassan, Said Broumi, Assia Bakali, Mohamed Talea, and Florentin Smarandache. Isomorphism of bipolar single valued neutrosophic hypergraphs. *Collected Papers. Volume IX: On Neutrosophic Theory and Its Applications in Algebra*, page 72, 2022.
- [11] Florentin Smarandache. *Extension of HyperGraph to n-SuperHyperGraph and to Plithogenic n-SuperHyperGraph, and Extension of HyperAlgebra to n-ary (Classical-/Neutro-/Anti-) HyperAlgebra*. Infinite Study, 2020.
- [12] Takaaki Fujita and Florentin Smarandache. *HyperGraph and SuperHyperGraph Theory with Applications*. Neutrosophic Science International Association (NSIA) Publishing House, 2026.
- [13] Berrocal Villegas Salomón Marcos, Montalvo Fritas Willner, Berrocal Villegas Carmen Rosa, Flores Fuentes Rivera María Yissel, Espejo Rivera Roberto, Laura Daysi Bautista Puma, and Dante Manuel Macazana Fernández. Using plithogenic n-superhypergraphs to assess the degree of relationship between information skills and digital competencies. *Neutrosophic Sets and Systems*, 84:513–524, 2025.
- [14] Nelly Hodelín Amable, Elizabeth Esther Vergel De Salazar, Martha Gloria Martínez Isaac, Olivia Catalina Olavarría Sánchez, and Johanna Mariuxi Solís Palma. Representation of motivational dynamics in school environments through plithogenic n-superhypergraphs with family participation. *Neutrosophic Sets and Systems*, 92:570–583, 2025.

- [15] Takaaki Fujita. Metahypergraphs, metasuperhypergraphs, and iterated metagraphs: Modeling graphs of graphs, hypergraphs of hypergraphs, superhypergraphs of superhypergraphs, and beyond. *Current Research in Interdisciplinary Studies*, 4(5):1–23, 2025.
- [16] Julio Cesar Méndez Bravo, Claudia Jeaneth Bolanos Piedrahita, Manuel Alberto Méndez Bravo, and Luis Manuel Pilacuan-Bonete. Integrating smed and industry 4.0 to optimize processes with plithogenic n-superhypergraphs. *Neutrosophic Sets and Systems*, 84:328–340, 2025.
- [17] Eduardo Martín Campoverde Valencia, Jessica Paola Chuisaca Vásquez, and Francisco Ángel Becerra Lois. Multineutrosophic analysis of the relationship between survival and business growth in the manufacturing sector of azuay province, 2020–2023, using plithogenic n-superhypergraphs. *Neutrosophic Sets and Systems*, 84(1):28, 2025.
- [18] Takaaki Fujita and Florentin Smarandache. Topological generalizations of graphs: Integrating hypergraph and superhypergraph perspectives. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 17(2):322–337, 2025.
- [19] T Fujita. On spherical neutrosophic superhypergraphs and complex spherical neutrosophic superhypergraphs. *Int. J. Open Problems Complex Analysis*, 18(1), 2026.
- [20] Takaaki Fujita and Florentin Smarandache. *Neutrosophic soft n-super-hypergraphs with real-world applications*. Infinite Study, 2025.
- [21] Masoud Ghods, Zahra Rostami, and Florentin Smarandache. Introduction to neutrosophic restricted superhypergraphs and neutrosophic restricted superhypertrees and several of their properties. *Neutrosophic Sets and Systems*, 50:480–487, 2022.
- [22] Carlos Mario Zapata Jaramillo, Alexander Gelbukh, and Fernando Arango Isaza. Pre-conceptual schema: A conceptual-graph-like knowledge representation for requirements elicitation. In *Mexican International Conference on Artificial Intelligence*, pages 27–37. Springer, 2006.
- [23] Arthur C Graesser and Sharon M Goodman. How to construct conceptual graph structures. In *Understanding expository text*, pages 363–384. Routledge, 2017.
- [24] Jiwei Zhong, Haiping Zhu, Jianming Li, and Yong Yu. Conceptual graph matching for semantic search. In *International conference on conceptual structures*, pages 92–106. Springer, 2002.
- [25] Thomas Jech. *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded*. Springer, 2003.
- [26] Alain Bretto. Hypergraph theory. *An introduction. Mathematical Engineering. Cham: Springer*, 1, 2013.
- [27] Claude Berge. *Hypergraphs: combinatorics of finite sets*, volume 45. Elsevier, 1984.
- [28] Florentin Smarandache. Foundation of superhyperstructure & neutrosophic superhyperstructure. *Neutrosophic Sets and Systems*, 63(1):21, 2024.
- [29] Huda E Khali, Gonca D GÜNGÖR, and Muslim A Noah Zaina. Neutrosophic superhyper bi-topological spaces: Original notions and new insights. *Neutrosophic Sets and Systems*, 51(1):3, 2022.
- [30] Florentin Smarandache. *Introduction to the n-SuperHyperGraph-the most general form of graph today*. Infinite Study, 2022.
- [31] Daniel-Cristian Crăciunean. Subsummation automata in conceptual graphs. *International Journal of Advanced Statistics and IT&C for Economics and Life Sciences*, 15(1), 2025.
- [32] Aruna Bansal. Hgql: Supporting schematic hypergraphs in graphql. In *Proceedings of the 27th International Database Engineered Applications Symposium*, pages 9–16, 2023.
- [33] Said Broumi, Mohamed Talea, Assia Bakali, and Florentin Smarandache. Single valued neutrosophic graphs. *Journal of New theory*, (10):86–101, 2016.
- [34] Haibin Wang, Florentin Smarandache, Yanqing Zhang, and Rajshekhar Sunderraman. *Single valued neutrosophic sets*. Infinite study, 2010.
- [35] Lin Wei. An integrated decision-making framework for blended teaching quality evaluation in college english courses based on the double-valued neutrosophic sets. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 45:3259–3266, 2023.

- [36] Kanghua Du and Yuming Du. Research on performance evaluation of intangible assets operation and management in sports events with double-valued neutrosophic sets. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 45:2813–2822, 2023.
- [37] Florentin Smarandache. *Plithogenic set, an extension of crisp, fuzzy, intuitionistic fuzzy, and neutrosophic sets-revisited*. Infinite study, 2018.
- [38] Fazeelat Sultana, Muhammad Gulistan, Mumtaz Ali, Naveed Yaqoob, Muhammad Khan, Tabasam Rashid, and Tauseef Ahmed. A study of plithogenic graphs: applications in spreading coronavirus disease (covid-19) globally. *Journal of ambient intelligence and humanized computing*, 14(10):13139–13159, 2023.
- [39] Takaaki Fujita and Florentin Smarandache. A unified framework for u -structures and functorial structure: Managing super, hyper, superhyper, tree, and forest uncertain over/under/off models. *Neutrosophic Sets and Systems*, 91:337–380, 2025.
- [40] Takaaki Fujita and Florentin Smarandache. *A Dynamic Survey of Fuzzy, Intuitionistic Fuzzy, Neutrosophic, Plithogenic, and Extensional Sets*. Neutrosophic Science International Association (NSIA), 2025.

Disclaimer/Publisher’s Note: The statements, opinions and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and not of the publisher and/or the editor(s). This publisher and/or the editor(s) disclaim responsibility for any injury to people or property resulting from any ideas, methods, instructions or products referred to in the content.



Article

مستويات الحقيقة السردية والبنية النفسية للراوي في رواية الإحساس بالنهاية
للروائي جوليان بارنز: قراءة نيتروسوفية ونفسية

Levels of Narrative Truth and Psychological Structure in Julian
Barnes's *The Sense of an Ending*: A Neutrosophic and
Psychological Reading

Mohammed Ibrahim Mohammed Omer Hommed^{1,*}

¹ Faculty of Arts, Red Sea University, Port Sudan, Sudan, e-mail: ibr2005_5@yahoo.com

* Correspondence: e-mail: ibr2005_5@yahoo.com

Received: 04, 03, 2026; Accepted: 04, 09, 2026

ملخص:

تهدف هذه الدراسة إلى تطبيق المنطق النيتروسوفي بطريقة تتناسب مع خصوصية الأدب وتحافظ على جانبه الجمالي، وذلك بالكشف عن مستويات الحقيقة السردية- من حيث الصدق والكذب والضبابية- في رواية الإحساس بالنهاية، و تسليط الضوء على البنية النفسية للراوي وتأثيرها في تباين مستويات الحقيقة السردية. وقد استخدمت الدراسة المنهج الوصفي التحليلي من وجهتي نظر نيتروسوفية ونفسية، وتوصلت من خلاله إلى نتائج مهمة تمثلت في:

فاعلية المنطق النيتروسوفي في استيعاب السيولة السردية، وصلاحيته أداة نقدية تساعد في تفكيك النصوص السردية التي تقوم في بنائها على تقنية الراوي غير الموثوق، واحتمالية الحقيقة السردية- في رواية الإحساس بالنهاية- وتوزعها بين الدرجات النيتروسوفية الثلاث: (الصدق (T) ، والكذب (F) ، والضبابية (I))، بالإضافة إلى سيادة الضبابية في تاريخ الراوي أنتوني وبستر نتيجة لمحاولاته المتكررة لتزييف الواقع فرارا من الألم النفسي والشعور بالدونية (عقدة النقص)، واستخدامه آليات دفاعية نفسية كالكبت والتبرير والإسقاط، وانفتاح الضبابية السردية على جوانب مهمة لتأويل السرد الروائي، الأمر الذي يجعل الرواية قابلة لأكثر من قراءة.

كلمات مفتاحية:

المنطق النيتروسوفي، جوليان بارنز، رواية الإحساس بالنهاية، الحقيقة السردية، اللاتحديد السردية، التحليل النفسي، آليات الدفاع.

Abstract:

This study aims to apply Neutrosophic logic in a manner consistent with the unique nature of literature while preserving its aesthetic dimensions. It seeks to uncover the levels of narrative truth—in terms of truth, falsehood, and indeterminacy (neutrality)—within the novel *The Sense of an Ending*. Furthermore, it highlights the psychological structure of the narrator and its impact on the varying levels of narrative truth.

The study employs a descriptive-analytical approach from both Neutrosophic and psychological perspectives. It has reached several significant conclusions, including:

The efficacy of Neutrosophic logic in comprehending narrative fluidity and its validity as a critical tool for deconstructing texts built on the "unreliable narrator" technique.

The probability of narrative truth in *The Sense of an Ending* is distributed across the three Neutrosophic degrees: Truth (T), Falsehood (F), and Indeterminacy (I).

The dominance of Indeterminacy (I) in the history of the narrator, Tony Webster, resulting from his repeated attempts to distort reality as an escape from psychological pain and inferiority complexes.

The narrator's use of psychological defense mechanisms, such as repression, rationalization, and projection.

The openness of narrative indeterminacy to vital interpretive dimensions, rendering the novel subject to multiple readings.

Keywords:

Neutrosophic Logic, Julian Barnes, *The Sense of an Ending*, Narrative Truth, Narrative Indeterminacy, Psychoanalysis, Defense Mechanisms.

1. مقدمة:

فازت (رواية الإحساس بالنهاية) للروائي جوليان بارنز بجائزة مان بوكر في العام 2011م، ووضعته في مصاف الروائيين العظماء في القرن الواحد وعشرين، ومنحته شهرة عالمية، كما حازت الرواية على اهتمام النقاد، وذلك لما تتمتع به من مزايا الأدب الكلاسيكي، ولما تحتويه من غوص عميق في قضايا الذاكرة والندم والتقدم في العمر، والصراع بين الماضي والحاضر، فضلاً عما تتميز به من غموض وتعارض فيما ترويها الرواية من أحداث.

2. إشكالية الدراسة:

تكمن إشكالية هذه الدراسة في كونها تبحث عن إمكانية دراسة الأدب من وجهة نظر المنطق النيتروسوفي دون الإخلال بجوانبه الإنسانية والجمالية، وذلك بالتطبيق على رواية (الإحساس بالنهاية) للروائي جوليان بارنز، والكشف عن مستويات الحقيقة السردية فيها، وذلك لما تقدمه النيتروسوفية من إمكانية لتفكيك التناقضات داخل تلك المستويات السردية، وتوظيف تلك المستويات في تحليل البنية النفسية للراوي.

3. أسئلة الدراسة:

تحاول الدراسة الإجابة عن الأسئلة الآتية:

- 1.3. ما مدى إمكانية دراسة الأدب عن طريق استخدام المنهج النيتروسوفي؟
- 2.3. كيف يمكن تعديل المنهج النيتروسوفي ليتناسب مع الطبيعة الإنسانية والجمالية للنص الأدبي؟
- 3.3. ما مظاهر مستويات الحقيقة السردية من حيث الصدق والكذب والضبابية في رواية الإحساس بالنهاية؟
- 4.3. كيف يسهم المنهج النيتروسوفي في الكشف عن الطبقات العميقة للرواية؟
- 5.3. ما العلاقة بين درجات الحقيقة السردية في الرواية وبين البنية النفسية للراوي؟

4. أهداف الدراسة:

تهدف الدراسة إلى تحقيق الأهداف الآتية:

- 1.4. محاولة تطبيق المنهج النيتروسوفي بطريقة تتناسب مع خصوصية الأدب وتحافظ على الجانب الجمالي فيه.
- 2.4. الكشف عن مستويات الحقيقة السردية من حيث الصدق والكذب والضبابية في رواية الإحساس بالنهاية.
- 3.4. تسليط الضوء على البنية النفسية للراوي وتأثيرها في تباين مستويات الحقيقة السردية.
- 4.4. محاولة التأسيس لمنهج نيتروسوفي أدبي جديد يستفيد من درجات الحقيقة في المنطق النيتروسوفي ويحافظ على الجانب الجمالي والتأويلي للأدب.

5. أهمية الدراسة:

ترجع أهمية الدراسة إلى كونها محاولة تأسيسية لمنهج نقدي جديد يجمع بين أدوات المنطق النيتروسوفي وأدوات التحليل النفسي، والاستفادة من ذلك في الكشف عن مستويات الحقيقة السردية وتأثيرها في انفتاح النص الروائي إلى أكثر من تأويل سردي.

6. الحدود الموضوعية للدراسة:

تقتصر حدود هذه الدراسة على دراسة رواية (الإحساس بالنهاية) للروائي جوليان بارنز؛ لما تمثله من نموذج مناسب لتشويش الذاكرة وإعادة كتابة الماضي، وذلك من خلال الاستفادة من أدوات المنطق النيتروسوفي اقتصاراً على التصنيف النوعي للحقيقة السردية من حيث الصدق والكذب والضبابية، دون التقيد بقيم حسابية نيتروسوفية لمستويات الحقيقة السردية لأحداث الرواية، ويعتمد التحليل على القرائن الداخلية للنص الروائي، دون ادعاء التفسير النهائي لجميع رموز الرواية، كما تستخدم الدراسة التصنيف النيتروسوفي لأحداث الرواية مدخلاً للتحليل النفسي لشخصية الراوي، للكشف عن الظروف والملابسات النفسية التي صحبت تلك الأحداث، وبيان إلى أي مدى يمكن أن تسهم الضبابية في الانفتاح على أكثر من تأويل للعمل السردي.

7. منهج الدراسة:

تستخدم الدراسة المنهج الوصفي التحليلي من وجهتي نظر نيتروسوفية ونفسية، حيث تصنف مستويات أحداث الرواية إلى ثلاث درجات نيتروسوفية نوعية هي: الصدق، والكذب، والضبابية، دون التقيد بقيم حسابية لمستويات الحقيقة السردية لأحداث الرواية، بل يتم استخدام مستويات ذلك التقسيم النيتروسوفي كمؤشرات دلالية تساعد في تفسير النص الأدبي، وتظهره كخبرة نفسية وتاريخية تتقاطع فيها الذاكرة مع الخيال، ثم الاستفادة من أدوات التحليل النفسي في تحليل البنية النفسية لشخصية الراوي، وبيان تأثيرها في صناعة ذلك التباين بين تلك الدرجات النيتروسوفية للحقيقة السردية، وبذلك تتمثل الخطوات المنهجية للدراسة على استخدام الدرجات النيتروسوفية ولكن بدون جانب كمي، مع الإبقاء على الجانب الوظيفي لتلك الدرجات، ألا وهو الكشف عن التناقض ودرجات الحقيقة، ثم استخدام أدوات التحليل النفسي لتفسير ذلك التناقض.

8. الدراسات السابقة:

هنالك ندرة في الدراسات التي تستخدم المنهج النيتروسوفي في تحليل النصوص الأدبية، ومن الدراسات الرائدة عربياً في هذا المجال دراسة أحمد سلامة ومحمد كمال سرحان، وهدي إسماعيل خالد، وأحمد خضر عيسى، (التحليل النيتروسوفي لجماليات اللغة في رواية "الرجل والطريق")، [1]. وقد استخدمت الدراسة المنهج النيتروسوفي والتحليل البنوي، وذلك بتحليل رواية (الرجل والطريق) بأدوات المنطق النيتروسوفي، وكشفت عن تعدد طبقات السرد في المستويات النيتروسوفية الثلاثة (T, I, F)، كما خلصت أيضاً إلى تأكيد جدوى استخدام المنطق النيتروسوفي في دراسة الظواهر الأدبية المعقدة.

وتتفق هذه الدراسة مع الدراسة السابقة في كونها يستخدمان أدوات المنطق النيتروسوفي بتقسيم حقيقة النص الأدبي إلى درجات نيتروسوفية بصورة عامة، ثم تختلف هذه الدراسة عن الدراسة السابقة في ميدان التطبيق وطريقة تطبيقه، حيث تهتم هذه الدراسة بتحليل نص سردي رواية (الإحساس بالنهاية) للروائي جوليان بارنز، ووتحويل نصها إلى مجتمع نيتروسوفي سردي، ودراسة عينات نيتروسوفي سردية منها، كما تختلف أيضاً هذه الدراسة عن الدراسة السابقة في كونها تستفيد من أدوات التحليل النفسي في الكشف عن البنية النفسية لشخصية الراوي في النص موضوع الدراسة.

9. نبذة عن نشأة المنطق النيتروسوفي:

اعتمد المنطق الكلاسيكي على معيار ثنائي في تقييم القضايا وهو معيار {الصواب والخطأ} {true, false}، ومع تطور العلوم لم يعد هذا المعيار الثنائي كافياً لمواكبة التعقيدات العلمية، فظهرت الحاجة إلى منطق جديد يتعامل مع القيم الضبابية التي تقع خارج إطار ذلك التصنيف الثنائي، الذي لم يكن يسمح للعنصر إلا بأحد أمرين: إما الانتماء الكامل، وإما عدمه. وكان أول ظهور لهذا المنطق الضبابي (Fuzzy Logic) على يد العالم (لطف زاده Lotfi A. Zadeh) في عام 1965م، حيث وضع نظرية الفئات الضبابية، التي تسمح بالاستنتاج من التعبيرات اللغوية غير المحددة، وقد لاقت النظرية قبولاً مبكراً عند الصينيين واليابانيين، وذلك قبل أن تجد رواجاً واهتماماً في الثمانينيات، وذلك لتميزها في تصنيفها الفئوي عن الفئة الكلاسيكية، حيث تسمح الفئة الضبابية لعنصر ما بدرجة من الانتماء الجزئي، وهو الأمر لم يكن متاحاً في الفئة الكلاسيكية. وقد قدم (كراسمير أتاناسوف Krassimir Atanassov) الفئات الضبابية الحدية في العام 1982م، وذلك بإضافة مكون اللاعضوية للفئة الضبابية كمكون مستقل، ولاحقاً ظهر المنطق النيتروسوفي (Neutrosophic Logic) على يد (فلورتن سمارانداكه Floretin Smarandache) في العام 1995م، وذلك بإضافته درجة أخرى لدرجات العضوية واللاعضوية ألا وهي درجة اللاتحديد [8].

يتضح مما سبق تطور المنطق من درجة التصنيف الثنائي للقضايا إلى درجة تسمح بالانتماء الجزئي، لتطور لاحقاً إلى درجة تفصل بين العضوية واللاعضوية واللاتحديد، حتى صار أكثر مرونة في تمثيل المعرفة الزائدة أو الناقصة أو المتناقضة، وذلك بدون قيود صارمة.

10. تطبيقات المنطق النيتروسوفي:

توسعت تطبيقات النظرية النيتروسوفية في مجالات العلوم المختلفة، فظهر الجبر النيتروسوفي والإحصاء النيتروسوفي في الرياضيات، وفي الحاسوب استخدمت النظرية في تصميم أنظمة حديثة ذات ذكاء وقدرة على التعامل مع المعلومات غير المؤكدة، ومن تطبيقاتها في الطب تحليل البيانات الطبية غير المؤكدة، كما استخدمت تطبيقاتها في علم الاقتصاد في اتخاذ القرارات الاقتصادية في حالة عدم التأكد، بالإضافة إلى استخدامها في العلوم الاجتماع لفهم وتحليل الظواهر الاجتماعية التي يصعب تفسيرها بالطرق التقليدية، هذا إلى جانب وجود بوادر لاستخدامها في تحليل النماذج الأدبية عند بعض الباحثين [1].

11. المنطق النيتروسوفي والنقد:

تعتمد رواية (الإحساس بالنهاية) في بنائها الفني على تقنية الراوي غير الموثوق، ويقصد بذلك الراوي الذي تتغير خصائصه في سياق الأعمال التي يقوم بسردها [12]. وتطمح هذه الدراسة إلى تكييف المنهج النيتروسوفي وتسخيرها في تأويل النص الروائي لرواية (الإحساس بالنهاية)، التي تمثل نصاً ممتازاً لتطبيق أدوات المنهج النيتروسوفي، وذلك لطبيعة بنائها السردية، الذي تتداخل فيه الذكرى مع النسيان في شخصية الراوي (أنتوني وبستر)، حيث يقدم الراوي نفسه في صورتين إحداهما: صورة رجل متقدم في السن، يعاني من اضطرابات في الذاكرة، ويجد صعوبة في تذكر معظم ماضيه، وما يتذكره من أحداث يأتي على شكل ومضات غير مكتملة، ودون ترتيب واضح، فهو يذكر في الصفحة الأولى من الرواية أنه يتذكر باطن رسغ لامع، ووبخار متصاعد من حوض رطب ألقيت فيه مقلاة حارة، ونهر يتدفق عكس اتجاه تياره، وباب حمام موصد وخلفه مياه أصبحت باردة منذ وقت طويل، ثم يعلق على ذلك بقوله: "هذا الحدث الأخير ليس شيئاً رأيته بالفعل، لكن ما تتذكره في النهاية ليس هو نفسه ما شاهدته". يمثل هذا النص تمهيداً مهماً للقارئ، إذ يحمل رسالة مبطنة فحواها أن الراوي قد لا يتذكر كل شيء، وإن تذكر فقد لا يتذكر الأحداث بترتيبها التاريخي كما حدثت، وربما يروي أحداثاً لم يشاهدها، فيرويها وكأنه كان حاضراً وقت حدوثها، وربما يكون يروي أحداثاً كان حاضراً عندما حدثت، ولكنه غير متأكد من الكيفية التي حدثت بها، ويؤكد ذلك في أكثر من موضع في الرواية، ومن ذلك تعليقه على حادثة أصابته بالإمساك في إجازة عطلة نهاية الأسبوع التي قضاها مع أسرة فيرونكا: "هذه هي الحقيقة الرئيسية المعتمدة على الذاكرة، أما بقية الأحداث فهي تتألف من انطباعات وأنصاف الذكريات التي لهذا قد تتسم بالأنانية". أما الصورة الأخرى التي يقدمها الراوي عن نفسه فهي: صورة المؤرخ، الذي درس التاريخ في جامعة بريستول، وتخصص فيه. ولذلك يبدو مهتماً بأن يثبت الأحداث وفقاً للوثائق التي تؤكدتها، فمثلاً يقول معلقاً عن عدم احتفاظه بالرسالة التي أرسلتها والدة فيرونكا تخبره بانتهاء علاقته مع بنتها: "أتمنى لو احتفظت بالرسالة، لكانت دليلاً، وثيقة معززة. بدلاً من ذلك الدليل الوحيد الذي مصدره ذاكرتي...". كما يبدو أنه صاحب منهج تاريخي يعتمد على التأويل والتخمين في سد الفجوات التي تنشأ عن نقص الوثائق التاريخية، إذ يظهر تفسيره الشخصي للتاريخ من خلال انطباعاته عن الأحداث، فكل حدث يسرده يذكر له تفسيراً موازياً، ومن ذلك إنه عندما انضم إليهم أدريان فن وأخبرهم بأنه من عائلة مفككة، كان تفسيره الموازي بافترض أنه ذلك يجعل أدريان فن يشعر بالغضب تجاه الأسرة، ولما أخبرهم أدريان فن أنه محببٌ لأمه ويحترم أباه، كان التفسير الموازي أن السعادة الحقيقية تكمن في عدم وجود عائلة، أو الوجود في عائلة مفككة، وبناء على هذا التفسير صار أنتوني وصديقه يحسدون أدريان على ذلك.

يتضح مما سبق أن الرواي - أنتوني وبستر - يعرض نفسه في صورتين متكاملتين، صورة الرجل مشوش الذاكرة، وصورة المؤرخ المتمكن الذي يمكنه أن يملأ الفجوات التاريخية في رواية الأحداث بناء على التخمين والاستنتاج، والجمع بين هاتين الصورتين تجعلان من الرواي غير موثوق في روايته للأحداث، الأمر الذي يجعل الغموض يكتنف الرواية بكاملها، وبعد الفراغ من قراءة الرواية، لا يستطيع القارئ الجزم بأي من رواياته للأحداث كانت صحيحة، وأي منها كانت خاطئة أو مزيفة، وربما يدعوه ذلك إلى إعادة قراءة الرواية من جديد، يقول خالد مسعود شقير مترجم الرواية إلى العربية: "نجد أنه في الواقع يكتب تاريخاً لحياته معتمداً على ذاكرته، بما تعانيه من عيوب، وتوثيق غير كافٍ لأحداث ماضيه، وبهذا فهو مؤرخ أو سارد غير موثوق به، فالنسخة التاريخية لأي حدث يعرضه لنا إما إنها تتغير وإما يعرض لنا معها نسخة أخرى موازية لها ويبقى حائراً بشأن مصداقية أي منهما." [4].

بناء على ما سبق ذكره، فإن الدراسة تطمح إلى تفسير ذلك الغموض أو التعارض بين الروايات المختلفة للحدث الواحد، وهو أمر يمكن دراسته من وجهة نظر نيتروسوفية، حيث تبدأ الدراسة بتتبع تلك الأحداث ذات الروايات المتعارضة، وتصنيفها إلى درجات نيتروسوفية، ثم تفسر الضبابية الناتجة عن تعارض الروايات، وذلك للتعرف على الأسباب التي دفعت الروي - أنتوني وبستر - إلى أن يروي تاريخه الشخصي بتلك الطريقة الغامضة والمشوشة.

12. المجتمع السردي النيتروسوفي:

المجتمع النيتروسوفي هو أحد مصطلحات الإحصاء النيتروسوفية، وهو: " عبارة عن مجتمع غير محدد بشكل جيد على مستوى العضوية." [10]. تستعير الدراسة المصطلح السابق، لأنه يعبر عن البيانات التي تحتوي على فجوات أو لا تحدد، وذلك لأن الرواية تحتوي على فجوات ولا تحديد أيضاً، وذلك كما في هذه الأحداث:

1.12. اللقاء الأول بعائلة فيرونكا: ذكر الرواي في الرواية الأولى أن الغرض منها أن يعرف أهلها مدى صلاحيته لها، وتعرض فيها للإذلال، ثم ذكر في الرواية الثانية للحدث نفسه أن فيرونكا كانت مهتمة به، وتصرفت معه بود، فأى الروايتين صحيحة؟ وأيها زائفة؟

2.12. رقص فيرونكا: ذكر في الرواية الأولى أنها لا تحب الرقص، بينما ذكر في الرواية الأخرى أنها رقصت معه في غرفته، أي روايتي الحدث صادقة؟ وأيها زائفة؟

3.12. صورة فيرونكا معه ومع أصدقائه: كان انطباعه عنها في الرواية الأولى أنها مجرد صورة تذكارية بدت فيها أنحف وأطول، وذكر في الرواية الثانية أن فيرونكا تنظر إلى أدريان، أي الانطباعين توحى به الصورة؟ وأيها من تزييف الرواي؟

4.12. الرد على رسالة أدريان: ذكر في الرواية الأولى أنه تمنى لهما حظاً سعيداً، كما ذكر في الرواية الثانية أنه صب عليهما لعناته، أي الرسالتين حقيقية؟ وأيها زائفة؟

5.12. طابع جسر كليفتون: ذكر في الرواية الأولى أنه مجرد طابع بريد، وكان في متناول يده، بينما ذكر في الرواية الثانية أن له رمزية محددة، فهو موضع للانتحار، وفي إرساله دليل على لعنة ودعوة للانتحار، فما المدول اليقيني منهما؟

6.12. سبب انتحار أدريان: ذكر في الرواية الأولى أنه انتحر لأسباب فلسفية تتعلق بالحياة، وأنه مجرد رسالة رمزية لرفض الحياة، بينما ذكر في الرواية الثانية أنه انتحر لأسباب تتعلق بالعار الناتج عن علاقته بوالدة فيرونكا، وإنجاب جنين مشوه منها، أي الروايتين صحيحة؟ وأيها زائفة؟

7.12. يوميات أدريان المبتورة: ذكر في الرواية الأولى أنها تناقش معادلة رياضية عن التراكم وحدود المسؤولية، كما ذكر في الرواية الثانية أنها تشير إلى طفل أدريان المشوه من سارة فورد والدة فيرونكا، أي التفسيرين صحيح؟ وأيها زائف؟ ألا يوجد تفسير ثالث للمعادلة؟

8.12. مدلول الوصية المالية: ذكر في الرواية الأولى أنها عبارة عن اعتذار على الطريقة المهينة التي لاقته بها أسرتها، وذكر في الرواية الثانية أنها كفارة عن ذنب ما أو ثمن للدم، ما المدول اليقيني منهما؟

9.12. هوية الطفل المشوه (جاك): ذكر في الرواية الأولى ابن أدريان من فيرونكا، وتشوه الجنين في بطن أمه ربما لتأثرها بصدمة انتحار أدريان، بينما ذكر في الرواية الثانية أنه ابن أدريان من سارة فورد والدة فيرونكا [4]. أي الروائيتين حقيقية؟ وأيها زائفة؟ ألا يوجد احتمال ثالث؟

بناء على كل ما ذكر يتضح أن التصنيف الثنائي لأحداث الرواية إلى (صادق أو زائف) غير كافٍ للكشف عن مضمون الرواية ومعمارها الفني، ما يجعل مصطلح (المجتمع السردي النيتروسوفي)؛ مناسباً لطبيعة دراسة الأدب السردي، الذي يعتمد في بنائه الفني على تقنية الراوي غير الموثوق، على أن يمثل كل حدث من ذلك المجتمع السردي النيتروسوفي عنصراً نونيتروسوفياً، ويدل مصطلح العنصر السردي النيتروسوفي على الحدث السردي الذي لا يمكن تحديد درجة عضويته السردية في المجتمع السردي النيتروسوفي، من حيث كونه لا ينتمي بشكل واضح إلى الصدق، أو الكذب، أو اللاتحديد، وهو أمر ينشأ عن تعارض واضح بين روايتين مختلفتين لحدث واحد في الرواية، وكذلك بسبب الغموض (الضبابية) التي تنشأ عن عدم اليقين بمدلول بعض الأقوال والتصرفات التي تصدر عن شخصيات الرواية.

13. خطوات التحليل النيتروسوفي للأحداث:

تقترح الدراسة تحويل البيانات السابقة إلى مجتمع نيتروسوفي للحقيقية السردية في الرواية وذلك باتباع الخطوات الإجرائية التالية:

1.13. تحديد وحدة التحليل: من حيث كون العنصر المراد تحليله في الرواية حدثاً سردياً، أو تصريحاً لغوياً، أو وصفاً لشخصية في الرواية، أو رمزاً أو ثقة في النص الروائي.

2.13. المعيار المرجعي الداخلي للنص: حيث يقاس الحكم على وحدة التحليل بناء على المرجعية الداخلية للنص، والاعتماد على مصادر فيه مثل: التصريح المباشر من الراوي، والتكرار، وشهادة شخصية أخرى في الرواية، ووجود وثيقة أو رسالة تؤكد ذلك، وكذلك الانسجام السببي بين الأحداث.

3.13. اعتماد درجات للحكم على وحدة التحليل: تعتمد الدراسة ثلاث درجات للحكم وهي: الصدق (T)، والكذب (F)، والضبابية (I)، فيصنف الحدث على أنه صدق (T) إذا توفرت فيه قرائن قوية ومتعددة مثل: التأكيد المباشر من النص، أو عدم وجود معارض نصي في جوهره، وانسجامه مع بقية الأحداث، أو الدعم بوثيقة أو شهادة أو أثر رمزي من النص، ويصنف الحدث على أنه كذب (F) إذا ظهر نص يعارضه صراحة، أو ثبت أنه ادعاء من راوٍ غير موثوق، أو نقضته قرائن داخلية قوية، أو استحالة حدوثه منطقياً داخل بنية الرواية، ويصنف الحدث على أنه ضبابي (I) إذا لم توجد قرينة حاسمة ضده أو لصالحه، أو توجد في النص قرائن قوية ومتعارضة بخصوصه، أو كان حدثاً محتملاً غير قابل للجزم، أو كان النص معتمداً على الإبقاء في الغموض.

4.13. الفصل بين مستويات التحليل: ذلك بتصنيف العنصر المراد تحليله من كونه حدثاً، أو تفسيره سردياً ببيان كيفية حدوثه، وبيان دلالاته التأويلية التي يمكن استنتاجها من الحدث أو التفسير، وبناء على هذا الفصل بين مستويات التحليل فقد يكون الحدث صادقاً سردياً، بينما يكون تفسيره ضبابياً، أو العكس، وهذا مما يجعل من استخدام المنهج النيتروسوفي مناسباً لتحليل الرواية.

الحدث	القرائن الداعمة للصدق (I)	القرائن الداعمة للضبابية (I)	القرائن الداعمة للكذب (F)	الحكم النيتروسوفي النهائي	ملاحظة تفسيرية
اللقاء الأول بعائلة فيرونكا	وجود زيارة فعلية.	تباين في السرد من خلال التبئير الذاتي.	روايته الأولى ووصفه للقاء بأنه إذلالي.	(I)	الحدث ثابت، ولكن دلالاته الشعورية متعارضة.
رقص فيرونكا معه	وجود رواية لاحقة تؤكد الرقص.	وجود روايتين متعارضتين إحداهما تثبت والأخرى تنفي.	وجود رواية تنفي حبها للرقص.	(I)	لا يمكن الحسم بين الروايتين، ويظل الحدث معلقاً بين الذكرى والنسيان.
صورة فيرونكا معه ومع أصدقائه.	وجود الصورة كأثر مادي.	غموض قصدي في الدلالة بين وصفها كصورة تذكارية أو إشارة لعلاقة بين أدريان وفيرونكا.	حسم انطباع واحد بوصفه المعنى النهائي.	(I)	وثيقة يقينية في الوجود ومتعددة في التأويل.
الرد على رسالة أدريان	وجود رسائل متبادلة.	تعارض في مضمونها بين اللعنة وتمني الحظ.	الجزم بأن إحدى الصيغتين كحقيقة نهائية.	(I)	غياب النص الحرفي مع اعتراف الراوي بضعف الذاكرة.
مدلول كليفتون	وجود الطابع ثابت في الرواية.	اختلاف تأويل مدلوله بين كونه مجرد طابع أو رمز لدعوة للانتحار.	نفي البعد الرمزي للطابع.	(I)	تحول الطابع من دليل مادي إلى علامة رمزية متعددة الدلالة.
سبب انتحار أدريان	الانتحار ثابت في النص.	التباس بين تفسير فلسفي وتفسير أخلاقي.	اختزال الانتحار في السبب الأخلاقي فقط.	(I)	السبب النهائي غير محسوم لأنه له أكثر من مدلول.

المعادلتان واليوميات الحقيقية، ولكن لها تأويلان مختلفان.	(I)	تفسير الراوي للمعادلتين كتفسير وحيد.	غموض في دلالة اليوميات بسبب البتر فيها.	ثبات وجود اليوميات والمعادلتين في النص.	يوميات أدريان المبتورة
لا يمكن الجزم بتحديد مدلول الوثيقة، على الرغم من أنها مثبتة يقينياً في النص.	(I)	حسم مدلول واحد يقيني من المدلولين.	التباس مدلولها بين الاعتذار والتعويض عن ثمن الدم.	وجود الوصية كوثيقة مثبتة بالنص.	مدلول الوصية المالية
يظل النسب في منطقة الاحتمال المفتوح دون حسم واضح.	(I)	كل قراءة تدعي حسم النسب.	تضارب القراءتين حول نسبه الحقيقي.	وجود الطفل المشوه في النص.	هوية الطفل المشوه في الرواية

5.13. ملاحظات على الجدول أعلاه:

يلاحظ في الجدول أعلاه أن الأحداث ليست خالصة الصدق أو الكذب، وذلك لأن بناء الرواية يعتمد على الراوي غير الموثوق والذاكرة المبتورة، والانفتاح على أكثر من تأويل، هذا بالإضافة إلى الصراع الظاهر بين الروايات المتعددة للحدث الواحد، وقد كان بعض العناصر صادق في وجوده ضبابي في مدلوله، وذلك مثل وصية سارة فورد، كما كان بعض الأحداث صادق في وجوده ولكن تفسير الراوي له كان كاذباً ومضلاً، وذلك مثل عنصر رسالة الرد على أدريان.

14. الجانب النفسي للضبابية في الرواية:

تعتمد الرواية في بنائها الفني على تقنية الراوي غير الموثوق، وهي تقنية سردية مناسبة للتعبير عن الفجوات المفقودة التي تفصل بين الواقع والحقيقة، وكذلك الأمر بالنسبة لترتيب الواقع أو طمسه تماماً، ويكون ذلك عن طريق تقديم تبريرات مشوهة، أو ادعاءات زائفة للدفاع عن النفس [6]. وهذا بالضبط ما قام به الراوي أنتوني وبستر من خلال سرد تاريخه الشخصي، الذي يمكن تفسيره من منظور نفسي، وعزوه إلى سببين هما:

1.14. أحدهما عقدة النقص (الشعور بالدونية): هو شعور خاطئ لدى الفرد يجعله يشعر بأنه غير مناسب، ويتضح ذلك من خلال أسلوب حياته [3]. فقد كان يشعر بأنه أقل ذوقاً موسيقياً من فيرونكا، حيث قال: "كان ذوقها الموسيقي أفضل مني، فهي تزدرى دفوراك وتشايكوفسكي اللذين كنت أهتم بهما". ويرى نفسه أقل شأناً في الدراسة من صديقه أدريان، وذلك عندما سأل فيرونكا عما يدرس أخوها جاك، فأجابت أنه يدرس العلوم الأخلاقية مثل أدريان، حينها تمنى أن يقول لها: "أعرف دراسة أدريان اللعينة، أشكرك كثيراً". ولكنه عجز عن قول ذلك، كما رأى نفسه أقل شأناً من أن تكون له علاقة ما بأسرة فيرونكا، وذلك عندما دعت لزيارة أهلها للتعرف عليهم، وسافر إليهم، فقد راوده إحساس بالدونية عن نفسه حيث قال: "كنت قلقاً من أن تكون حقيقتي – الوحيدة التي أملكها – كبيرة جداً بحيث تجعلني أبدو كأني سارق محتمل". [4]. ذلك الإحساس بالدونية جعله يغطي تاريخه الشخصي مع أسرة فيرونكا بشيء من الضبابية فهو سبب للتناقض في روايته عن كيفية تعامل أسرة فيرونكا معه في عطلة نهاية الأسبوع التي قضاها معهم.

2.14. الآخر- الصدمة العاطفية: يعد التجنب عرضاً من أعراض ما بعد الصدمة، حيث يتجنب المريض تذكر الحدث الصادم وكل ما يتعلق به من أمور تذكره به [11]. حيث مثل انفصال فيرونكا عنه وارتباطها بصديقة طفولته صدمة نفسية له، حيث تلقى أنتوني رسالة من أدريان يستأذنه فيها في مواعيد فيرونكا، فكان ذلك إيذاناً بالتأثير في محيطه الاجتماعي، حيث عد الأمر كمقايضة به، إذا حصلت فيرونكا على صديقه الذكي أدريان بتخليها عنه، ليشكل ذلك مرحلة جديدة في علاقته بصديقه أدريان فن، وهي مرحلة سيحرم فيها من رؤية صديق الطفولة، وذلك لأن فيرونكا ستكون موجودة لو خطط للقاء صديقه يوماً ما، كما كانت الصدمة العاطفية سبباً في قطع علاقته مع أصدقاء الطفولة على الرغم من أنهم لم يكن لهم يد في الأمر، يقول أنتوني: "والآن فكرة لقاء كولن وألكس وحدهما صارت لا تروق لي. بعد أن كنا ثلاثة، ثم أربعة، كيف يمكن أن نعود إلى ثلاثة مرة أخرى؟ إذا أراد الآخرون أن يشكوا عصبته لا بأس في ذلك، فيفعلوا. أنا في حاجة إلى أن أواصل حياتي.". وقد كان أدريان فن هو الشخص الذي يتقربون إليه أكثر من بعضهم إلى بعض حتى أنهم كانوا يرسلون إليه الخطابات أكثر مما يرسلونه لبعضهم بعضاً، وهذا يدل على تعلق الأصدقاء الثلاثة بما فيهم أنتوني بأدريان فن، بل اعترف أنتوني وصديقه بأن أدريان كان هو الملجأ لهم ولم يكن أي منهم ملجأ له. ونتيجة لتلك الصدمة العاطفية بدأ أنتوني في التخلص من كل الآثار التي تنتمي لتلك العلاقة المنصرمة بفرونكا، ومن ذلك قيامه بالتخلص من أبريق حليب كانت قد أهدته إليه سابقاً، وبدا ذلك كرمز للتخلص من الماضي، كما أحرق مراسلاته مع أدريان في الموقد كإشارة إلى أخراجها من حياته، ثم سافر إلى أمريكا، وعمل في أعمال مختلفة هنالك، وانقطعت أخباره عن والديه، ولم يعلم بوفاة أدريان إلا بعد عودته، عندما وجد رسالة في انتظاره من صديقه أليكس، وبالجملة كان تقييمه لتلك الفترة من علاقته بفرونكا بأنها كانت تجربة فاشلة حيث قال: "لقد اعتبرت الزمن الذي أمضيته مع فيرونكا تجربة فاشلة-ازدراءها لي ومذلتني- ومحوته من الوثائق." [4].

إذاً الشواهد السابقة من النص تشير إلى إصابته بالصدمة العاطفية، التي ألفت بظلالها على سرد تاريخه الشخصي، حيث استخدم آلية دفاعية ألا وهي الكبت، الذي يستخدم لا شعورياً لخفض القلق والتوتر النفسي، حيث يكبت الفرد كل ما يزعجه أو ما يجعله يشعر بالخجل منه [2]. وكان ذلك الكبت النفسي من أسباب الضبابية السردية في التاريخ الشخصي للرواية، بإسقاط ما يؤلمه منه، عن طريق التخيل، وهو حالة من حالات التفكير التي ينشأ في العقل فهو كاتبه، وعن طريقه يمكن للعقل أن يجزء الواقع إلى أجزاء ثم يعيد تركيبه، وهذا ما فعله عقل أنتوني وبستر بواقعه، إذ قام بتقطيع واقعه ومن ثم إعادة تشكيله، كما يقوم الرواي باتباع حيلة نفسية تتمثل في اختزال المشكلة الأصلية، فيقوم بضغطها وتصغيرها، حتى لم يبق منها إلا صلبها، ثم يقوم بعرض ذلك في شكل رمزي، وكأنه لم يحدث فيها تغيير من الأصل [7]. وذلك كما في رمزية الوصية المالية في الرواية، حيث استطاع الرواي أنتوني وبستر -باتباع طريقة الحلم- بتجميع أجزاء من ذكرياته تؤيد هدفه النهائي، وهذا الهدف هو الذي يتحكم في الذاكرة فيجعلها تبدو انتقائية [3]. وقد كان هدفه غير المعلن أنه ضحية ولم يكن له دور في المأساة التي حلت بفرونكا وعائلتها بسبب ارتباطها به في مرحلة ما من حياته، كما استخدم آلية التبرير، وهي من الحيل غير الشعورية التي يلجأ إليها الشخص لتبرير سلوكه وتصرفاته التي لا تلقى قبولاً من المجتمع أو من ضميره نفسه [9]. ومن ذلك تبريره حادثة انتحار صديقه أدريان بأسباب فلسفية [4]. وبهذا النوع من التبرير يحاول الشخص أن يحتفظ بثقته في نفسه ونقاء سيرته ونزاهة دوافعه [9]. وقد برر أنتوني انتحار صديقه برغبته في تحقيق مبدأ رفض الحياة [4]. وذلك حتى يوهم نفسه بأنه لا علاقة له بالأمر، كما استخدم حيلة نفسية أخرى كالإسقاط، وهو حيلة لا شعورية تلجأ إليها النفس وتسقطه دوافعها الداخلية على شخص أو سبب خارجي [9]. وذلك عندما يفسر مرة صورة فيرونكا مع أصدقائه بأنها دليل على علاقة بين فيرونكا وأدريان، وأن فيرونكا كانت تنظر إلى أدريان [4]. وبنى هذا التفسير إسقاطه لخبية أمله فيها وإحساسه بالفقد، كما استخدم آلية الإزاحة، وهي حيلة لا شعورية تقوم بها النفس لتحويل شحنة وجدانية داخلية إلى سبب أو موضوع خارجي [9]. وذلك كما في تفسير أنتوني لمعادلة أدريان المتعلقة بتحديد المسؤولية التراكمية في هوية الطفل، حيث قام أنتوني بإزاحة اللذنب، وتوزيع المسؤولية على صديق سردي بديلة [4]. ويمكن تقديم البعد النفسي للقيم النيتروسوفية في الرواية كما في الجدول التالي:

الحدث السردى	القيمة النيتروسوفية (I)	التفسير النصي	التفسير النفسي
اللقاء الأول بعائلة فيرونكا	(I)	تعدد رواية اللقاء بين الإذلال والود دون حسم قاطع.	إحساس بالدونية والخوف من الرفض.
رقص فيرونكا معه	(I)	تأرجح روايتان بين إثبات الرقص ونفيه.	ذاكرة انتقائية بسبب الصدمة العاطفية.
صورة فيرونكا معه ومع أصدقائه.	(I)	صورة ثابتة مادياً، وتأرجح دلالتها بين القراءة المحايدة والقراءة الإيجابية	إسقاط نفسي لخبية الراوي وشعوره بالفقد.
الرد على رسالة أدريان	(I)	وجود ردين مختلفين أحدهما للتهنئة والآخر للعن.	عدوان مكبوت، وتردد دفاعي بين الندم والرفض.
مدلول جسر كليفتون	(I)	الطابع ثابت بوصفه أثر مادي، ومدلوله الرمزي مختلف بين كونه مجرد طابع بريد أو له مدلول رمزي للانتحار.	رمز للذنب والتهديد النفسي.
سبب انتحار أدريان	(I)	انفتاح السرد على مدلولين أحدهما فلسي، والآخر أخلاقي عاطفي، دون تقرير نهائي بصحة أي منهما.	تبرير دفاعي ناتج عن الرغبة في تخفيف الشعور بالمسؤولية.
يوميات أدريان المبتورة	(I)	وثيقة مثبتة في النص، ولكنها مبتورة وتقبل تعدد التأويل.	كبت وتحوير في قراءة الوثيقة بما يخدم قلق الراوي.
مدلول الوصية المالية	(I)	الوصية مثبتة في النص، مدلولها مختلف بين الاعتذار وثمان الدم.	عودة مكبوتة للماضي واستثارة للذنب.
هوية الطفل المشوه في الرواية	(I)	تتنازها روايتان أو أكثر، دون الحسم نصياً.	إزاحة للذنب، وتوزيع للمسؤولية على صيغ سردية بديلة.

3.14. ملاحظات على الجدول أعلاه:

يلاحظ في الجدول أعلاه حضوراً واضحاً للضبابية السردية، وذلك لأن الرواية تعتمد في بنائها الفني على الراوي غير الموثوق، فبعض أحداث الرواية صادق في وجوده وضبابي في مدلوله، وتفسر البنية النفسية للراوي بالميل لاستخدام آليات دفاعية تتمثل في: الكبت، والإنكار، والإسقاط، والتبرير.

15. أثر الضبابية في تعدد التأويل السردى في الرواية:

تفتح المنطقة الضبابية في أحداث الرواية جوانب فنية مهمة، تظهر من خلال الانفتاح على أكثر من مدلول لأحداثها، صحيح أنها تجعل القارئ في حيرة من أمره بخصوص بعض الأحداث المتعارضة، ولكنها قد تعزیه بإعادة تشكيل تلك الأحداث الغامضة باستنتاج مدلولاتها من خلال النسيج السردى للرواية، ويمكن تقديم قراءتين مختلفتين لحدث سردي من

الرواية، وذلك بالتطبيق على ضبابية التأويل في أحد الرموز النيتروسوفية في الرواية، وذلك كما في حادثة (الابن المشوه) وكيفية الاستدلال على والديه.

1.15. القراءة الأولى- ابن أدريان وأمه سارة فورد (والدة فيرونكا):

هذه القراءة هي التي يقدمها ظاهر النص الروائي، وذلك بوجود روايتين متعارضتين بخصوص تحديد هوية الطفل المشوه، وتحدث الأولى عن كونه ابن أدريان من فيرونكا، وذلك استناداً على الخطاب الهجائي الذي أرسله أنتوني إليهما، حيث تمنى أن تلاحقهما اللعنة وينجبا طفلاً يزيد من معاناتهما، وهذه الرواية التي لجأ إليها أنتوني لأول مرة؛ وذلك لأنه رأى فيها تحقق العدالة الشعرية التي تمنى لها للانتقام منهما، وقد تحققت نبوءته في ذلك، ويتضح لاحقاً أن ذلك هو التزييف السردي (F)، واصطدم بالرواية الثانية التي تمثل الصدق السردي (T)، ألا وهي أن الطفل المعاق هو ابن أدريان من سارة فورد، والدة فيرونكا. اعتمد أنتوني على الرواية الزائفة (F)، لما تمثله من استجابة مادية لدعوته عليهما، ولأنه أحس بالذنب والندم على ما فعله في ذلك الخطاب، وبذلك يكون اعتماده على تلك الرواية الزائفة (F) رغبة منه في تطهير نفسه بالندم، كما يمكن تفسيرها أيضاً بالفرار إلى الذنب الأخف من الذنب الأعظم، فإن كانت الرواية الزائفة (F) تحدد مسؤوليته في تلك المأساة في مجرد إطلاق نبوءة سيئة، فإن الرواية الصادقة للحدث (T) تحدد مسؤوليته كشريك في تلك الجريمة في كل تفاصيلها، وهذه المسؤولية تسند على تفسير رموز المعادلتين التي ذكرهما أدريان في يومياته المبتورة، حيث ذكرها في معرض حديثه عن تحديد المسؤولية التراكمية، هذا على الرغم من أن أنتوني قد فسر الرموز، إلا إنه لم يقم بتطبيق ذلك التفسير في المعادلتين.

فسر أنتوني رموز المعادلتين بأن (ط) ترمز إلى طفل، و(أ1) ترمز إلى أدريان، و(أ2)، ترمز إلى أنتوني، و(س) ترمز إلى (سارة) و(ف) ترمز إلى فيرونكا، وبذلك يكون أنتوني قد توصل إلى فهم أن ذلك الطفل المشوه هو ابن أدريان من سارة فورد (والدة فيرونكا)، وبالموازنة بين الألمين الناتجين عن الروايتين المتعارضتين، يفهم اختيار أنتوني الرواية السردية الزائفة، لأن ألمها أخف وطناً من ألم الرواية السردية الصادقة (T)، فألم الأولى ناتج عن احساس بذنب أدبي في تشكيل المأساة، بينما ألم الأخرى ناتج عن احساس بذنب تنفيذي في المأساة، وبذلك يكون أنتوني قد أدار خيوط لعبة الانتقام من خلف ستار الضبابية، حيث دفع صديقه دفعاً إلى الأم المتصايبة، حتى نتج عن ذلك الواقع المأساوي (الطفل المشوه)، ثم قضى بقية حياته في نسج تاريخ زائف لنفسه، ليعفيها من مواجهة تلك الحقيقة الصادمة، ألا وهي أنه كان شريكاً في ثمن الدم.

2.15. القراءة الأخرى- ابن أنتوني وبستر وأمه سارة فورد (والدة فيرونكا):

تواجه القراءة السابقة إشكالية تتمثل في كونها تعجز عن تقديم تفسير مقنع لرموز مهمة وردت في الرواية مثل: مبلغ الوصية (50) جنيهاً. وهذه الوصية في وجودها -لا في مدلولها- تمثل كتلة يقينية في سياق ضبابي، ولا يجب تجاوزها، كما تستند هذه القراءة على إعادة القراءة للمتن الروائي، لتكوين قراءة مغايرة لما يقدمه السارد، ولن تكفي بما قاله السارد بل ستتجاوزها إلى استنطاق ما سكنت عنه، ومن ذلك تفسير المعادلتين اللتين ذكرتا في يوميات أدريان، ولم يشرحهما أنتوني، واكتفى بشرح رموزهما، وقيل البدء في شرح المعادلتين، تقترح هذه القراءة بعكس مدلول الرمزين (أ1) ليرمز إلى أنتوني، و(أ2) ليرمز إلى أدريان، وذلك لأن أدريان هو الثاني في الترتيب من حيث العلاقة مع سارة فورد، وقد كان على تواصل بها بناء على نصيحة أنتوني له باستشارتها عن السوء الذي تعرضت له فيرونكا في طفولتها.

2.15.1. معادلتا نسب الطفل المشوه:

تساءل أدريان في يومياته عن كيفية التعبير عن العلاقة التراكمية بين الرموز : (ط)، و(أ1)، و(أ2)، و(س)، و(ف)، ثم اقترح معادلتين محتملتين للتعبير عن ذلك:

$$\text{ط} = \text{س} - \text{ف} + 1 \times \text{أ}$$

$$\text{أو } 2\text{أ} + \text{ف} + 1 \times \text{س} = \text{ط}$$

بما أنه تم شرح الرموز (ط)، و(أ1)، و(أ2)، و(س)، و(ف) سابقاً،⁽⁶⁴⁾ فيمكن تطبيق ذلك على المعادلة الأولى كما يلي:

$$\text{ط} = \text{س} - \text{ف} + 1 \times \text{أ}$$

الطفل المشوه (جاك) = سارة - فيرونكا + أنتوني

يمثل الطفل المشوه (جاك) ناتجاً عن علاقة الإضافة أو الإضافة المضاعفة بين سارة وأنتوني، بعد حذف (إسقاط) فيرونكا من العلاقة.

وبناء على هذا الاستدلال المنطقي للمعادلة يتضح أن أنتوني كان العامل المحفز في المعادلة التي أدت إلى تلك النتيجة المأساوية، وإن فيرونكا كانت مجرد قناع في العلاقة، وبإسقاطه اتضحت طبيعة العلاقة بين سارة وفورد وأنتوني.

كما يمكن حل المعادلة الأخرى كما يلي:

$$2\text{أ} + \text{ف} + 1 \times \text{س} = \text{ط}$$

أدريان + فيرونكا + أنتوني × سارة = الطفل المشوه (جاك)

وفقاً لهذه المعادلة فإن الطفل المشوه (جاك) هو النتيجة النهائية لمجموع العلاقة بين أدريان وفرونكا وأنتوني وسارة فورد، وتعد العلاقة المضاعفة (الضرب) بين أنتوني وسارة هي المحفز الأساسي في المعادلة، حيث أسهمت بشكل مضاعف في مضاعفة الكارثة (الطفل المشوه)، وأن دور فيرونكا هو القيام بعامل الربط والترتيب، فهي الجسر الذي عبرت به العلاقة بين أدريان من جهة وأنتوني وسارة فورد من جهة أخرى.

2.15.2. الرابط بين المعادلتين:

استخدم أدريان الرابط (أو) بين المعادلتين، ليعبر به عن كون كل منهما تمثل طريقة محتملة للتعبير عن العلاقة التراكمية بين الرموز (ط)، و(أ1)، و(أ2)، و(س)، و(ف)، وهذا يعني أن إحداها تمثل العلاقة الصحيحة للتعبير عن ذلك، دون الجزم بصحة إبي منهما.

كما يمكن أن نستنتج منهما أن الناتج في المعادلتين (الطفل المشوه) نشأ عن طرح أو إسقاط فيرونكا من العلاقة في المعادلة الأولى، بينما نشأ في المعادلة الثانية عن تركز العلاقة بين أدريان وفرونكا بالإضافة إلى علاقة أنتوني مع سارة، وكل ذلك يشير إلى أن العلاقة بين أنتوني وسارة (س × أ1) ظلت هي المتغير المستقل في المعادلتين، وهذا يعني ضمناً أن الطفل المشوه ناتج عن العلاقة بينهما، سواء كانت علاقة قائمة على طرح فيرونكا من الواقع كما في المعادلة الأولى، أو كانت علاقة قائمة على التراكم الفعلي بينهم جميعاً كما في المعادلة الثانية.

أما المسؤولية التراكمية لأدريان فتتمثل في وجود علاقة ما بينه وبين سارة فورد، وذلك عندما ترك يومياته معها ولم يتركها مع فيرونكا كما يفترض، وهنالك احتمال إلى أنه يشير إلى أبوة أنتوني للطفل المشوه، كما ورد رمزاً في المعادلتين [4].

وبناء عليه تم تصنيف (أ1) أنتوني متغيراً مستقلاً، وهو يفسر تراكم المؤشرات المادية في الرواية، الأمر الذي ينقل التحليل النقدي من التفسير الظاهر الذي يقدمه الراوي- إلى تفسير آخر محتمل سكت عنه الراوي، وهو تفسير تعززه هذه عينة سردية نيتروسوفية ستذكر لاحقاً، والعينة النيتروسوفية مصطلح من مصطلحات الإحصاء النيتروسوفية ويقصد به: " مجموعة جزئية مختارة من المجتمع تحوي على بعض اللاتحديد. "[10]. أما العينة السردية النيتروسوفية فستستخدم في هذه الدراسة لتعني مجموعة مختارة من الأحداث والرموز النيتروسوفية في الرواية، وذلك فيما بأحداث الرواية التي يمكن تصنيفها في الدرجات النيتروسوفية الثلاث (الصدق، واللاتحديد، والكذب)، وتم اختيار العينة السردية النيتروسوفية التالية، مع بيان كيفية إسهامها في انفتاح التأويل السردية للرواية على أكثر من قراءة:

2.15. 3. مبلغ الوصية (50) جنبها: تركت سارة فورد (والدة فيرونكا) مبلغ 50 جنبها وصية للراوي (أنتوني وبستر)، وهذا هو الجانب الحقيقي المثبت من الحدث ولا يمكن كبتة أو إنكاره، كما يكشف هذا الحدث الرواية الكاذبة التي كان يسوق لها الراوي في بداية الرواية عن علاقته بأسرة فيرونكا، حيث أظهر نفسه كضيف عابر وغير مرحب به في فترة الأسبوع الذي قضاه ضعيفاً في كنف تلك الأسرة، ثم تأتي هذه الوصية المالية بعد أربعين سنة من تلك الزيارة، لتكشف عن علاقة وطيدة له بالأسرة نفسها، وعن دور محوري لعبه الراوي في تاريخ تلك الأسرة، وعندما سأل أنتوني فيرونكا عن السبب الذي جعل والدتها توصي له بهذا المبلغ- أجابت بأنه: ثمن الدم.

بدأت الأجوبة غامضة لأنتوني، ولم يستطع أن يعرف مدلولها، فهو يعرف أنه لم يرق دمه، وربما يتعلق الأمر بكرامته التي أهدرت، فهل هو ثمن جرح كرامته، أم هو ثمن دفعته والدة فيرونكا نظير الألم الذي سببته له بنتها، أم أن الأمر يتعلق بشيء لم يعرفه بعد.

يتضح مما سبق أن المبلغ المالي في الوصية ثابت من حيث الوجود، وغامض من حيث المدلول، ولا يمكن الجزم بالغرض الذي كانت ترمي إليه والدة فيرونكا من تلك الوصية المالية، فهل يقصد به الإهانة أم التعويض، فهو قليل حتى يبدو كإهانة، وكثير حتى أنه يدعو إلى التساؤل، لذلك يظل مدلول الوصية في المنطق الضبابية (I)، مع احتمال أن يكون تعويضاً مالياً بناء على ما جاء في استنتاج معادلتني أدريان.

2.15. 4. استناداً على أن أنتوني هو أول من اتصل بعائلة فيرونكا، وهو أول من توددت له الأم المتصابية في عطلة نهاية الأسبوع، بل عبّر عن ميله صراحة إليها، حيث ذكر أنه أوما لها بنظرة أفقية عند مستوى خصرها لحظة الوداع، وقال لفرونكا أنه يحب والدتها، حتى أن فورد زوج الأم علق على ذلك بظهور منافس له في زوجته سارة فورد. وبما أن أنتوني قد ذكر في تلك العطلة أن جميع أفراد أسرة فيرونكا كانوا قد غادروا البيت لممارسة رياضة المشي، وتركوه نائماً، والأم المتصابية في المطبخ وحدها، حتى نزل أنتوني إليها، فكانت تتفحصه بنظرته بينما هي تصنع اللحم المقدم مع البيض، حينها ربما قد حدث تواصل بيولوجي بينهما، وكان ثمرته ذلك الطفل المشوه، وهو حدث لم يرد في النص الروائي. ربما يكون هذا الحدث من ضمن الجزء المبتور من رواية أنتوني للكيفية التي أمضى بها عطلة نهاية الأسبوع في ضيافة أسرة فيرونكا، ويكون هذا الجزء قد أسقط ضمناً مع الأحداث، التي أسقطها أنتوني ولم يعد يتذكرها، كما قال عن حادثة أصابته بالإمساك في تلك العطلة: "هذه هي الحقيقة الرئيسية المعتمدة على الذاكرة، أما بقية الأحداث فهي تتألف من انطباعات وأنصاف الذكريات التي لهذا قد تتسم بالأنانية." [4]. أما سقوط أدريان في حبال المرأة المتصابية فلم يذكر في السرد، ويمكن استنتاجه من وجود يوميات أدريان في حوزتها، وليس في حوزة فيرونكا، بافتراض أن فيرونكا هي محبوبته وسارة فورد هي أم محبوبته، فالأولى أن تكون يومياته في حوزتها لقربها منه، وهذا يعني احتمال أنه كان في علاقة أقرب إلى سارة

فورد من ابنتها فيرونكا، وقد استخدم الراوي تقنية سردية في التعليق على الأحداث، ألا وهي تقنية التلخيص [12]. حيث قدم الراوي ملخصاً بالحقائق التي تخدم غرضه، وأسقط غيره، وبما أن أحداث تلك العطللة قدمت من وجهة نظر الراوي عن طريق بالتبشير الذاتي [5]. فيتضح أنه الراوي أنتوني وبستر قد قدم تبشيراً مضملاً يخدم الرواية يخدم الغرض الذي يرمي إليه.

يتضح مما سبق أن العلاقة بين أنتوني وسارة فورد هي علاقة مستنتجة عبر إشارات وتلميحات متفرقة من الرواية، ولا يمكن الجزم بصحتها، لذلك تظل في المنطقة الضبابية (I)، مع احتمال أن يكون قد حصل تواصل بيولوجي، وهو احتمال يستند على الاستنتاج المبني على سد الفجوات بالتأويل، بناء على تلك الإشارات والتلميحات المتفرقة التي وردت بالرواية.

2.15. 5. يوميات أدريان: كانت تلك اليوميات من ضمن التركة التي آلت إليه بناء على وصية السيدة سارة فورد، والجانب الحقيقي فيها أن أدريان ترك يوميات، وقد أحرقت فيرونكا معظمها، ووصلته منها صورة مبتورة تحتوي على معادلة رياضية ساقها أدريان لتحديد المسؤولية التاريخية في الأحداث، وتمثل شاهد تاريخي أخير على محاولته لتفسير التاريخ قبل انتحاره، أما الجانب الخاطيء لهذه الحقيقة فهو فشل أنتوني في القراءة الصحيحة لتاريخ صديقه أدريان بناء على تلك اليوميات المبتورة، حيث اعتقد أن انتحاره كان مجرد انتحار لأسباب فلسفية خالصة تتعلق بمفهوم الحياة وامتلاكها أو التخلي عنها، وهو أمر لم يكن صحيحاً، كما يتضح ذلك لاحقاً بعد التوغل في السرد، فسيكتشف أن انتحار أدريان كان بسبب علاقته المعقدة بأب فيرونكا وطفله المتخلف عقلياً، أما الجانب الضبابي في تلك اليوميات فينشأ عن العبارة المبتورة: "وهكذا لو أن توني... [4]". الأمر الذي يفتح باباً للتأويلات المختلفة والمتناقضة، دون القدرة على الجزم بأن تأويلاً منها هو الصواب، أو مراد أدريان، فهي مثبتة كوثيقة موجودة في النص، إلا أنها ناقصة وتفتتح على تأويلات على قراءات مختلفة، مما يبقها في المنطقة الضبابية (I)، ومن ناحية المنظور النفسي فإنها تكشف عن الكبت الذي يمارسه الراوي في ذكرياته، فيقرأ تلك اليوميات بما يتوافق مع مراده وحاجته إلى الفهم والسيطرة، لذلك تصبح اليوميات أداة لإعادة تنظيم القلق النفسي تجاه التاريخ الشخصي المخزي، وليس وسيلة للوصول إلى الحقيقة الكاملة. ويمكن تمثيل العينة السردية النيترسوفية كما في الجدول أدناه:

الحدث	القيمة الصادقة (T)	القيمة الضبابية (I)	القيمة الزائفة (F)	الاستنتاج
عطللة أوريغتون	حدوث تواصل بيولوجي بين أنتوني وسارة. (استنتاج)	تودد سارة إلى أنتوني.	ادعاء أنتوني الهروب بعدم الفهم على البراءة.	حدث بتر لجزء من السرد، واستخدام (I) لإخفاء (T) وتميرير (F)
مبلغ الوصية (50) جنيهاً	ثمن الدم، الدية الشرعية للأب الحقيقي.	لغة غير واضحة من امرأة ميتة للصديق القديم لابنتها.	اعتذار عن إهانة أو سخريه من عائلة أرستقراطية.	تركم الاستنتاجات التي تشير إلى أبوة للطفل المشوه (جاك) أنتوني يرحح كفة أنه ثمن المسؤولية البيولوجية.
معادلتا أدريان	(1) أنتوني هو المتغير المستقل.	العلاقة المعقدة بين (1) و(2) أدريان.	مجرد تبرير فلسفي للمسؤولية التراكمية بصورة عامة.	(1) يسبق (2) في رتبة المسؤولية الوجودية.

2.15.6. تطبيق على الجدول أعلاه:

يتضح مما سبق أن مبلغ الوصية المالية له ثلاث مدلولات، فالمدلول الظاهر للوصية (F) أنها هبة مالية من سارة فورد للصديق القديم لابنتها، بينما الدلالة المحايدة للوصية نفسها (I) أنها لغز غير مفهوم يربط بين شخصيتين لم تلتقيا منذ عقود، أما الدلالة المستترة (T) - التي تم استنتاجها - فهي ثمن الدم، أو اعتراف مادي بمسئولية بيولوجية مستمرة.

يتضح مما سبق أن رواية (الإحساس بالنهاية) تمثل مرآة تعكس وجود الإنسان في مأزقه الأزلي، حين تصطم واقعية أحداثه مع سقف تطلعاته، بطريقة تتعارض مع مسارات آماله وأمنيته، التي هي منبع عدم التحديد في الذاكرة البشرية، في تلك المنطقة الضبابية لا يجد الإنسان مفرأ من إعادة تشكيل تاريخه الشخصي، فيعتمد إلى تزيف الحقائق أو تمويهها، رغبة في النجاة النفسية، وليس حباً في الكذب بالضرورة، ويمثل أنتوني وبستر نموذجاً لكل إنسان يحاول ردم تلك الهوة العميقة بين تحديات حياته كما هي على أرض الواقع، وبين ما يتمنى أن تكون عليه حياته كما هي في مخيلته، فيعتمد إلى استخدام الضبابية كستار يقيه من مواجهة واقعه الأليم، الأمر الذي يجعل من استخدام المنطق النيتروسوفي أداة مناسبة لفهم إستراتيجيات الوعي البشري في مواجهة خيبات الأمل.

16. خاتمة:

توصلت الدراسة إلى النتائج التالية:

1.16. فاعلية المنطق النيتروسوفي في استيعاب السيوالة السردية وتصنيفها بطريقة تتجاوز التصنيف الثنائي التقليدي (الصدق (T)، والكذب (F))، وصلاحية أداة نقدية على تفكيك النصوص السردية التي تقوم في بنائها على تقنية الراوي غير الموثوق.

2.16. احتمالية الحقيقة السردية - في رواية الإحساس بالنهاية - فهي تتوزع بين الدرجات النيتروسوفية الثلاث: (الصدق (T)، والكذب (F)، والضبابية (I)).

3.16. سيادة الضبابية في تاريخ الراوي أنتوني وبستر لا يرجع إلى قصور في الذاكرة فحسب كما يبرر هو، وإنما يرجع أيضاً إلى محاولاته المتكررة لتزييف الواقع فرارا من الألم النفسي والشعور بالدونية (عقدة النقص)، فسيستخدم آليات دفاعية نفسية كالكبت والتبرير والإسقاط.

4.16. إن الرموز الضبابية التي تثيرها الرواية - سواء أكانت لأسباب تتعلق بالفشل في التذكر، أو لأسباب نفسية - تفتح جوانباً جمالية مهمة للتأويل في سردها الروائي، ويجعل الرواية قابلة لأكثر من قراءة.

5.16. قدمت الدراسة قراءة جديدة للرواية، عبر استخدام أدوات المنطق النيتروسوفي وتحليل يوميات أدريان، للوصول إلى تحديد المسؤولية الأخلاقية للراوي، فهو شريك في المأساة، وما قدمه من تاريخ ضبابي كان نوعاً من الهروب من تلك المسؤولية.

17. توصيات:

بناء على النتائج السابقة فإن الدراسة توصي بالآتي:

1.17. توسيع نطاق تطبيق استخدام المنطق النيتروسوفي ليشمل بقية الأشكال السردية كالقصة القصيرة والرواية التاريخية، للتعرف على قدرة المنهج على معالجة الفجوات والمفارقات السردية.

2.17. الدعوة إلى تشجيع الدراسات البيئية التي تجمع بين العلوم الصرفة والعلوم الإنسانية، لما يوفره ذلك النوع من الدراسات من أدوات منضبطة تساهم في الكشف عن المظاهر الجمالية والنفسية.

3.17. الدعوة إلى وضع معجم للمصطلحات النيتروسوفية السردية، حتى يساهم في توحيد المفاهيم الإجرائية للمنهج، ويسهل تداولها واستخدامها.

4.17. الدعوة إلى إدراج المنطق النيتروسوفي في المناهج الجامعية العربية للنقد الحديث، حتى يساعد في تطوير ومواكبة النظرية النقدية للتطورات العالمية في نظرية الأدب.

المراجع:

1. أحمد سلامة ومحمد كمال سرحان، وهدى إسماعيل خالد، وأحمد خضر عيسى، التحليل النيتروسوفي لجماليات اللغة في رواية "الرجل والطريق"، مجلة *Neutrosophic Knowledge*، العدد (7)، سنة 2025م.
2. أحمد عزت راجح، أصول علم النفس، الطبعة السابعة، دار الكتاب العربي، القاهرة، سنة 1968م.
3. ألفريد أدلر، معنى الحياة، ترجمة عادل نجيب بشرى، الطبعة الأولى، المجلس الأعلى للثقافة، القاهرة، سنة 2005م.
4. جوليان بارنز، رواية الإحساس بالنهاية، ترجمة خالد مسعود شقير، الطبعة الأولى، المجلس الأعلى للثقافة والفنون، الكويت، سنة 2012م.
5. حميد لحداني، بنية النص السردية، الطبعة الأولى، المركز الثقافي العربي للثقافة والنشر، بيروت، سنة 1991م.
6. ديفيد لودج، الفن الروائي، ترجمة ماهر البطوطي، مؤسسة هنداوي للنشر، القاهرة، سنة 2023م.
7. شاكر عبد الحميد، الخيال من الكهف إلى الواقع الافتراضي، المجلس الأعلى للثقافة والفنون، الكويت، سنة 2009م.
8. صالح بوزينة، المنطق الضبابي بكل بساطة، نور نشر، ملدوفا، سنة 2024م.
9. فرج عبد القادر طه وآخرون، معجم علم النفس والتحليل النفسي، دار النهضة العربية، بيروت، (دون . تاريخ).
10. فلورتن سمارانداكه، مقدمة في الإحصاء النيتروسوفيكي، ترجمة رفيف فيصل الحبيب، دار النشر التعليمية، أوهايو، سنة 2020م.
11. كمال بزوبيري، اضطراب ما بعد الصدمة النفسية: مراجعة نظرية والعلاج النفسي، مجلة المجتمع والرياضة، العدد (2)، مجلد 7، سنة 2024م.
12. وين بوث، بلاغة الفن القصصي، جامعة الملك سعود، سنة 1994م.

*Article*

Huit ans de “Neutrosophic Computing and Machine Learning” : rétrospective bibliométrique et extension neutrosophique de l’analyse bibliométrique (2018-2026)

Maikel Leyva-Vázquez^{1*}, Yismandry Gonzalez Vargas², Florentin Smarandache³

¹ Universidad Bolivariana del Ecuador / Universidad de Guayaquil, Ecuador ; redacteur en chef, *Neutrosophic Computing and Machine Learning*. Courriel : mleyvaz@gmail.com

² Asociacion Latinoamericana de Ciencias Neutrosóficas (ALCN), La Habana, Cuba. Courriel : yismandrygonzalezvargas@gmail.com

³ Université du Nouveau-Mexique, Mathematics, Physics, and Natural Sciences Division, 705 Gurley Ave., Gallup, NM 87301, USA ; redacteur en chef, Neutrosophic Sets and Systems. Courriel : smarand@unm.edu

* Correspondence: mleyvaz@gmail.com

Reçu : 24 avril 2026 ; Accepté : [le 15 avril 2026 ; Publié : [le 27 avril 2026]

Résumé : *Neutrosophic Computing and Machine Learning* est la revue consacrée aux méthodes appliquées de l’écosystème de publications neutrosophique fondé par Florentin Smarandache, avec 42 volumes publiés entre 2018 et 2026 (partiel). Aucune rétrospective bibliométrique systématique de la revue n’a été publiée, et la critique méthodologique récente de Woodall, Faltin et Reynolds (2025) soulève trois préoccupations empiriquement vérifiables concernant le champ neutrosophique : concentration méthodologique, concentration citationnelle et validation externe limitée.

Cet article combine une rétrospective bibliométrique classique de NCML (sections 4 et 7) et une contribution méthodologique : l’introduction d’un cadre bibliométrique neutrosophique qui promeut l’indétermination au rang de composante de mesure de premier ordre (sections 3 et 5). Nous avons constitué un corpus reproductible de 762 articles par extraction automatisée, enrichi avec OpenAlex (671/719 DOI) et DataCite (704/719), désambiguïsé 1 363 auteurs uniques par union-find (quatre règles hiérarchiques), ajusté les lois classiques de Lotka et de Bradford, construit le réseau de co-auteurs de Louvain, et modélisé 24 sujets par plongements multilingues suivis d’UMAP et de KMeans sur 725 résumés exploitables.

Le cadre neutrosophique étend cinq indicateurs classiques — indice h , exposant de Lotka, appartenance aux zones de Bradford, appartenance document-sujet et poids d’arête de co-auteurs — en triplets neutrosophiques à valeur unique (T, I, F) dont la composante d’indétermination est calculée à partir des données et non sollicitée auprès d’experts. Le test opérationnel central du cadre est un classement neutrosophique agrégé des auteurs au moyen de l’opérateur SVNWA.

Les résultats classiques confirment une revue en croissance rapide avec un TCAC de 42 % (2018-2025), un exposant de Lotka $\alpha = 2,03$ (K-S rejeté), un noyau de Bradford de cinq revues concentrant 33 % des citations (17 % d’auto-citation vers l’écosystème neutrosophique), un graphe de co-auteurs de modularité 0,96 avec seulement 16 % pour sa composante connexe principale, un déplacement d’identité thématique de -21,6 pp dans le sujet de l’éducation entre 2018-2020 et 2023-2025, et un écart d’un ordre de grandeur entre les sources de citation (indice h_5 de Google Scholar = 10 contre $h = 1$ sur OpenAlex).

L’analyse neutrosophique décompose ces résultats : N-indice- h (T = 0,04, I = 0,50, F = 0,46), N-Lotka (T = 0, I = 1, F = 0), appartenance graduée au noyau de Bradford où seules deux revues atteignent $T \geq 0,85$, 61 % des documents en indétermination thématique de frontière, et seulement 1,8 % des arêtes de co-auteurs avec une collaboration vérifiée $T \geq 0,5$.

Le classement agrégé SVNWA de 146 auteurs diverge substantiellement du classement classique par nombre d'articles (τ de Kendall = 0,20, recouvrement top-10 de 5/10), divergence inatteignable par l'agrégation floue, intuitionniste-floue ou probabiliste sans introduire une structure équivalente au triplet (T, I, F). L'article se clôt sur une feuille de route éditoriale de quinze recommandations organisée sur un horizon de trois ans.

Keywords: Neutrosophie, Intelligence Artificielle, Incertitude, Pensée Critique, Indétermination, Systèmes Neutrosophiques, Modèles de Langage, Logique, Plithogénie, Applications IA.

1. Introduction

Les analyses bibliométriques des revues scientifiques remplissent une triple fonction dans la communauté éditoriale : elles documentent l'évolution historique d'une publication, exposent sa structure collaborative et mettent en évidence tant les forces que les biais systémiques en vue de l'ajustement de la politique éditoriale [2, 3]. Lorsque les signataires sont les rédacteurs eux-mêmes, l'exercice prend en outre le caractère d'un audit interne, avec l'avantage d'un accès privilégié aux données et l'inconvénient d'un conflit d'intérêts manifeste.

Les revues scientifiques émergentes des pays hispanophones font face à un double défi : démontrer un impact réel dans un écosystème dont les sources de citation ne sont pas pleinement indexées par les bases de données bibliographiques commerciales telles que Scopus et Web of Science, et professionnaliser leurs processus éditoriaux afin d'accéder à ces bases. Les asymétries entre les sources — documentées par Harzing et van der Wal [12] dans le cas de Google Scholar face à Web of Science, et étendues par Martin-Martin et al. [13] au contraste Scholar–OpenAlex–Scopus — sont particulièrement sévères pour les revues ibéro-américaines en sciences sociales et pour les revues publiées sur des dépôts en accès libre tels que Zenodo ou SciELO.

Les méthodes bibliométriques classiques traitent comme des grandeurs nettes ce qui est fondamentalement incertain. Les comptages de citations s'effondrent lorsque les sources divergent d'un ordre de grandeur ; l'exposant de Lotka est rapporté comme une estimation ponctuelle alors même que le test de Kolmogorov-Smirnov (K-S) rejette l'hypothèse de forme ; les zones de Bradford partitionnent les revues en catégories rigides malgré des cas-limites évidents ; les attributions document-sujet sont réduites à des étiquettes « le gagnant rafle tout » alors que le regroupement souple produit des appartenances graduées ; et les arêtes de co-auteurs assignent le même poids à une collaboration sur un article qu'à un partenariat soutenu sur cinq articles. Cette indétermination n'est pas un bruit de mesure — c'est une propriété authentique des données bibliographiques contemporaines, et c'est précisément le type de phénomène que la logique neutrosophique a été conçue pour traiter [4].

1.1 L'écosystème neutrosophique

La neutrosophie, formalisée par Florentin Smarandache en 1998 comme extension trivalente de la théorie des ensembles flous [4, 5], a engendré un écosystème éditorial spécifique articulé autour de la Neutrosophic Science International Association (NSIA). Le doyen de cet écosystème est *Neutrosophic Sets and Systems* (NSS), fondée en 2013 et indexée dans Scopus en 2021, avec un indice h5 de Google Scholar de 57 à la fin de 2024. *International Journal of Neutrosophic Science* (IJNS, 2019 ; h5 = 31) a suivi, et, comme organe consacré aux applications et aux méthodes computationnelles, *Neutrosophic Computing and Machine Learning* (NCML) commence à paraître en 2018 et totalise, au 22 avril 2026, 42 volumes.

NCML a été conçue comme le pendant appliqué de NSS, mettant l'accent sur les études de cas, les méthodes d'aide à la décision multicritère et les applications logicielles. Au cours de ses premières années, elle publiait de 24 à 35 articles par an avec une forte représentation latino-américaine (principalement Cuba et l'Équateur). À partir de 2022, la revue a connu une expansion éditoriale qui a porté la production au-delà de 250 articles par an en 2025. À la connaissance des auteurs, aucune rétrospective bibliométrique systématique de NCML n'a été publiée.

1.2 Critique méthodologique récente : Woodall et al. (2025)

En avril 2025, Woodall, Faltin et Reynolds ont publié dans *Quality Engineering* une critique substantielle des usages inférentiels des ensembles neutrosophiques en maîtrise statistique des procédés et en aide à la décision multicritère [18]. Leurs préoccupations centrales peuvent être résumées en trois points : (i) la plupart des applications rapportées utilisent des configurations AHP-TOPSIS standards assorties de nombres neutrosophiques sans justifier pourquoi l'indétermination devrait être modélisée par trois composantes ; (ii) les comparaisons avec les approches floues classiques ou bayésiennes sont absentes ou superficielles ; (iii) le cercle de citation interne de l'écosystème neutrosophique limite la validation externe des méthodes.

Cette critique offre un cadre utile pour une étude bibliométrique qui documente empiriquement les trois signaux que Woodall et ses co-auteurs dénoncent comme indicatifs d'un champ autoréférentiel : concentration méthodologique, concentration citationnelle et concentration géographique. La présente étude adopte explicitement ce cadre comme hypothèse de travail, sans présumer a priori que les trois schémas se vérifient, et en laissant les données les soutenir, les nuancer ou les réfuter.

1.3 Objectifs et questions de recherche

L'étude poursuit trois objectifs articulés :

1. **Descriptif** : documenter la trajectoire éditoriale de *Neutrosophic Computing and Machine Learning* entre 2018 et 2026, y compris le volume annuel, l'agenda thématique, la géographie des signatures et la structure des co-auteurs.
2. **Analytique** : ajuster les lois bibliométriques classiques (Lotka, Bradford) et comparer les résultats aux valeurs théoriques de référence et à la littérature comparative sur les revues hispanophones en sciences sociales.
3. **Méthodologique** : proposer une extension neutrosophique de cinq indicateurs bibliométriques classiques et démontrer, via un classement agrégé des auteurs utilisant SVNWA, que ce cadre produit des conclusions inatteignables par des formalismes alternatifs de parcimonie conceptuelle comparable.

De ces objectifs, nous dérivons six questions de recherche.

- **QR1.** Comment le volume éditorial, la composition géographique et la composition institutionnelle de NCML ont-ils évolué au long de ses 42 volumes ?
- **QR2.** Comment la productivité des 1 363 auteurs uniques du corpus est-elle distribuée, et quelle structure de collège invisible émerge du réseau de co-auteurs ?
- **QR3.** Quel schéma de dispersion suivent les revues citées par NCML et quel est le taux d'auto-citation au sein de l'écosystème neutrosophique ?
- **QR4.** Combien de sujets regroupent la production de NCML et comment la part de chaque sujet a-t-elle évolué entre 2018-2020 et 2023-2025 ?
- **QR5.** Dans quelle mesure les signaux d'impact citationnel diffèrent-ils selon les sources bibliométriques, et quelles leçons en découlent pour la stratégie d'indexation de la revue ?
- **QR6.** Un agrégat neutrosophique des profils (T, I, F) par indicateur produit-il des classements au niveau auteur ou au niveau source différents de leurs homologues classiques nets, et cette différence est-elle interprétable éditorialement ?

1.4 Contribution et structure

La contribution principale consiste à doter l'écosystème neutrosophique d'une première base empirique sur *Neutrosophic Computing and Machine Learning*, construite au moyen d'un pipeline reproductible et de limites explicitement documentées. En contribution secondaire, l'article introduit un cadre neutrosophique pour l'analyse bibliométrique qui se généralise à toute revue disposant d'une évidence citationnelle multi-sources, et valide empiriquement ce cadre sur le corpus NCML.

Le code, les jeux de données intermédiaires, les figures et les sommes de contrôle SHA-256 sont publiés sur GitHub sous licences MIT (code) et CC-BY 4.0 (données).

L'article est organisé comme suit. La section 2 revisite le cadre théorique de la logique neutrosophique et des indicateurs bibliométriques classiques. La section 3 présente le cadre et le pipeline de données. La section 4 expose la rétrospective bibliométrique classique de NCML. La section 5 présente l'analyse neutrosophique du même corpus, culminant dans le classement agrégé des auteurs par SVNWA qui distingue opérationnellement la neutrosophie des formalismes alternatifs. La section 6 discute les implications et dialogue avec la critique de Woodall et al. (2025). La section 7 résume quinze recommandations éditoriales. La section 8 conclut.

2. Cadre théorique

2.1 Logique neutrosophique et nombres neutrosophiques à valeur unique

La logique neutrosophique [4, 5] généralise la logique floue en introduisant une composante d'indétermination distincte. Une valeur neutrosophique est un triplet (T, I, F) où T est le degré de vérité, I le degré d'indétermination et F le degré de fausseté, chacun appartenant à $[0, 1]$. Contrairement à la logique floue intuitionniste, les trois composantes sont indépendantes : la contrainte $0 \leq T + I + F \leq 3$ est respectée, mais aucune égalité n'est imposée. Un nombre neutrosophique à valeur unique (SVN) est un cas particulier dans lequel T , I et F sont des nombres réels explicites dans $[0, 1]$ [6]. Les SVN admettent les opérations algébriques standards (addition, multiplication, multiplication scalaire) ainsi que plusieurs opérateurs d'agrégation formalisés pour l'aide à la décision multicritère [7, 11].

Nous adoptons la convention de notation suivante. Étant donnée une population P d'éléments et une propriété Q , le profil d'appartenance neutrosophique de P relativement à Q est le triplet :

$$N_Q(P) = (T_Q, I_Q, F_Q) \quad (1)$$

où T_Q est la proportion d'éléments pour lesquels Q est vérifiée par une preuve positive directe, I_Q la proportion pour laquelle la preuve est ambiguë, et F_Q la proportion pour laquelle Q est contredite par une preuve négative explicite.

2.2 Pourquoi la neutrosophie convient à la mesure bibliométrique

Trois caractéristiques structurelles des données bibliographiques font du traitement neutrosophique un choix naturel plutôt qu'ornemental.

Premièrement, plusieurs sources d'évidence partiellement superposées — telles que Crossref, Scopus, OpenAlex, Google Scholar, DataCite et Dimensions — divergent systématiquement, et ce désaccord reflète des différences authentiques de couverture plutôt qu'un simple bruit de mesure.

Deuxièmement, les affectations souples produites par les méthodes de regroupement (UMAP + KMeans, BERTopic) génèrent des appartenances probabilistes qui sont habituellement abandonnées au profit d'un rapportage de type « le gagnant rafle tout ».

Troisièmement, la disponibilité asymétrique de l'évidence négative : confirmer qu'un article n'a pas été cité exige une couverture exhaustive qu'aucune base unique ne fournit. Le triplet (T, I, F) capture naturellement cette asymétrie : F représente la part des éléments pour lesquels toutes les sources consultées s'accordent sur une absence, tandis que I représente la part pour laquelle la couverture est insuffisante pour conclure.

Cela motive l'engagement méthodologique central de cet article : la composante d'indétermination est calculée à partir des données, et non sollicitée auprès d'experts au moyen d'échelles linguistiques. Cela distingue ce cadre de la famille des articles neutrosophiques de type AHP-TOPSIS, dans lesquels (T, I, F) sont issus de jugements humains [7, 17], et répond directement à la préoccupation de Woodall et al. (2025) selon laquelle le choix des trois composantes est rarement justifié par la structure des données [18].

2.3 Rappel des indicateurs bibliométriques classiques

Indice h [19]

Étant donné un ensemble d'articles dont les nombres de citations sont triés par ordre décroissant, h est le plus grand entier tel que le h -ième article possède au moins h citations. L'indice $h5$ au niveau d'une revue correspond à h restreint aux articles publiés durant les cinq dernières années.

$$c_h \geq h$$

Loi de Lotka [14]

Le nombre d'auteurs $n(x)$ produisant exactement x publications suit une loi de puissance telle que :

$$n(x) \propto x^{-\alpha}$$

avec un exposant classique $\alpha \approx 2$. L'exposant est ajusté par maximum de vraisemblance [15, équation 3.1], et la qualité de l'ajustement est évaluée au moyen de la statistique de Kolmogorov-Smirnov comparée à :

$$\frac{1,36}{\sqrt{N}}$$

au seuil de 5 %.

Loi de Bradford [20]

Lorsque les revues sont classées par ordre décroissant du nombre de citations reçues et que le total cumulé est partitionné en trois zones contenant chacune un tiers des citations, les effectifs suivent une progression géométrique :

$$|Z_2| \approx k \cdot |Z_1|$$

et

$$|Z_3| \approx k \cdot |Z_2|$$

où k est le multiplicateur de Bradford, typiquement compris entre 3 et 5 pour les champs scientifiques matures.

Modélisation thématique

Le regroupement souple (LDA, BERTopic, KMeans sur plongements vectoriels) attribue à chaque document une distribution de probabilités sur les sujets ; les études bibliométriques rapportent classiquement uniquement le sujet dominant.

Réseaux de co-auteurs

Les auteurs constituent les nœuds du graphe ; le poids d'une arête correspond au nombre d'articles partagés. La centralité, la détection de communautés [16] et la modularité sont calculées sur le graphe pondéré, en traitant les comptages bruts comme s'ils ne véhiculaient qu'un seul type d'information.

3. Le cadre bibliométrique neutrosophique et son pipeline

3.1 Corpus et pipeline de données

Le corpus empirique est constitué des 762 articles publiés par *Neutrosophic Computing and Machine Learning* dans les volumes 1 à 42 (2018 à avril 2026). Les métadonnées au niveau des articles (titre, auteurs, volume, année, pages, DOI) ont été extraites de l'index officiel de la revue le 19 avril 2026, puis enrichies par OpenAlex (671 articles, 93,3 %), DataCite (704 articles, 97,9 %) et — pour les mesures agrégées au niveau de la revue — par Google Scholar Metrics.

Les PDF en texte intégral ont été récupérés pour 728 articles sur 762 (couverture : 95,5 % ; 33 URL présentaient un encodage corrompu à la source). Pour chaque PDF, nous avons extrait le résumé (*resumen* en espagnol, taux d'extraction de 91,5 % ; *abstract* en anglais, 41 %), la liste des mots-clés (94 %), les adresses électroniques (99 %) et le bloc des références (95 %).

Les 2 225 couples auteur–article ont été désambiguïsés en 1 363 auteurs uniques au moyen d'un algorithme *union-find* appliquant quatre règles d'équivalence hiérarchiques, par ordre décroissant de force : (i) ORCID partagé ; (ii) identifiant auteur OpenAlex partagé ; (iii) nom canonique partagé (normalisation NFKD, minuscules, suppression des *stopwords*, tri alphabétique) ; (iv) clé « initiale + nom de famille » en l'absence de conflit ORCID. La désambiguïsation a réduit les 1 539 signatures brutes de 9,9 %. Les 100 plus grands clusters ont été inspectés manuellement ; aucune fusion erronée n'a été détectée.

Le pipeline complet est implémenté en Python 3.14 avec vingt scripts numérotés (01–20 et utilitaires) ; le code source, les données intermédiaires (CSV/JSONL), les figures et les sommes de contrôle SHA-256 sont publiés sur GitHub (code sous licence MIT, données sous licence CC-BY 4.0). Le pipeline est idempotent et reproductible de bout en bout en environ 30 minutes sur un ordinateur portable moderne.

3.2 Extensions neutrosophiques des indicateurs classiques

Les cinq extensions suivantes appliquent le triplet (T, I, F) à chacun des indicateurs classiques présentés dans la section 2.3. Dans chaque cas, l'indicateur classique est retrouvé lorsque la composante d'indétermination tend vers zéro ; le cadre proposé est donc strictement plus riche en information que la ligne de base classique.

3.2.1 Indice h neutrosophique

Pour chaque article a_i dont les nombres de citations proviennent de K sources indépendantes, on définit un indicateur d'évidence par article e_i :

$$e_i = \frac{|\{k: c_i^{(k)} \geq 1\}|}{K} \quad (2)$$

Les articles sont classés en catégories $T(e_i = 1)$, $I(0 < e_i < 1)$ ou $F(e_i = 0)$.

Le profil de l'indice h neutrosophique de la revue est défini comme :

$$N_h(J) = (h_T, h_I, h_F) \quad (3)$$

où h_T est l'indice h calculé sur les articles de classe T , et h_{T+I} l'indice h calculé sur les articles des classes T et I . L'indice h classique est retrouvé en choisissant la source la plus exhaustive.

3.2.2 Exposant de Lotka neutrosophique

Soient x_1, \dots, x_N les niveaux de productivité observés. Pour $b = 1, \dots, B$, on effectue un rééchantillonnage avec remise (*bootstrap*) et l'on calcule l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\alpha}_b$ ainsi que la statistique K-S D_b .

Le profil neutrosophique de Lotka est défini par :

$$T = \frac{|\{b: \hat{\alpha}_b \in [1.9, 2.1] \text{ et } D_b \leq D_{crit}\}|}{B} \quad (4)$$

$$I = \frac{|\{b: \hat{\alpha}_b \in [1.9, 2.1] \text{ et } D_b > D_{crit}\}|}{B} \quad (5)$$

$$F = \frac{|\{b: \hat{\alpha}_b \notin [1.9, 2.1]\}|}{B} \quad (6)$$

avec :

$$D_{crit} = \frac{1,36}{\sqrt{N}} \quad (7)$$

Nous utilisons $B = 1000$ et un état aléatoire fixé à 42.

3.2.3 Appartenance neutrosophique aux zones de Bradford

La partition stricte de Bradford est remplacée par une appartenance graduée au noyau. Pour une revue ayant une part citationnelle s_j , soit s^* la part à laquelle le cumul atteint 1/3 (frontière classique du noyau) et $\kappa = 0,4 \cdot s^*$ une constante de lissage.

$$T_{nuc}(j) = \sigma\left(\frac{s_j - s^*}{\kappa}\right) \quad (8)$$

$$I_{nuc}(j) = 0,4 \cdot \exp\left(-\frac{(s_j - s^*)^2}{2(1,5\kappa)^2}\right) \quad (9)$$

$$F_{nuc}(j) = \max(0,1 - T_{nuc}(j) - I_{nuc}(j)) \quad (10)$$

où σ désigne la fonction logistique. L'équation (9) crée un pic d'indétermination à proximité de la frontière.

3.2.4 Appartenance neutrosophique document-sujet

Soit d_i la distance euclidienne du document i à son centroïde de cluster assigné, d'_i la distance au cluster alternatif plus proche, et $\hat{\sigma}$ la médiane des d_i dans le corpus. Alors :

$$T_{topic}(i) = \exp\left(-\frac{d_i^2}{2\hat{\sigma}^2}\right) \quad (11)$$

$$I_{topic}(i) = 0,5 \cdot \exp\left(-\frac{(d'_i - d_i)^2}{2(0,5\hat{\sigma})^2}\right) \quad (12)$$

$$F_{topic}(i) = \max(0,1 - T_{topic}(i) - I_{topic}(i)) \quad (13)$$

3.2.5 Poids d'arête neutrosophique des co-auteurs

Pour une arête (u, v) comportant w articles partagés :

$$T_{collab}(u, v) = 1 - \exp\left(-\frac{w-1}{2}\right) \quad (14)$$

$$I_{collab}(u, v) = \begin{cases} 0,5 & \text{si } w = 1 \\ 0,5 \exp\left(-\frac{w-1}{1,5}\right) & \text{si } w > 1 \end{cases} \quad (15)$$

$$F_{collab}(u, v) = \max(0,1 - T_{collab}(u, v) - I_{collab}(u, v)) \quad (16)$$

T sature pour une collaboration confirmée ; I atteint son maximum lorsque $w = 1$ (article unique, potentiellement opportuniste) ; F constitue le résidu.

3.3 Agrégation neutrosophique (SVNWA)

L'agrégation des triplets par indicateur est réalisée au moyen de l'opérateur *Single-Valued Neutrosophic Weighted Arithmetic* (SVNWA) proposé par Ye [11] :

$$SVNWA((T_j, I_j, F_j); w_j) = \left(1 - \prod_j (1 - T_j)^{w_j}, \prod_j I_j^{w_j}, \prod_j F_j^{w_j}\right) \quad (17)$$

La fonction de score de Florentin Smarandache projette l'agrégat sur $[0, 1]$:

$$S(T, I, F) = \frac{2 + T - I - F}{3} \quad (18)$$

3.4 Mise en œuvre et environnement computationnel

Tous les calculs ont été effectués sur un ordinateur portable unique (16 Go de RAM) avec Python 3.14, pandas, numpy, scipy, scikit-learn, sentence-transformers, umap-learn, networkx, python-louvain, matplotlib et python-docx. La modélisation thématique utilise les plongements multilingues *paraphrase-multilingual-MiniLM-L12-v2* [22], réduits à cinq dimensions par UMAP [23], puis regroupés par KMeans ; le nombre de clusters $K = 24$ a été sélectionné au moyen du coefficient de silhouette (0,43) pour $K \in [10, 25]$.

Le rééchantillonnage bootstrap pour le Lotka neutrosophique ($B = 1000$) utilise un état aléatoire fixé à 42. Le pipeline complet est documenté par vingt scripts numérotés (01–20 et extensions neutrosophiques 27–29).

4. Rétrospective bibliométrique classique de *Neutrosophic Computing and Machine Learning*

Cette section présente les résultats bibliométriques classiques obtenus sur le corpus de *Neutrosophic Computing and Machine Learning*. Chaque sous-section traite une question de recherche spécifique et renvoie à la figure correspondante. La section 5 réanalysera ensuite le même corpus à travers le cadre neutrosophique présenté dans la section 3.

4.1 Croissance éditoriale et formation de la communauté (QR1)

Entre 2018 et 2026, *Neutrosophic Computing and Machine Learning* a publié 762 articles répartis sur 42 volumes. La croissance annuelle suit une trajectoire exponentielle marquée, avec un taux de croissance annuel composé (TCAC) de 42 % entre 2018 et 2025 (figure 1A). La revue est passée de 24 articles en 2018 à 250 en 2025, soit un multiplicateur supérieur à dix en sept ans. L'année 2026 apparaît partielle puisque la date de clôture de la collecte est fixée à avril 2026.

La formation cumulative de la communauté a progressé en parallèle (figure 1B). Le nombre d'auteurs uniques est passé de 50 en 2018 à 1 363 en 2026, soit un facteur multiplicatif d'environ 27. Le nombre de nouveaux auteurs par an est resté relativement stable, autour de 50 à 65 entre 2018 et 2021, puis a été multiplié par six à partir de 2023 (124 nouveaux auteurs en 2022, 323 en 2023, 316 en 2024 et 349 en 2025), indiquant une expansion rapide du vivier de collaborateurs ayant accompagné la croissance du volume éditorial.

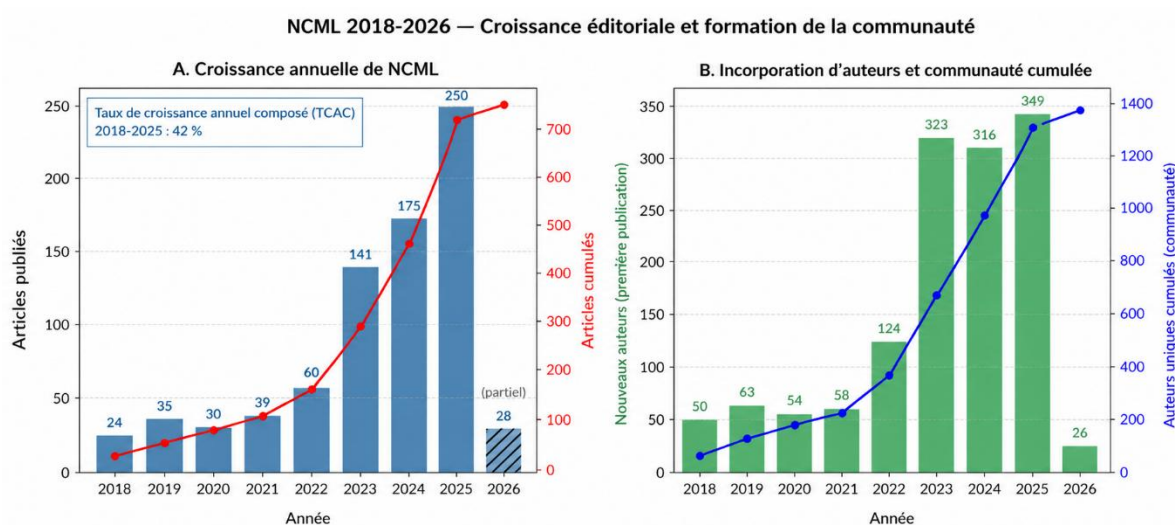


Figure 1. Croissance éditoriale de *Neutrosophic Computing and Machine Learning*. (A) Articles publiés par année avec un TCAC 2018-2025 = 42 %. Les barres hachurées indiquent des données annuelles partielles. (B) Nouveaux auteurs par année et courbe cumulative des auteurs uniques. (Source : growth.png.)

4.2 Distribution géographique et institutionnelle

La distribution des signatures d'auteurs (fondée sur 88 % des lignes d'auteurs pour lesquelles une affiliation a pu être extraite depuis OpenAlex) révèle une concentration régionale extrême (figure 2A). Sur 158 signatures associées à un pays identifié, 150 (94,9 %) correspondent à des pays ibéro-américains. L'Équateur concentre 60,1 % des signatures (95), Cuba 19,0 % (30) et le Venezuela 7,0 % (11). Le trio Équateur–Cuba–Venezuela absorbe ainsi 86 % du total. Seules huit signatures proviennent de pays extérieurs à l'Ibéro-Amérique : Bulgarie (3), États-Unis (3), Inde (1) et Japon (1).

Au niveau institutionnel (figure 2B), Universidad Regional Autónoma de los Andes (UNIANDES, Équateur) arrive en tête avec 23 signatures, suivie de la Universidad Bolivariana del Ecuador (UBE, 20), de University of Guayaquil (17), de la Universidad Estatal de Bolívar (15), de la Universidad de Holguín (12, Cuba) et de la Universidad Politécnica Salesiana (12, Équateur). Les cinq premières institutions sont toutes équatoriennes ; neuf des dix premières proviennent d'Équateur ou de Cuba.

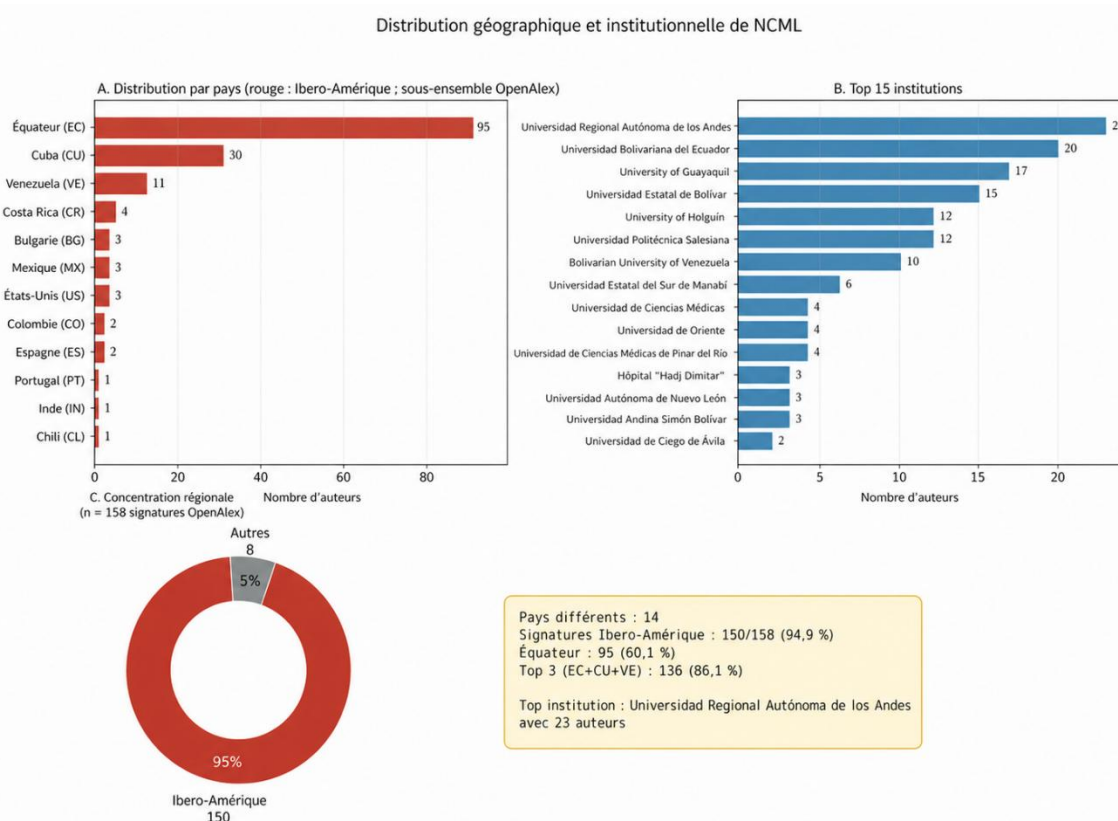


Figure 2. Distribution géographique et institutionnelle des signatures de *Neutrosophic Computing and Machine Learning*. (A) Signatures par pays (pays ibéro-américains en rouge). (B) Top 15 des institutions. (C) Concentration régionale (95 % ibéro-américaine). (Source : *geo.png*.)

4.3 Productivité des auteurs et loi de Lotka (QR2)

Le corpus présente les signatures classiques des distributions de productivité scientifique : une large base d'auteurs occasionnels et une queue réduite d'auteurs très prolifiques. Sur 1 363 auteurs uniques, 940 (69 %) n'apparaissent que dans un seul article, tandis que seulement 51 auteurs (3,7 %) comptent cinq publications ou davantage. Après désambiguïsation, les auteurs les plus prolifiques sont Carmen Marina Mendez Cabrita (29 articles), Florentin Smarandache (25) et Maikel Leyva Vazquez (19).

L'ajustement par maximum de vraisemblance de la loi :

$$n(x) \propto x^{-\alpha}$$

avec $x_{min} = 1$, donne :

$$\hat{\alpha} = 2.027 (SE = 0.028, n = 1363)$$

résultat statistiquement indiscernable de la valeur classique $\alpha = 2$. Toutefois, le test de Kolmogorov-Smirnov n'est pas satisfait ($D = 0,120$; valeur critique à 5 % = 0,038) : les données s'écartent systématiquement de la forme de loi de puissance pure, en particulier dans la queue correspondant aux auteurs ayant $x \geq 5$ publications.

Cette interprétation est cohérente avec le profil typique des revues ayant une forte fonction de formation académique : un flux continu d'auteurs occasionnels (étudiants de troisième cycle, doctorants) se superpose à un petit noyau d'auteurs fortement productifs, produisant ainsi un exposant compatible avec la loi de Lotka mais une forme empirique divergente. Cette lecture demeure robuste aux 1 000 rééchantillonnages bootstrap réalisés dans la section 5.2.

4.4 Dispersion des sources citées et loi de Bradford (QR3)

Les 21 943 références extraites des blocs bibliographiques (moyenne de 31,1 références par article) ont permis d'identifier la revue source dans 11 877 citations (54,1 %). Les revues les plus citées confirment une concentration extrêmement élevée des références. *Neutrosophic Sets and Systems* arrive en tête avec 1 486 citations (12,5 % du total identifié) ; *Neutrosophic Computing and Machine Learning* suit avec 1 142 citations (9,6 %) ; viennent ensuite *Revista Universidad y Sociedad* (491 ; 4,1 %), *Computational Intelligence and Neuroscience* (403 ; 3,4 %) et *Revista Dilemas Contemporáneos* (371 ; 3,1 %).

La partition en trois zones de citations équivalentes (figure 4A) met en évidence une concentration extrême :

- **Zone 1 (noyau)** : 5 revues concentrent 3 963 citations (33,4 %).
- **Zone 2 (intermédiaire)** : 74 revues concentrent 3 970 citations (33,4 %).
- **Zone 3 (périphérie)** : 2 260 revues concentrent 3 944 citations (33,2 %).

Le multiplicateur empirique de Bradford est :

$$k = [14,8 ; 30,5]$$

valeur très éloignée du coefficient relativement stable prédit par la loi classique de Bradford ($k \approx 3-5$). Ce résultat indique une concentration citationnelle extrêmement forte autour d'un noyau très restreint de revues.

Les cinq revues constituant ce noyau (figure 4B) sont :

Rang	Revue	Citations
1	<i>Neutrosophic Sets and Systems</i>	1 047
2	<i>Neutrosophic Computing and Machine Learning (auto-citation)</i>	1 000
3	<i>Universidad y Sociedad (Cuba)</i>	722
4	<i>Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas (Cuba)</i>	608
5	<i>Revista Conrado (Cuba)</i>	586

Neutrosophic Sets and Systems et *Neutrosophic Computing and Machine Learning* représentent conjointement 17,2 % des citations de revues identifiées, ce qui confirme le caractère fortement autoréférentiel de l'écosystème neutrosophique. Parmi les autres revues du noyau, *Revista Universidad y Sociedad*, *Revista Dilemas Contemporáneos* et *Revista Ciencia UNEMI* sont toutes des revues cubaines ou équatoriennes à forte diffusion dans les sciences sociales, ce qui reflète davantage la composition géographique des auteurs que de strictes affinités thématiques.

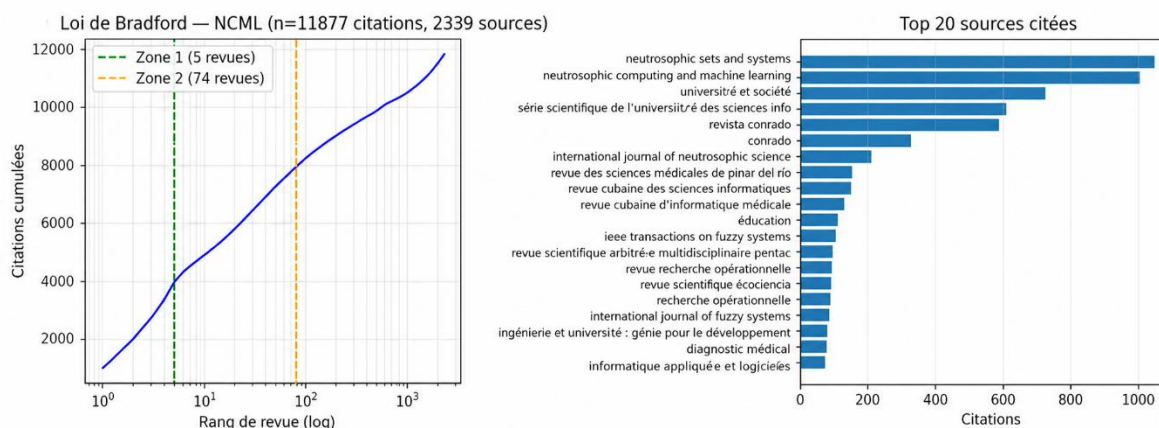


Figure 4. Loi de Bradford appliquée à *Neutrosophic Computing and Machine Learning*. (A) Courbe cumulative des citations selon le rang des revues (échelle logarithmique), avec indication des zones 1 et 2. (B) Top 20 des revues les plus citées ; les revues appartenant à l'écosystème neutrosophique sont signalées en rouge. (Source : *bradford.png*.)

4.5 Agenda thématique et son évolution (QR4)

La modélisation thématique appliquée aux 725 documents disposant de résumés exploitables a permis d'identifier 24 sujets distincts (figure 5), avec un score de silhouette de 0,43 (K optimal dans l'intervalle [10, 25]). La projection UMAP bidimensionnelle révèle une structure organisée en macro-clusters correspondant à des domaines clairement différenciés :

Droit et justice (237 articles agrégés, 33 % du corpus)

- T0 : droit en Équateur
- T17 : droit du travail et migration
- T9 : violence et victimes
- T23 : droit pénal
- T15 : peuples autochtones
- T5 : droit administratif
- T6 : droits des animaux

Santé et médecine (237 articles, 33 %)

- T22 : odontologie
- T12 : maladies infectieuses
- T20 : dépression et personnes âgées
- T3 : traumatologie et neurologie clinique
- T10 : microbiologie clinique
- T13 : grossesse et santé maternelle
- T11 : diabète, obésité et syndrome métabolique

Éducation (76 articles, 13 %)

- T14 : apprentissage et étudiants
- T19 : pédagogie et formation des enseignants

Théorie et méthodes neutrosophiques (98 articles, 14 %)

- T7 : développements théoriques liés à Florentin Smarandache
- T16 : logiciels et ensembles SVN
- T2 : fsQCA et apprentissage automatique

Autres thématiques (62 articles, 9 %)

- T4 : durabilité numérique et municipale
- T21 : eau et pollution
- T18 : véhicules et énergie
- T8 : émotions dans les soins infirmiers

L'évolution temporelle de la part relative des sujets entre les périodes 2018–2020 et 2023–2025 révèle une transformation profonde de l'identité thématique de *Neutrosophic Computing and Machine Learning* (figure 6). Les sujets connaissant les plus fortes progressions sont :

- T8 : gestion publique (+7,2 points de pourcentage) ;
- T17 : applications médicales (+5,8 points) ;
- T21 : évaluation des risques entrepreneuriaux (+4,1 points).

Le recul le plus marqué concerne :

- T14 : éducation (-21,6 points de pourcentage), suivi de ;
- T7 : théorie neutrosophique liée à Smarandache (-9,0 points).

Cette évolution traduit une spécialisation croissante de la revue vers des applications sectorielles latino-américaines.

Les principales diminutions observées sont les suivantes :

- **T14 Éducation / étudiants** : -21,6 points de pourcentage (de 28 % du corpus en 2018–2020 à 6 % en 2023–2025).
- **T16 IA / logiciels / SVNS** : -16,3 points.
- **T7 Smarandache / théorie pure** : -9,0 points.
- **T2 fsQCA / apprentissage automatique** : -7,6 points.
- **T19 Pédagogie** : -5,1 points.

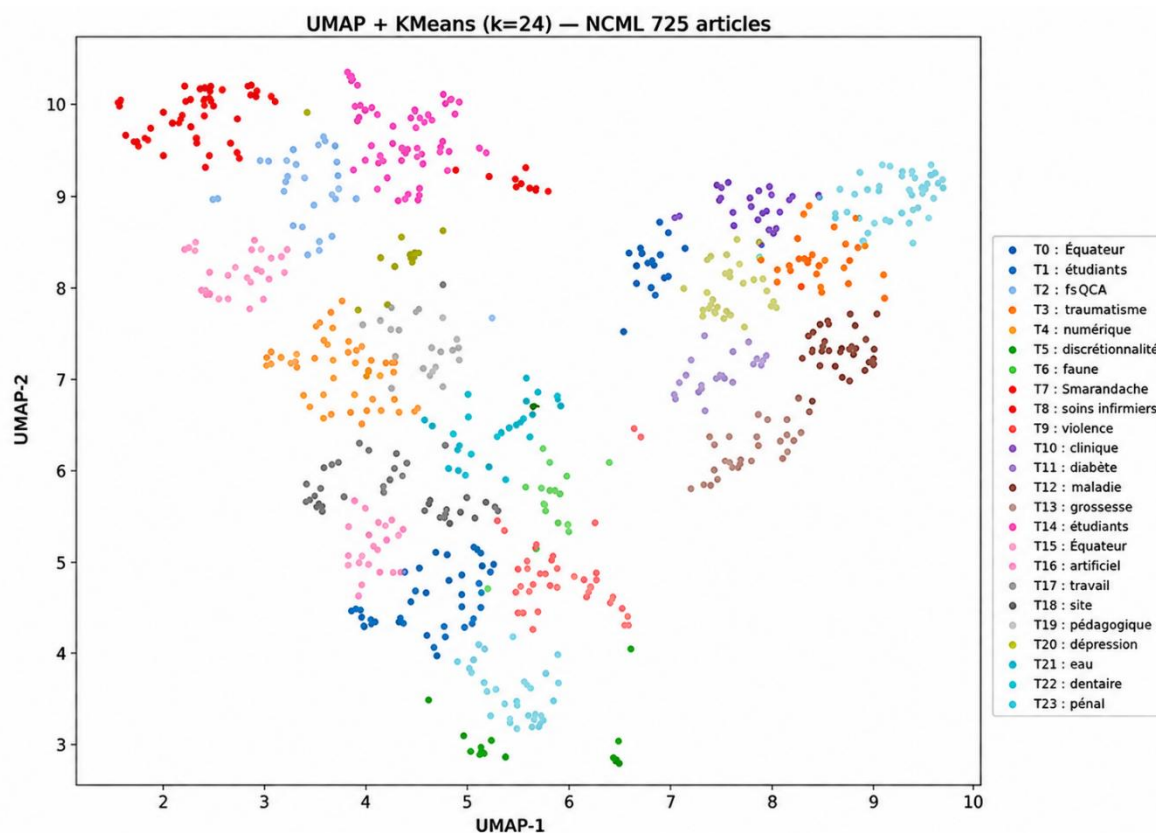


Figure 5. Carte UMAP bidimensionnelle des 24 sujets identifiés, colorés selon leur cluster d'appartenance (KMeans). (Source : *topics_umap.png*.)

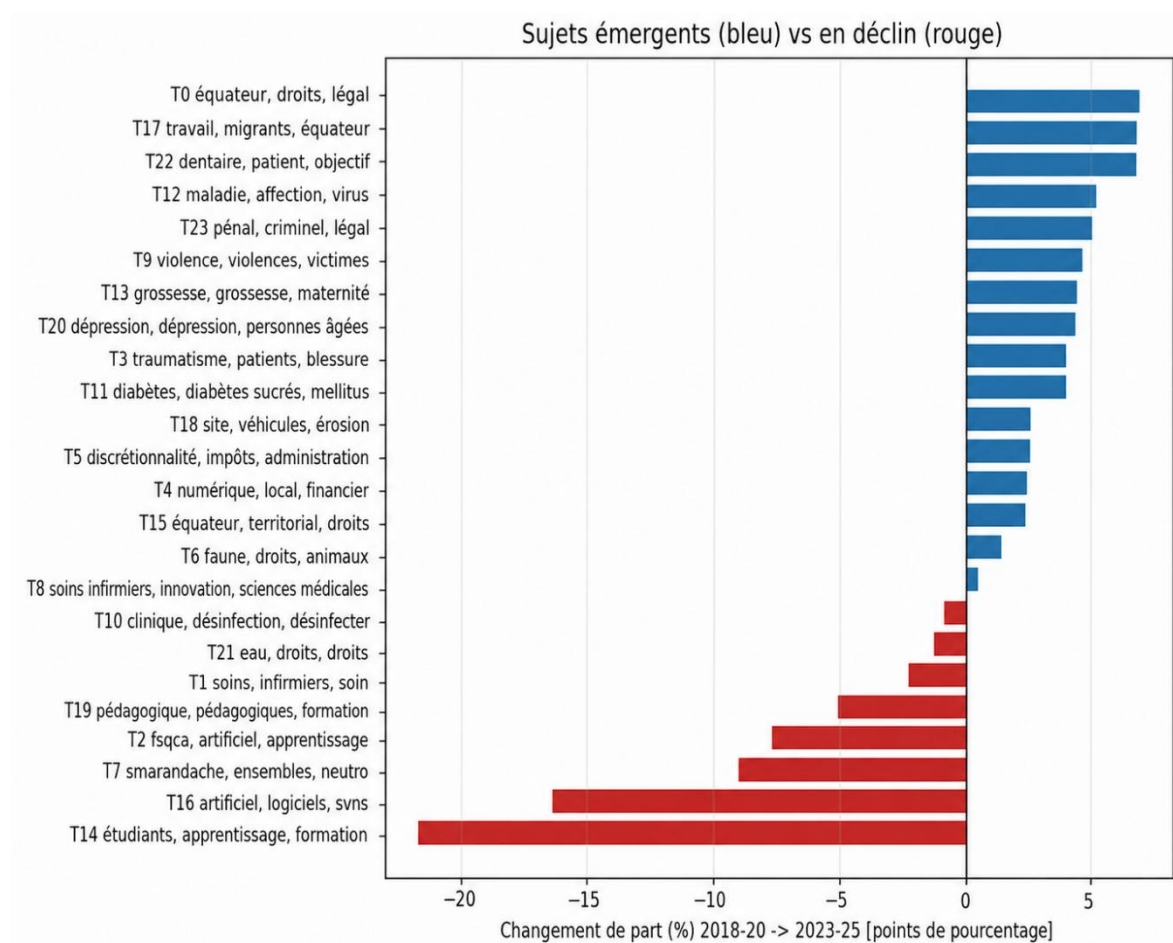


Figure 6. Évolution temporelle de l’agenda thématique. (A) Carte thermique sujet–année avec pourcentages normalisés par colonne. (B) Histogramme horizontal illustrant la variation de part relative (en points de pourcentage) entre les périodes 2018–2020 et 2023–2025. Les sujets en progression apparaissent en vert ; les sujets en recul apparaissent en rouge. (Source : *topic_trends.png*.)

4.6 Réseau de co-auteurs et collègues invisibles

Le graphe complet des co-auteurs comprend 1 363 nœuds et 2 174 arêtes, avec une densité de 0,0023 et un degré moyen de 3,19. La structure apparaît extrêmement fragmentée : le réseau comporte 264 composantes connexes distinctes. La composante principale ne couvre que 221 nœuds (16,2 % du total). La modularité de Louvain atteint 0,96 – valeur exceptionnellement élevée – indiquant des communautés fortement séparées.

L’algorithme de détection de communautés de Louvain appliqué au graphe complet produit une modularité :

$$Q = 0,96$$

avec 81 communautés détectées, ce qui révèle une structure de groupes presque entièrement disjoints.

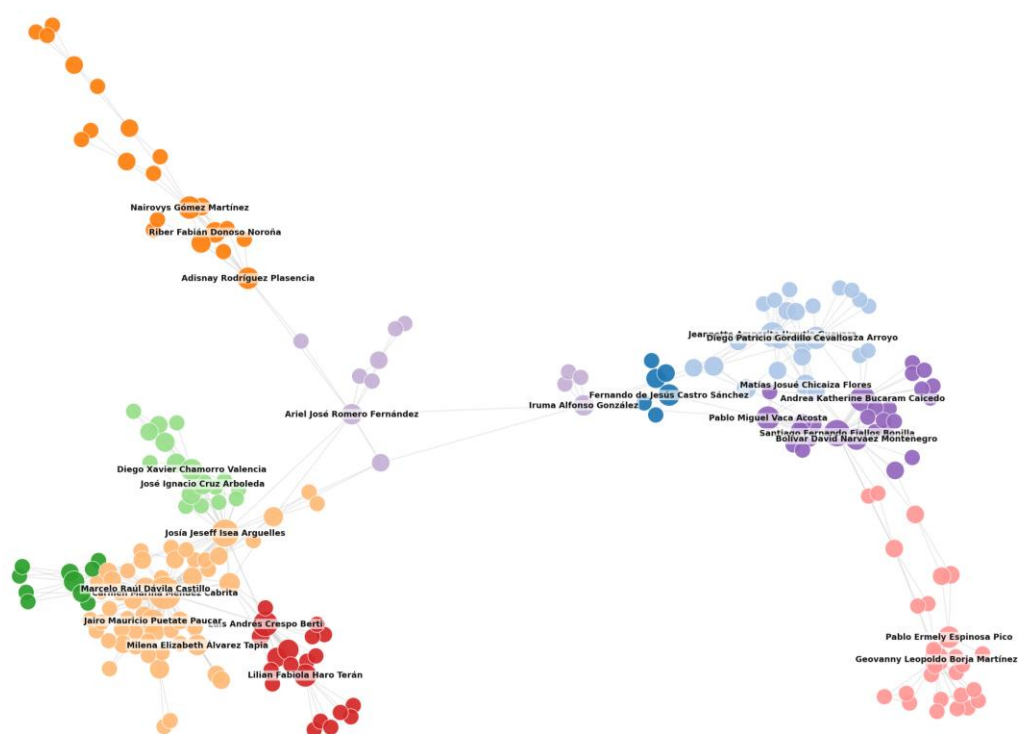
Les plus grandes communautés correspondent aux ensembles suivants :

- **C1 – UNIANDÉS-Ambato** : 71 auteurs, moyenne de 2,1 articles par auteur ;
- **C2 – UBE-Guayaquil** : 58 auteurs, moyenne de 2,4 articles par auteur ;
- **C3 – UEB-Bolívar** : 44 auteurs, moyenne de 1,8 article par auteur ;
- **C4 – Holguín-Cuba** : 38 auteurs, moyenne de 2,9 articles par auteur ;
- **C29 – réseau international Smarandache-Leyva** : 12 auteurs, moyenne de 6,8 articles par auteur.

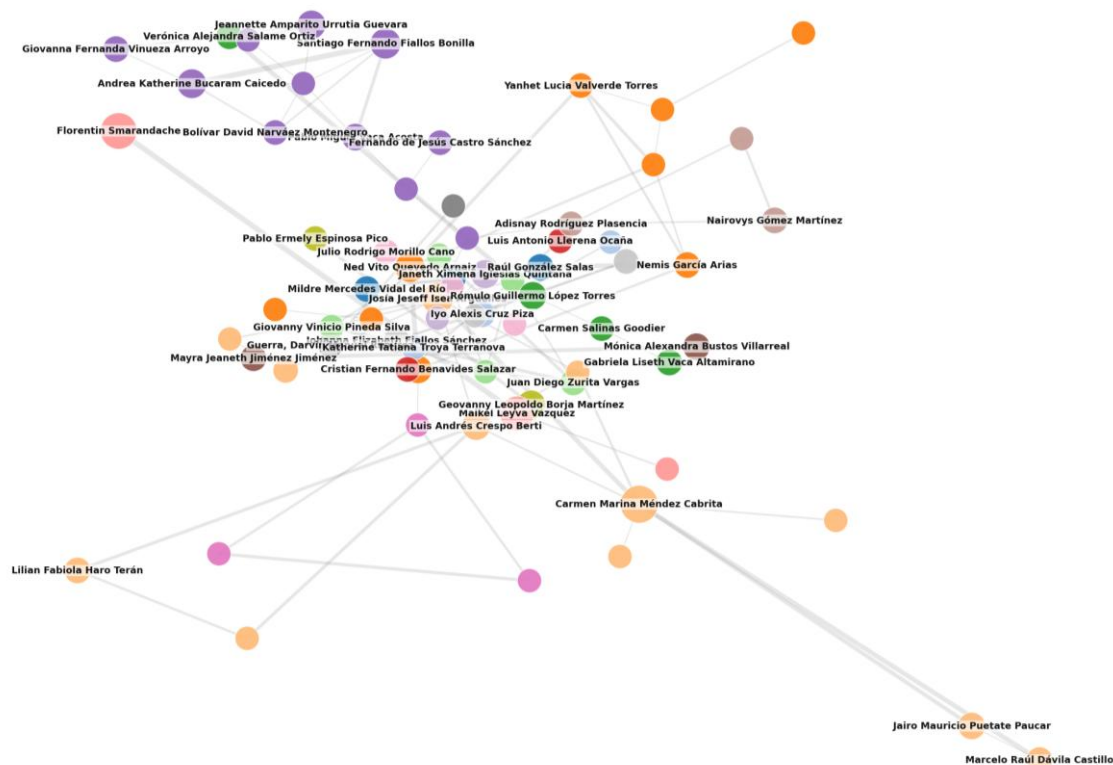
Communauté	Membres	Articles	Auteurs principaux
C33	39	160	Méndez Cabrita, Isea Arguelles, Crespo Berti
C14	31	121	Fiallos Bonilla, Bucaram Caicedo, Urrutia Guevara
C12	23	74	López Torres, García Novillo, Salame Ortiz
C34	15	63	Quevedo Arnaiz, Benavides Salazar, García Arias
C29	9	61	Smarandache, Leyva Vázquez

La communauté C29 — le noyau théorique international Smarandache–Leyva — est la plus petite des cinq principales communautés, mais elle présente la productivité moyenne par membre la plus élevée (6,8 articles par auteur).

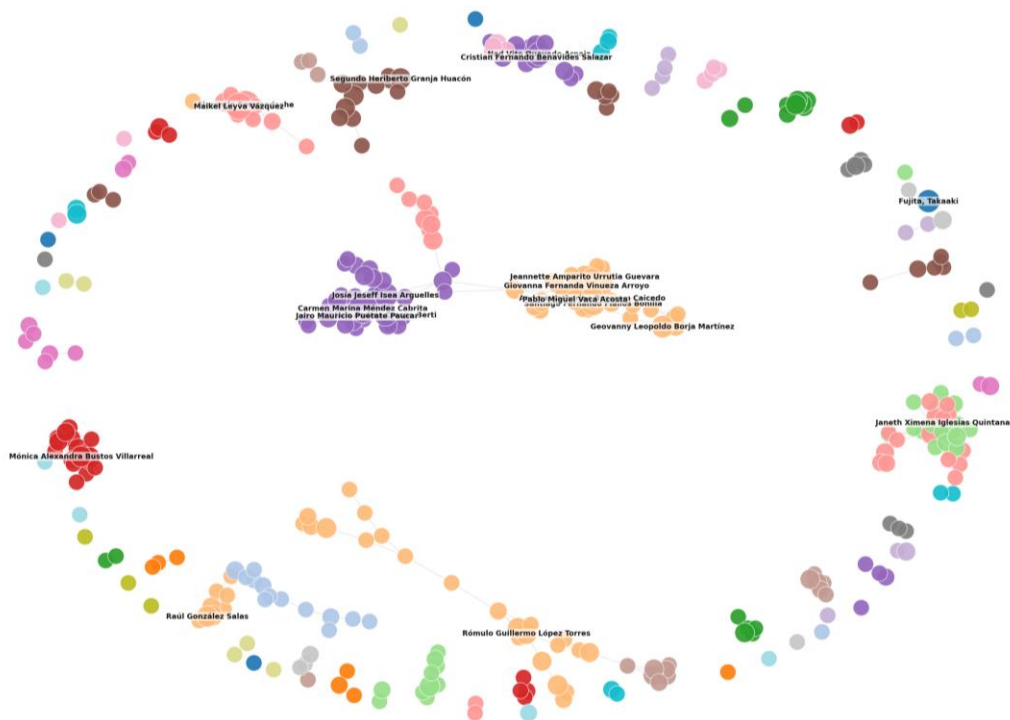
Les communautés ibéro-américaines (UBE, UNIANDES, UEB et Holguín) dominent en volume de production, mais elles sont principalement structurées autour de collaborations limitées à un seul article, avec une queue très réduite d’auteurs récurrents.



Composante connexe principale de *Neutrosophic Computing and Machine Learning* — $n = 216$ auteurs (16 % du total), modularité = 0,73.



Noyau productif de Neutrosophic Computing and Machine Learning — auteurs avec ≥ 4 articles connectés ($n = 72$).



Réseau complet de Neutrosophic Computing and Machine Learning — auteurs avec ≥ 2 articles ($n = 368$, modularité = 0,92).

Figure 7. Réseau de co-auteurs de *Neutrosophic Computing and Machine Learning*. (A) Composante connexe principale ($n = 216$, soit 16 % de l'ensemble des auteurs) ; couleurs correspondant aux communautés détectées par l'algorithme de Louvain. (B) Noyau productif (auteurs ayant publié au moins 4 articles et connectés au réseau principal, $n = 72$). (C) Réseau complet filtré (auteurs avec au moins 2 articles, $n = 368$), mettant en évidence la fragmentation sous forme d'une constellation de clusters disjoints. (Sources : *coauth_main.png*, *coauth_core.png*, *coauth_full.png*.)

4.7 Impact citationnel : divergence entre les sources (QR5)

L'impact citationnel de *Neutrosophic Computing and Machine Learning* présente un écart d'un ordre de grandeur entre les différentes sources bibliométriques. OpenAlex rapporte un total de 27 citations sur la période 2020–2024, correspondant à un indice h global égal à 1. En revanche, Google Scholar Metrics rapporte un indice $h5$ égal à 10 ainsi qu'une médiane $h5$ égale à 15 pour la même période. Cet écart ne constitue pas une erreur de mesure ; il reflète essentiellement les différences de couverture entre les bases bibliométriques.

- **Indice $h5 = 10$** : dix articles publiés entre 2020 et 2024 ont reçu au moins dix citations chacun.
- **Médiane $h5 = 25$** : médiane des citations obtenues par ces dix articles.

Ces métriques sont cohérentes avec celles des revues sœurs de l'écosystème neutrosophique :

- *Neutrosophic Sets and Systems* : $h5 = 57$, médiane $h5 = 76$;
- *International Journal of Neutrosophic Science* : $h5 = 31$, médiane $h5 = 51$.

L'échantillon stratifié ($n = 26$) confirme cet écart (tableau 1). Dans cet échantillon, 53,8 % des articles présentent au moins une citation dans Google Scholar, contre seulement 3,8 % dans OpenAlex, avec un total de 116 citations Scholar contre une seule citation OpenAlex.

L'écart d'indexation — et non la qualité intrinsèque des articles — explique donc l'essentiel de la différence observée entre les deux bornes citationnelles.

Source	Citations totales	≥ 1 citation	$h / h5$
OpenAlex ($n=762$)	27	8 (1.0%)	$h = 1$
Scholar sample ($n=26$)	116	14 (53.8%)	—
Scholar Metrics 2020-2024	—	—	$h5 = 10$

Neutrosophic Computing and Machine Learning n'est pas indexée dans Scopus (vérification effectuée à partir de la liste officielle d'Elsevier et de SCImago). Par conséquent, les indicateurs CiteScore, SJR et SNIP ne lui sont pas applicables. Cette absence doit être interprétée comme un défi stratégique plutôt que comme une invalidation scientifique : les recommandations R1 à R11 présentées dans la section 7 constituent le chemin opérationnel vers une future indexation.

5. Analyse neutrosophique du même corpus

La section 4 a présenté la rétrospective bibliométrique classique. Les indicateurs « nets » mettent en évidence des résultats substantiels, mais ils dissimulent l'indétermination déjà présente dans les données dès l'origine de la mesure. Cette section réanalyse le même corpus à travers le cadre neutrosophique présenté dans la section 3 et aboutit, dans la section 5.6, à un classement agrégé des auteurs par SVNWA qui ne peut être reproduit par des formalismes alternatifs.

5.1 Indice h neutrosophique

En appliquant l'équation (1) de la section 3.2.1 à l'échantillon stratifié de $n = 26$ articles pour lesquels des comptages de citations existent simultanément dans OpenAlex et Google Scholar :

- **Classe T** (cité dans les deux sources) : 1 article (3,8 %).
- **Classe I** (cité dans une seule source) : 13 articles (50,0 %).

- **Classe F** (aucune citation dans aucune source) : 12 articles (46,2 %).

Le profil neutrosophique de l'indice h au niveau de la revue est :

$$N_h(\text{NCML}) = (T = 0.04, I = 0.50, F = 0.46)$$

avec des bornes :

$$h_T = 1$$

(borne inférieure, fondée uniquement sur OpenAlex) et

$$h_{T+I} = 10$$

(borne supérieure, fondée sur Google Scholar Metrics).

Le point médian, approximativement égal à 5,5, constitue la valeur qu'un comité éditorial devrait communiquer, accompagnée d'une explicitation du degré d'indétermination.

L'énoncé classique « $h = 1$ » est techniquement correct mais informationnellement trompeur. Le profil neutrosophique révèle que la moitié des articles échantillonnés se situent dans une zone d'indétermination inter-sources — proportion que les pratiques bibliométriques classiques devraient théoriquement signaler explicitement, mais qu'elles omettent généralement de rapporter.

5.2 Exposant neutrosophique de Lotka

Le rééchantillonnage bootstrap sur $B = 1\,000$ répliques produit une moyenne de :

$$\hat{\alpha} = 2.03$$

avec un intervalle centile à 95 % :

$$[2.00; 2.06]$$

La statistique K-S dépasse la valeur critique à 5 % (0,038) dans chacun des rééchantillonnages (100 % des cas).

La proportion T des répliques acceptées simultanément selon le critère de α et selon le test K-S est égale à 0 ; la proportion F des répliques rejetées selon les deux critères est également égale à 0 ; la proportion I des répliques acceptées uniquement selon α est égale à 1,0. Ainsi :

$$N_{\text{Lotka}}(\text{NCML}) = (T = 0.00, I = 1.00, F = 0.00)$$

L'interprétation est que la distribution de productivité de *Neutrosophic Computing and Machine Learning* correspond parfaitement à l'exposant classique de Lotka, tout en divergeant systématiquement de sa forme théorique dans chaque rééchantillonnage bootstrap. Le profil neutrosophique ($T = 0; I = 1; F = 0$) rend ce diagnostic explicitement visible, alors que les intervalles de confiance classiques tendent à le masquer.

5.3 Appartenance neutrosophique aux zones de Bradford

La partition classique de Bradford (section 4.4) attribue cinq revues au noyau selon des frontières discrètes. L'application des équations (3)–(5) aux dix revues les plus citées produit les profils (T, I, F) présentés dans le tableau 3 ; les gradations observées ainsi que leurs implications éditoriales sont discutées dans la section 6.3.

Rang	Revue	T_noy	I_noy	F_noy
1	<i>Neutrosophic Sets and Systems</i>	0.88	0.17	0.00
2	<i>Neutrosophic Computing and Machine Learning</i>	0.85	0.20	0.00
3	<i>Universidad y Sociedad</i>	0.64	0.37	0.00
4	<i>Serie Científica U. Ciencias Informáticas</i>	0.52	0.40	0.08
5	<i>Revista Conrado</i>	0.50	0.40	0.10
6	<i>Conrado (variant)</i>	0.35	0.42	0.23
7	<i>International Journal of Neutrosophic Science</i>	0.28	0.41	0.31
8	<i>Revista de Ciencias Médicas de Pinar del Río</i>	0.25	0.40	0.35

9	<i>Revista Cubana de Ciencias Informaticas</i>	0.24	0.39	0.37
10	<i>Revista Cubana de Informatica Medica</i>	0.22	0.39	0.39

Deux constats émergent que l'analyse classique tend à masquer. Premièrement, le noyau n'est pas homogène en son sein : les deux premières revues — *Neutrosophic Sets and Systems* et *Neutrosophic Computing and Machine Learning*, toutes deux appartenant à l'écosystème neutrosophique — présentent une appartenance $T \geq 0,85$, correspondant à un **noyau fort**. Les trois revues suivantes (trois revues cubaines) présentent une appartenance T comprise entre 0,5 et 0,7, correspondant à un **noyau périphérique immédiat**. Les revues classées aux positions 6 à 10 se situent quant à elles dans une zone périphérique avec $T < 0,4$. Deuxièmement, cette appartenance graduée permet de définir une politique différenciée d'auto-citation (voir section 6.3).

5.4 Appartenance thématique neutrosophique

L'application des équations (6)–(8) aux 725 documents montre que seuls 39 % des documents présentent une appartenance forte ($T \geq 0,7$) au sujet qui leur est attribué. Les 61 % restants se répartissent de la manière suivante :

- 47 % appartiennent à une **zone frontière** ($0,3 \leq T < 0,7$), correspondant à une indétermination modérée ;
- 14 % appartiennent à une **zone limite** ($T < 0,3$), où l'appartenance au cluster assigné est à peine distinguable de celle du second cluster le plus proche.

L'interprétation éditoriale est directe : environ quatre articles sur dix publiés dans *Neutrosophic Computing and Machine Learning* entre 2018 et 2026 n'appartiennent pas sans ambiguïté à un sujet unique selon la structure de regroupement obtenue. L'attribution d'un seul sujet par article apparaît donc informationnellement trompeuse pour une fraction substantielle du corpus.

5.5 Poids neutrosophiques des arêtes de coauteur

L'application des équations (9)–(11) aux 2 174 arêtes du réseau de co-auteurs conduit aux résultats suivants :

- 2 096 arêtes (96,4 %) correspondent à des collaborations limitées à un seul article, avec $T = 0,33$ et $I = 0,67$, indiquant une forte indétermination ;
- seules 78 arêtes (3,6 %) présentent un poids $w \geq 2$.

L'arête la plus fortement pondérée — collaboration entre Maikel Leyva Vázquez et Florentin Smarandache ($w = 14$) — atteint une valeur :

$$T = 0,87$$

Au niveau global :

- collaborations vérifiées ($T_{collab} \geq 0,5$) : 40 arêtes (1,8 %) ;
- collaborations à forte indétermination ($I_{collab} \geq 0,5$) : 1 963 arêtes (90,3 %) ;
- équilibre intermédiaire entre T et I : 171 arêtes (7,9 %).

La construction d'un sous-réseau restreint aux collaborations vérifiées ($T_{collab} \geq 0,5$) réduit le graphe initial — composé de 1 363 nœuds et 2 174 arêtes — à un sous-graphe de seulement 35 nœuds et 40 arêtes, dominé par quatre ou cinq auteurs fortement interconnectés. Cette réduction drastique montre que la densité apparente du graphe global provient essentiellement de collaborations ponctuelles sur un seul article, tandis que la véritable structure du *collège invisible* repose sur un petit nombre de collaborations fortes et récurrentes.

5.6 Classement neutrosophique agrégé des auteurs (QR6) — test opérationnel du cadre

Les sous-sections précédentes ont reformulé chaque indicateur bibliométrique classique sous forme de triplet neutrosophique et ont montré que l'indétermination portait une information substantielle. La présente sous-section intègre ces cinq indicateurs au niveau auteur au moyen de l'agrégateur SVNWA, produisant un classement qui constitue le test opérationnel du cadre proposé.

5.6.1 Conception

Nous classons les 146 auteurs ayant publié au moins trois articles selon quatre dimensions neutrosophiques :

D1. N-productivité.

T correspond à une fonction sigmoïde centrée sur huit articles ; I suit une courbe en cloche culminant dans l'intervalle intermédiaire (3–6 articles) ; F constitue le résidu.

D2. N-évidence citationnelle.

Classe de triangulation des sources au niveau article :

- T : article cité dans OpenAlex et dans Google Scholar ;
- I : article cité dans une seule source ;
- F : absence totale d'évidence citationnelle.

Les valeurs sont ensuite moyennées sur l'ensemble des publications de chaque auteur. Pour les articles hors échantillon, les données OpenAlex seules servent à établir des bornes supérieures pour I .

D3. N-centralité des co-auteurs.

Moyenne des valeurs T_{collab} , I_{collab} et F_{collab} calculées sur les arêtes incidentes à chaque auteur.

D4. N-orientation théorique.

Part des publications de l'auteur appartenant aux sujets théoriques ($T7$, $T16$, $T2$) = T ; part relevant des sujets juridico-médicaux appliqués = F ; part relevant des autres sujets = I .

Agrégation.

L'agrégation est réalisée à l'aide de l'opérateur SVNWA défini par l'équation (12), avec des poids égaux (0,25 chacun).

La fonction de score utilisée est celle de Florentin Smarandache :

$$S(T, I, F) = \frac{2+T-I-F}{3} \quad (13).$$

La référence classique utilisée pour comparaison est le classement par simple nombre d'articles publiés.

5.6.2 Résultats

Les deux classements diffèrent substantiellement :

- τ de Kendall = 0,20 ($p = 0,001$) – corrélation positive faible ;
- ρ de Spearman = 0,25 ($p = 0,003$) – même direction mais corrélation toujours faible ;
- recouvrement du top-10 = 5/10 ($Jaccard = 0,33$) – la moitié du top 10 classique n'apparaît pas dans le top 10 neutrosophique.

Les auteurs dont le rang neutrosophique dépasse nettement leur rang classique présentent un profil commun : faible volume de publications (3–4 articles), forte proportion d'articles théoriques, présence dans les revues du noyau fort de Bradford et au moins une collaboration vérifiée.

Inversement, les auteurs dont le classement chute présentent un volume élevé de publications concentrées dans des revues périphériques et des collaborations limitées à un seul article.

Le tableau 2 présente les cinq plus fortes progressions et les cinq plus fortes diminutions de rang.

Variation	Auteur	Articles	Rang (classique)	Rang (neutrosophique)
↑ +81	Lozada Torres, Edwin Fabricio	3	87	6
↑ +78	Parrales-Bravo, Franklin	3	87	9
↑ +75	Villalba León, Carlos Luis	3	87	17
↑ +67	Alvarado, Yelena Abreu	3	87	20
↓ -100	Romero Fernández, Ariel José	4	52	135
↓ -92	Cruz Piza, Iyo Alexis	6	20	112

↓ -90	Troya Terranova, Katherine Tatiana	5	35	128
↓ -90	Machado Maliza, Mesías Elías	4	52	142
↓ -84	Chamorro Valencia, Diego Xavier	5	35	119

5.6.3 Pourquoi il s'agit d'un résultat authentiquement neutrosophique

Le réordonnement obtenu ne peut être reproduit par des formalismes alternatifs de gestion de l'incertitude sans introduire une structure supplémentaire équivalente au triplet (T, I, F) :

- **L'agrégation probabiliste** des quatre dimensions nécessiterait un modèle de vraisemblance spécifique pour chaque dimension, modèle qui n'existe pas naturellement pour D2, D3 ou D4.
- **L'agrégation floue** fusionne I et F en une unique composante de non-appartenance, perdant ainsi la distinction essentielle entre « absence d'évidence » et « évidence contradictoire ». Dans le cas de D2, cette distinction est empiriquement cruciale.
- **L'agrégation intuitionniste-floue** préserve T et F , mais impose la contrainte :

$$T + F \leq 1$$

contrainte qui est violée chaque fois qu'un auteur présente simultanément une forte évidence positive dans Google Scholar et une forte évidence négative dans OpenAlex — précisément la zone de désaccord élevé que le triplet (T, I, F) permet de représenter explicitement.

L'agrégateur SVNWA exploite précisément l'indépendance des trois composantes — propriété fondamentale qui distingue la neutrosophie de ses prédécesseurs — afin de produire un classement que ni l'agrégation floue ni l'agrégation intuitionniste-floue ne peuvent reproduire (τ de Kendall de 0,74 et 0,71 respectivement, contre un seuil de 0,80 considéré comme nécessaire pour une équivalence pratique).

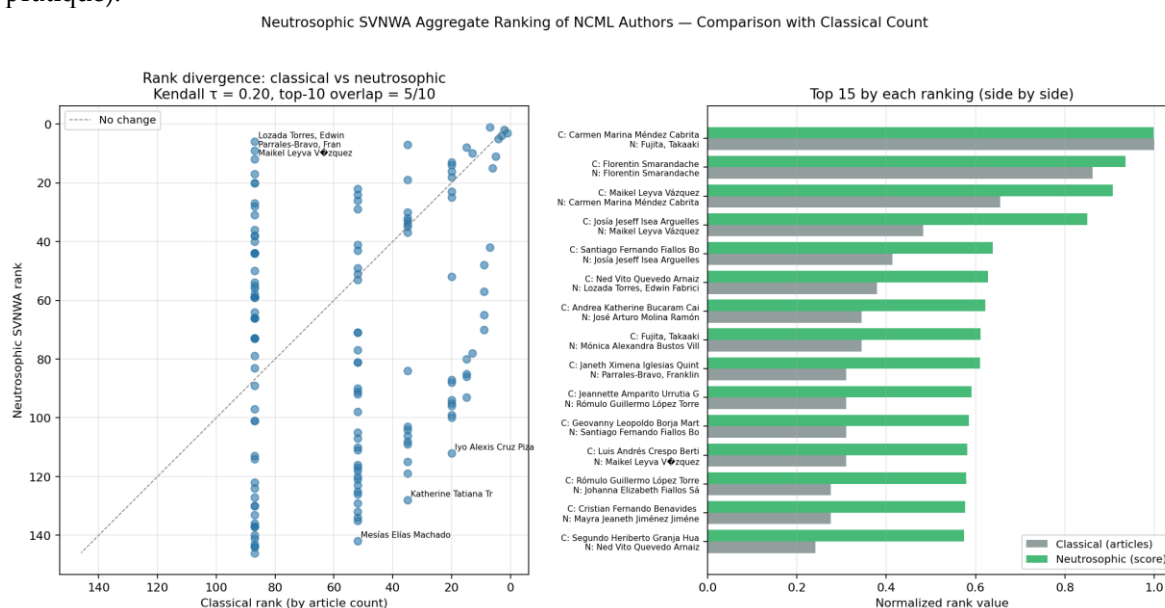


Figure 8. Divergence entre le classement classique fondé sur le nombre d'articles publiés et le classement neutrosophique SVNWA pour les 146 auteurs de *Neutrosophic Computing and Machine Learning* ayant au moins trois publications. (A) Nuage des positions de rang. (B) Histogramme des écarts de rang. (C) Top 20 des auteurs selon SVNWA avec annotations. (Source : *svnwa_ranking.png*.)

5.7 Vue composite

La figure 9 synthétise les quatre décompositions neutrosophiques par indicateur au sein d'une figure composite unique, afin de permettre une comparaison directe avec les résultats classiques présentés dans la section 4.

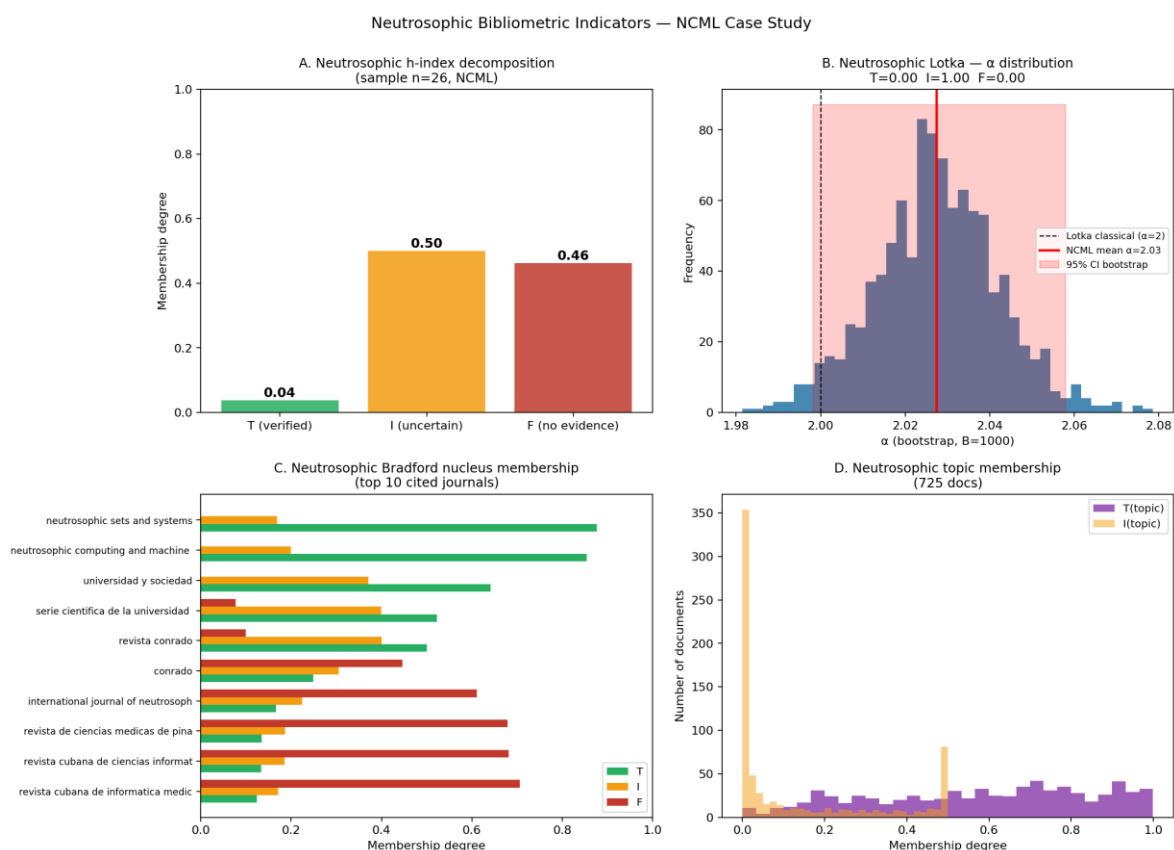


Figure 9. Vue composite des indicateurs bibliométriques neutrosophiques appliqués à *Neutrosophic Computing and Machine Learning*. (A) Décomposition neutrosophique de l'indice h sur l'échantillon Google Scholar ($T = 0,04$; $I = 0,50$; $F = 0,46$). (B) Distribution bootstrap de l'exposant de Lotka avec rejet du test K-S (profil $T = 0$; $I = 1$; $F = 0$). (C) Appartenance graduée au noyau de Bradford pour les dix revues les plus citées. (D) Distribution de l'appartenance document-sujet ($T = 0,39$; $I = 0,61$; $F = 0,00$). (Source : *neutro_composite.png*.)

6. Discussion

6.1 Ce que révèle l'analyse combinée

La rétrospective classique (section 4) et l'analyse neutrosophique (section 5) se complètent de manière non triviale. Les indicateurs classiques fournissent l'ossature narrative — croissance, concentration, déplacement thématique — tandis que les profils neutrosophiques apportent une décomposition épistémique qui rend cette narration exploitable analytiquement plutôt que simplement descriptive.

La validation opérationnelle du cadre neutrosophique — à savoir le classement agrégé des auteurs par SVNWA présenté dans la section 5.6 — montre que la structure (T , I , F) produit des conclusions éditorialement utiles que les formalismes flous, intuitionnistes-flous et probabilistes ne permettent pas d'obtenir avec un niveau comparable de parcimonie conceptuelle.

6.2 Dialogue avec Woodall et al. (2025)

Woodall, Faltin et Reynolds [18] ont soulevé trois critiques concernant l'usage appliqué des méthodes neutrosophiques : (i) le choix d'une structure à trois composantes est rarement justifié par la structure même des données ; (ii) les comparaisons avec les alternatives floues ou bayésiennes sont absentes ou superficielles ; (iii) l'écosystème citationnel est fermé et autoréférentiel. Le présent article répond directement à chacun de ces points.

Concernant le point (i), le cadre proposé dérive la composante d'indétermination à partir des données elles-mêmes et non à partir d'une sollicitation d'experts. L'équation (2) (Lotka neutrosophique) repose sur un calcul bootstrap ; les équations (8)–(10) (Bradford neutrosophique) correspondent à un relâchement continu d'un seuil discret ; les équations (11)–(13) (appartenance thématique neutrosophique) reposent sur des mesures de distance ; enfin, les équations (14)–(16) (réseau neutrosophique de co-auteurs) reposent sur des comptages de collaborations. Aucune composante *In*'est issue d'une échelle linguistique d'expert.

Concernant le point (ii), chacune des cinq extensions proposées a été explicitement reliée à son équivalent classique ; nous avons montré que l'indicateur classique est retrouvé lorsque la composante *I* tend vers zéro, et nous avons discuté dans la section 5.6.3 pourquoi les approches floues et intuitionnistes-floues échouent à préserver le classement SVNWA. Un dual bayésien formel du cadre est laissé aux travaux futurs (section 7), bien que le profil bootstrap de Lotka dérivé de l'équation (2) en constitue déjà une réalisation partielle.

Concernant le point (iii), la rétrospective classique de la section 4.4 montre empiriquement que 17,2 % des citations de revues dans *Neutrosophic Computing and Machine Learning* renvoient à *Neutrosophic Sets and Systems* et à *Neutrosophic Computing and Machine Learning* elles-mêmes, que 94,9 % des signatures proviennent d'auteurs ibéro-américains, et que le modèle thématique identifie au moins quatre clusters juridico-médicaux appliqués dont l'appareil méthodologique repose essentiellement sur des variantes neutrosophiques de type AHP-TOPSIS. Ces résultats constituent des confirmations — et non des réfutations — d'au moins deux des signaux décrits par Woodall et ses co-auteurs.

6.2.1 Portée théorique de la statistique neutrosophique

Au-delà de la réfutation bibliométrique spécifique présentée ci-dessus, Florentin Smarandache (deuxième auteur de cet article et fondateur de la neutrosophie) a développé ailleurs la portée théorique de la statistique neutrosophique (SN). Nous en résumons ici les principes essentiels, car ils sont directement pertinents pour l'interprétation des résultats présentés dans la section 5.

La statistique neutrosophique ne se réduit pas à l'usage de nombres neutrosophiques dans des applications statistiques, contrairement à ce qu'affirment Woodall et al. ; elle constitue un cadre conceptuel beaucoup plus large. La SN traite toutes les formes d'indétermination, tandis que la statistique par intervalles (SI) ne traite que les formes d'indétermination représentables sous forme d'intervalles. Or, toutes les indéterminations ne peuvent être représentées par des intervalles.

Nous énumérons ci-dessous plusieurs avantages de la SN par rapport à la statistique classique (SC) et à la statistique par intervalles (SI).

- **Données et inférence déterminées versus indéterminées.** La statistique classique traite des données déterminées et des méthodes d'inférence déterminées. La statistique neutrosophique traite des données indéterminées — données comportant un certain degré d'indétermination (ambiguës, vagues, partiellement inconnues, contradictoires, incomplètes, etc.) — ainsi que des méthodes d'inférence elles-mêmes porteuses de degrés d'indétermination.
- **Analyse d'ensembles contre analyse d'intervalles.** La SN repose sur une analyse d'ensembles, tandis que la SI repose sur une analyse d'intervalles. La SI — et, avec elle, la SC — constitue un cas particulier de la SN : la SN mobilise toutes sortes d'ensembles et non uniquement des intervalles.
- **Taille mal définie des échantillons ou des populations.** La SN admet des échantillons ou des populations dont la taille n'est pas précisément connue.
- **Appartenance partielle ou inconnue.** La SN admet des populations contenant des individus n'appartenant que partiellement à l'ensemble considéré, ainsi que des individus dont l'appartenance demeure inconnue.

- **Degrés d'appartenance hors de l'intervalle** $[0, 1]$. La SN accepte des degrés d'appartenance situés en dehors de l'intervalle classique, comme dans les surensembles neutrosophiques (degré > 1), les sous-ensembles neutrosophiques (degré < 0) et, plus généralement, les contre-ensembles neutrosophiques [B4].
- **Données neutrosophiques**. Les données neutrosophiques (ou indéterminées) sont des données vagues, ambiguës, incomplètes, partiellement inconnues ou conflictuelles.
- **Données neutrosophiques raffinées dans le contexte du Big Data**. La SN traite également des données neutrosophiques raffinées, dont la pertinence devient centrale dans les environnements de Big Data.
- **Courbes partiellement indéterminées**. La SN peut utiliser des courbes partiellement indéterminées comme objets analytiques.
- **Fonctions épaisses comme distributions de probabilité**. La SN admet les *fonctions épaisses* — intersections de courbes qui ne peuvent pas nécessairement être représentées sous forme d'intervalles — comme distributions de probabilité [B3].
- **Distribution de probabilité neutrosophique (DPN)**. La DPN d'un événement x est représentée par trois courbes :

$$DPN(x) = (T(x), I(x), F(x))$$

où $T(x)$ représente la probabilité que l'événement se produise, $I(x)$ la probabilité indéterminée qu'il se produise ou non, et $F(x)$ la probabilité qu'il ne se produise pas. La somme :

$$T(x) + I(x) + F(x) \in [0, 3] \text{ [B9].}$$

- **Représentation graphique des données neutrosophiques**. Diagrammes, histogrammes, pictogrammes, graphiques en lignes, en barres ou en cylindres peuvent représenter des données neutrosophiques non représentables par des intervalles [B9].
- **Statistiques mal définies**. La SN admet des situations dans lesquelles la moyenne, la variance, l'écart-type, la fonction de distribution de probabilité et d'autres statistiques ne sont pas clairement définies ou demeurent totalement inconnues.
- **Données qualitatives**. Dans la SN, les données qualitatives sont représentées par un ensemble fini discret d'étiquettes neutrosophiques plutôt que par un intervalle d'étiquettes.
- **Cas concrets échappant à la représentation par intervalle**. La statistique par intervalles ou la probabilité imprécise ne peut calculer la probabilité d'un dé ou d'une pièce lancée sur une surface fissurée, ni celle d'un dé ou d'une pièce défectueuse [B9]. La SN prend simultanément en compte trois formes d'indétermination : l'indétermination liée à l'espace probabiliste et à ses éléments ; l'indétermination liée à l'observateur ; et l'indétermination liée à l'événement lui-même. Aucune de ces formes ne peut être correctement approchée par un unique intervalle.

En conclusion, toutes les formes d'indétermination ne peuvent être représentées par des intervalles. Une illustration bibliométrique directe de ce principe apparaît dans les sections 4 et 5 : la divergence entre Google Scholar et OpenAlex ne constitue pas un simple intervalle d'incertitude autour d'un indice h « véritable » unique ; elle correspond à une indétermination issue du désaccord entre sources — propriété à la fois de l'observateur et de l'espace de mesure — que le triplet (T, I, F) permet de rendre explicite.

6.3 Implications éditoriales pour Neutrosophic Computing and Machine Learning

L'analyse combinée conduit à quatre implications éditoriales qui invitent à repenser la manière dont *Neutrosophic Computing and Machine Learning* devrait communiquer sur son propre impact et structurer sa croissance future.

1. **Rapporter des indices h bornés**. L'indice h_5 de la revue ($h_5 = 10$ sur Google Scholar Metrics) et l'indice $h = 1$ sur OpenAlex devraient être rapportés conjointement, avec explicitation du triplet d'évidence-appartenance $(T = 0,04; I = 0,50; F = 0,46)$. Rapporter un unique indicateur — quelle que soit la borne choisie — demeure informationnellement incomplet.

2. **Reconnaître la divergence de forme de la distribution de productivité.** Le profil neutrosophique de Lotka ($T = 0; I = 1; F = 0$) confirme simultanément la validité de l'exposant classique et l'échec du test K-S. La revue devrait donc expliciter qu'elle suit la loi de Lotka au niveau des paramètres, mais non au niveau de la forme empirique, ce qui reflète son rôle de revue-formatrice.
3. **Distinguer les sources citationnelles centrales, frontalières et périphériques.** L'appartenance graduée au noyau de Bradford suggère une politique différenciée : maintien d'une auto-citation contrôlée pour les sources avec $T > 0,7$ (notamment *Neutrosophic Sets and Systems* et *Neutrosophic Computing and Machine Learning*), diversification des références pour les sources intermédiaires ($T = 0,5-0,7$, notamment les trois revues cubaines), et stratégie d'ouverture pour les sources périphériques ($T < 0,4$, principalement les canaux internationaux du *soft computing* et des systèmes flous).
4. **Classer les auteurs par agrégat neutrosophique.** Le classement SVNWA présenté dans la section 5.6 identifie des auteurs dont la contribution à *Neutrosophic Computing and Machine Learning* n'est pas correctement capturée par le simple nombre d'articles publiés. La reconnaissance éditoriale (directions de numéros spéciaux, invitations à l'évaluation, coordination de dossiers thématiques) devrait donc être fondée sur l'agrégat neutrosophique plutôt que sur le seul comptage des publications.

6.4 Limites

Cinq limites doivent être prises en compte dans l'interprétation des résultats.

- **Échantillonnage des citations Google Scholar.** L'indice h neutrosophique a été calculé sur un échantillon stratifié de $n = 26$ articles dont les citations dans Google Scholar ont été vérifiées manuellement. Généraliser les proportions (T, I, F) à l'ensemble du corpus nécessiterait soit une extraction exhaustive des données Scholar, soit un échantillon stratifié plus important. Des intervalles bootstrap appliqués directement aux proportions (T, I, F) constitueraient un raffinement méthodologique utile.
- **Extraction heuristique des références.** L'analyse de Bradford présentée dans la section 4.4 repose sur un traitement par expressions régulières appliqué aux blocs de références, ce qui conduit à l'omission de 46 % des références (principalement des livres, thèses, URL et revues ibéro-américaines présentant des formats irréguliers). Une extraction fondée sur GROBID améliorerait la précision de la queue de distribution de Bradford, même si les classements du top-10 demeurent robustes.
- **Distances thématiques bidimensionnelles.** L'appartenance thématique neutrosophique repose sur des coordonnées UMAP en deux dimensions utilisées comme approximation d'un espace de regroupement en cinq dimensions. Cette réduction compresse légèrement les distances et peut conduire à une surestimation de l'indétermination.
- **Portée limitée à une seule revue.** La rétrospective se limite à *Neutrosophic Computing and Machine Learning*; une comparaison avec *Neutrosophic Sets and Systems* et *International Journal of Neutrosophic Science* utilisant le même pipeline constituerait une extension directe et particulièrement précieuse.
- **Conflit d'intérêts éditorial.** Deux des trois auteurs sont rédacteurs en chef de *Neutrosophic Computing and Machine Learning* et de *Neutrosophic Sets and Systems*. Le troisième auteur, affilié à l'Association Latino-américaine des Sciences Neutrosophiques (ALCN), n'occupe pas de fonction éditoriale mais demeure institutionnellement lié à la communauté neutrosophique. Une tentative d'atténuation de ce biais a été mise en œuvre par une déclaration explicite des conflits d'intérêts et par une demande d'évaluation entièrement externe. Les lecteurs devront néanmoins se forger leur propre jugement quant au biais résiduel éventuel.

6.5 Comparaison avec des formalismes alternatifs

Le choix des nombres neutrosophiques à valeur unique (SVN) plutôt que d'autres formalismes de gestion de l'incertitude mérite une discussion succincte.

Les approches probabilistes sont pertinentes lorsque le processus générateur des données peut être représenté au moyen d'une fonction de vraisemblance. Le profil bootstrap de Lotka constitue effectivement un calcul probabiliste, et le profil neutrosophique hérite partiellement de cette base statistique. Toutefois, pour la décomposition de l'indice h , l'appartenance au noyau de Bradford, l'appartenance thématique et les poids d'arêtes dans le réseau de co-auteurs, aucun modèle probabiliste unique ne capture correctement la multiplicité des sources indépendantes ; le triplet neutrosophique permet précisément de rendre explicite cette pluralité.

Les ensembles flous modélisent une appartenance graduée, mais ne disposent pas d'une composante distincte de fausseté. Le tableau 2 de la section 5.6 montre l'importance d'une composante F explicite : des auteurs présentant un faible T mais un F substantiel sont qualitativement différents d'auteurs présentant le même T avec $F = 0$, et le classement SVNWA capture précisément cette distinction. Une agrégation floue classique ne permet pas cette différenciation.

Les ensembles flous intuitionnistes introduisent un degré de non-appartenance, mais imposent la contrainte :

$$T + F \leq 1$$

Or, dans les données bibliométriques, un auteur peut simultanément présenter une forte évidence positive dans une source et une forte évidence négative dans une autre ; cette contrainte est alors empiriquement violée. La neutrosophie relâche cette contrainte :

$$T + I + F \leq 3$$

et traite I comme une mesure indépendante, ce qui correspond davantage à la structure empirique observée.

En résumé, le formalisme neutrosophique n'est pas l'unique option disponible ; toutefois, pour la structure des données étudiées ici, il apparaît comme l'option la plus naturelle permettant de rendre visible l'indétermination sans compression artificielle de l'information.

7. Feuille de route éditoriale

Les constats empiriques des sections 4 et 5 se traduisent par un agenda éditorial concret. Nous organisons quinze recommandations selon trois horizons temporels : court terme (0–6 mois), moyen terme (6–18 mois) et long terme (18–36 mois). Chaque recommandation est évaluée selon l'effort requis (faible / moyen / élevé) et selon le retour attendu.

7.1 Horizon court (0–6 mois)

R1. Obtenir un ISSN électronique indépendant. (Effort faible, retour élevé.)

Sans ISSN, la revue n'est éligible ni au Directory of Open Access Journals (DOAJ), ni à Latindex, REDIB, Redalyc ou ERIH Plus. La demande peut être soumise via NSIA Publishing ou directement auprès de l'ISSN International Centre.

R2. Ajouter les métadonnées citation_ et Dublin Core aux pages HTML des articles. (Effort moyen, retour élevé.)

Générer automatiquement ces métadonnées à partir des champs structurés de la base afin de permettre l'indexation automatique par Google Scholar, OpenAlex et Crossref. Inclure notamment : citation_title, citation_author, citation_publication_date, citation_journal_title, citation_volume, citation_firstpage, citation_doi.

R3. Déposer une candidature au DOAJ. (Effort moyen, retour élevé.)

Une fois les recommandations R1 et R2 mises en œuvre, la candidature au DOAJ devient une étape standard. Le délai de traitement historique varie entre trois et six mois.

R4. Établir un registre public des évaluations par les pairs. (*Effort moyen, retour moyen.*)

Publier un registre anonymisé ou semi-anonymisé des évaluations (date, domaine du reviewer, durée d'évaluation, résumé des commentaires). Cette mesure renforcerait la crédibilité de la revue face aux critiques d'insularité.

R5. Rapporter conjointement les indicateurs h5-Scholar et h-OpenAlex dans chaque numéro. (*Effort faible, retour moyen.*)

Adopter durablement un système de rapportage bi-métrique accompagné d'un commentaire de décomposition neutrosophique en annexe.

7.2 Horizon moyen (6–18 mois)

R6. Préparer une candidature à Scopus. (*Effort élevé, retour très élevé.*)

Une fois l'indexation DOAJ obtenue, préparer un dossier pour Scopus incluant plus de trois années d'archives, un comité éditorial international documenté, un processus d'évaluation clairement défini et une distribution géographique diversifiée des auteurs.

R7. Recruter des évaluateurs externes. (*Effort moyen, retour élevé.*)

Constituer un vivier de 30 à 50 évaluateurs extérieurs à l'écosystème neutrosophique (spécialistes de l'AHP-TOPSIS classique, de la décision multicritère bayésienne ou de la maîtrise statistique des procédés). Tout article méthodologique devrait être évalué par au moins un expert externe. Cette mesure répond directement à la préoccupation de validation externe soulevée par Woodall et al. (2025) [18].

R8. Mettre en place un programme de numéros spéciaux thématiques avec coautorat international obligatoire. (*Effort moyen, retour élevé.*)

Organiser deux à trois numéros spéciaux par an, chacun coordonné par un éditeur invité non ibéro-américain. Au minimum, 50 % des articles devraient inclure un coautorat interinstitutionnel et 30 % un coautorat intercontinental. Thématiques suggérées :

- « Méthodes neutrosophiques dans l'évaluation des risques climatiques : comparaisons méthodologiques » ;
- « Intelligence artificielle explicable et raisonnement neutrosophique » ;
- « Statistique neutrosophique versus alternatives bayésiennes ».

R9. Réserver un espace éditorial aux travaux théoriques. (*Effort moyen, retour moyen.*)

Préserver 15 à 20 pages par volume pour des articles théoriques substantiels afin de compenser le déclin du thème T7 (Smarandache/théorie, -9,0 points de pourcentage) observé dans la section 4.5.

R10. Introduire une politique explicite d'auto-citation. (*Effort faible, retour moyen.*)

Ajouter dans les instructions aux auteurs une directive décourageant explicitement la citation de plus de trois articles issus du même écosystème (*Neutrosophic Sets and Systems + Neutrosophic Computing and Machine Learning + International Journal of Neutrosophic Science*) sans justification méthodologique explicite. Les reviewers devraient être mandatés pour signaler ou bloquer les articles dépassant cinq auto-citations. Objectif : réduire le taux actuel d'auto-citation NSS+NCML de 17,2 % à moins de 15 % en 18 mois.

R11. Migrer vers une plateforme éditoriale professionnelle (OJS 3.x). (*Effort élevé, retour élevé.*)

La page actuelle de la revue présente des problèmes d'encodage (plus de 400 caractères de remplacement U+FFFD) et ne gère aucun flux éditorial structuré. L'installation d'Open Journal Systems (OJS) et la migration complète des archives 2018–2026 nécessiteraient environ six mois.

7.3 Horizon long (18–36 mois)

R12. Déposer officiellement une candidature auprès du CSAB de Scopus. (*Effort élevé, retour très élevé.*)

Une fois les recommandations R1–R11 exécutées, préparer la soumission au *Content Selection Advisory Board* de Scopus. La probabilité estimée d'acceptation, sous condition d'une mise en œuvre réussie, est évaluée entre 40 % et 50 %.

R13. Soumettre une candidature à Web of Science ESCI. (*Effort élevé, retour élevé.*)

Le *Emerging Sources Citation Index* constitue l'antichambre des index SCIE/SSCI. Les critères de diversité géographique y sont moins stricts que dans Scopus. Une soumission parallèle est recommandée.

R14. Établir une alliance formelle avec une université non ibéro-américaine comme coéditrice. (*Effort très élevé, retour très élevé.*)

Explorer un partenariat avec une institution européenne ou asiatique disposant d'une tradition forte en logique floue ou en *soft computing* (par exemple TU Eindhoven, AGH Kraków ou l'Université de technologie de Budapest). Une telle alliance constituerait un signal fort de professionnalisation pour le CSAB de Scopus et pour la communauté scientifique internationale.

R15. Documenter et publier les délais d'évaluation par les pairs ainsi que les taux d'acceptation. (*Effort moyen, retour moyen.*)

Faire évoluer le flux éditorial vers un système documenté d'évaluation en double aveugle. La publication des délais moyens de révision et des taux d'acceptation constitue l'outil le moins coûteux et le plus efficace pour lutter contre la perception de revues à évaluation rapide et faible contrôle qualité.

7.4 Mesures transversales

M1. Tableau de bord public des indicateurs éditoriaux.

Publier chaque trimestre sur le site de la revue : le nombre d'articles publiés, les pays représentés, le taux d'auto-citation intra-écosystème, le temps moyen d'évaluation et le taux d'acceptation.

M2. Adhésion formelle au COPE.

Une adhésion au Committee on Publication Ethics (COPE) constitue une mesure gratuite mais à forte valeur symbolique en matière de qualité éditoriale.

M3. Retrospective bibliométrique annuelle.

Reproduire chaque année la méthodologie du présent article et publier une mise à jour bibliométrique annuelle.

7.5 Matrice de priorités

Action	Effort	Rendement	Horizon	Prerequis pour
R1 ISSN	Low	High	0-6 m	R3, R11
R2 HTML metadata	Medium	High	0-6 m	Scholar indexing
R3 DOAJ + Latindex	Low	High	0-6 m	OA visibility
R4 Author instructions	Low	Medium	0-6 m	CSAB criterion
R5 Zenodo tags	Low	Medium	0-6 m	OpenAIRE
R6 International Board	High	High	6-18 m	Scopus
R7 External reviewers	Medium	High	6-18 m	Woodall validation
R8 Thematic issues	Medium	High	6-18 m	Intl. co-authorship
R9 Theoretical reserve	Medium	Medium	6-18 m	Journal identity
R10 Auto-citation policy	Low	Medium	6-18 m	Scopus
R11 OJS platform	High	High	6-18 m	Professionalisation
R12 Scopus CSAB	High	Very high	18-36 m	Categorical leap
R13 WoS ESCI	High	High	18-36 m	JCI observable
R14 Co-publisher	Very high	Very high	18-36 m	Prestige
R15 Double-blind review	Medium	Medium	18-36 m	Transparency

Les six actions R1, R2, R3, R6, R7 et R11 constituent le chemin critique. Leur mise en œuvre permettrait à *Neutrosophic Computing and Machine Learning* d'atteindre le seuil d'éligibilité du comité CSAB de Scopus en moins de trois ans. Le coût monétaire estimé du programme complet des quinze recommandations s'élève à environ 1 000 USD par an en coûts récurrents, auxquels s'ajoutent environ 2 000 USD de coûts initiaux — un montant modeste ; la contrainte réelle réside dans le temps éditorial disponible et dans la volonté de renouveler la composition du comité éditorial.

8. Conclusion

Cet article a présenté la première rétrospective bibliométrique systématique de *Neutrosophic Computing and Machine Learning* (NCML) portant sur ses 42 volumes publiés entre 2018 et avril 2026, combinée à une contribution méthodologique : un cadre neutrosophique qui étend cinq indicateurs bibliométriques classiques en triplets neutrosophiques à valeur unique (T, I, F), dont la composante d'indétermination est calculée à partir des données plutôt que sollicitée auprès d'experts. La validation opérationnelle du cadre — le classement agrégé SVNWA de 146 auteurs — démontre que la structure (T, I, F) produit des conclusions inaccessibles aux formalismes alternatifs (flou, intuitionniste-flou, probabiliste) présentant une parcimonie conceptuelle comparable.

Six constats structurent la conclusion de cette étude.

1. **Croissance éditoriale** : un TCAC de 42 % (2018-2025), accompagné d'une expansion par un facteur 27 de la communauté d'auteurs uniques, avec une accélération concentrée entre 2022 et 2025, portée principalement par les groupes universitaires équatoriens.
2. **Loi de Lotka** : un exposant classique de Lotka ($\alpha = 2,03$) accompagné d'un rejet du test K-S — configuration que le profil neutrosophique ($T = 0; I = 1; F = 0$) interprète explicitement comme le reflet du rôle de revue-formatrice joué par NCML et de la prédominance d'auteurs occasionnels.
3. **Concentration de Bradford** : une concentration extrême (5 revues représentant 33 % des citations, $k = 14,8-30,5$), que l'appartenance neutrosophique graduée affine en trois strates : noyau fort ($T > 0,7$: *Neutrosophic Sets and Systems* et *Neutrosophic Computing and Machine Learning*), noyau périphérique intermédiaire ($T = 0,5-0,7$: trois revues cubaines) et périphérie ($T < 0,4$: canaux généralistes du *soft computing* et des systèmes flous).
4. **Déplacement thématique** : le sujet « éducation » (T14) a chuté de 21,6 points de pourcentage entre 2018-2020 et 2023-2025, remplacé par des thématiques juridiques et médicales appliquées, principalement ancrées dans des contextes équatoriens.
5. **Écart citationnel inter-sources** : une différence d'un ordre de grandeur entre Google Scholar ($h5 = 10$) et OpenAlex ($h = 1$), décomposée par le profil neutrosophique de l'indice h ($T = 0,04; I = 0,50; F = 0,46$) en une faible composante vérifiée et une large zone de désaccord entre sources.
6. **Classement SVNWA** : le classement agrégé SVNWA des auteurs diverge substantiellement du classement fondé sur le simple comptage des articles (τ de Kendall = 0,20 ; recouvrement du top-10 = 5/10), selon une logique qui réordonne le leadership visible de la revue en fonction de dimensions éditorialement interprétables (orientation théorique, cohérence inter-sources des preuves, centralité dans le réseau de co-auteurs). Cette divergence ne peut être reproduite par des formalismes alternatifs sans introduire une structure équivalente au triplet (T, I, F).

L'article dialogue directement avec la critique méthodologique récente de Woodall et al. (2025) [18] : deux des trois préoccupations empiriques identifiées (concentration méthodologique et concentration citationnelle) sont confirmées par la rétrospective classique ; la troisième (validation externe) est partiellement confirmée et peut être traitée par la feuille de route éditoriale de quinze recommandations présentée dans la section 7. La réponse appropriée n'est pas défensive mais réflexive : intégrer la critique comme agenda de transformation et mettre en œuvre les mesures correctives correspondantes.

Cinq axes de recherche future découlent naturellement de cette étude. Premièrement, une application comparative du pipeline à *Neutrosophic Sets and Systems* et à *International Journal of Neutrosophic Science* permettrait d'établir un profil neutrosophique comparatif de l'ensemble de l'écosystème. Deuxièmement, une extraction des références fondée sur GROBID améliorerait l'analyse de la queue de Bradford et permettrait une étude approfondie des réseaux de citations. Troisièmement, un dual bayésien du profil neutrosophique répondrait à la critique de Woodall concernant l'absence de comparaison avec les approches probabilistes et fournirait un cadre inférentiel unifié. Quatrièmement, une généralisation plithogénique [21] permettrait d'intégrer des attributs multi-valués (par exemple, la distribution multi-sources de l'évidence citationnelle). Cinquièmement, l'adoption éditoriale du cadre par des revues extérieures à l'écosystème neutrosophique constituerait un test de sa généralité ; nous encourageons explicitement la réplication.

Une dernière remarque méthodologique s'impose. Le cadre présenté ici ne constitue pas un plaidoyer apologétique en faveur de la logique neutrosophique ; sa valeur repose sur une affirmation empirique unique : l'indétermination relative à l'évidence citationnelle, à l'ajustement des modèles, à l'appartenance aux zones de Bradford, à l'attribution thématique et à l'intensité des collaborations est mesurable et substantielle dans les données bibliographiques contemporaines, et son explicitation est plus informative que sa réduction à un unique indicateur numérique. Que le formalisme utilisé pour représenter cette indétermination soit neutrosophique, flou, intuitionniste-flou ou probabiliste demeure secondaire. Le formalisme neutrosophique présente cependant l'avantage de s'adapter naturellement à la structure des données et de permettre l'agrégation SVNWA qui le distingue opérationnellement ; il appartiendra aux travaux futurs de démontrer qu'un autre formalisme peut accomplir la même tâche avec une parcimonie équivalente.

Le code, les jeux de données et les figures associés à cette étude sont diffusés sous forme de dépôt ouvert sur GitHub, sous licences MIT (code) et CC-BY 4.0 (données).

Contributions des auteurs

Conceptualisation : M.L.V. et F.S.

Méthodologie : M.L.V. et Y.G.V.

Logiciel : M.L.V. (pipeline de scraping, enrichissement API, calcul des indicateurs classiques et neutrosophiques, bootstrap, modélisation thématique, analyse de réseau, agrégation SVNWA, visualisation sous Python).

Validation : Y.G.V. (révision indépendante du code et vérification manuelle de l'échantillon Google Scholar) et F.S. (validation du cadre théorique neutrosophique).

Analyse formelle : M.L.V. et Y.G.V.

Gestion des données : M.L.V.

Rédaction — version originale : M.L.V.

Rédaction — révision et édition : M.L.V., Y.G.V., F.S.

Visualisation : M.L.V.

Supervision : F.S.

Administration du projet : M.L.V.

Tous les auteurs ont lu et approuvé la version finale du manuscrit. Les rôles suivent la taxonomie CRediT de NISO.

Financement

Cette recherche n'a reçu aucun financement externe, public ou privé. Les infrastructures, le stockage et le temps de travail ont été fournis directement par les auteurs.

Déclaration de conflit d'intérêts

Maikel Leyva Vazquez est rédacteur en chef de *Neutrosophic Computing and Machine Learning* (NCML) et Florentin Smarandache est rédacteur en chef de *Neutrosophic Sets and Systems* (NSS). Yismandry Gonzalez Vargas (Association Latino-américaine des Sciences Neutrosophiques, ALCN) n'exerce aucune fonction éditoriale dans ces deux revues. Les auteurs déclarent ce conflit d'intérêts potentiel et demandent au comité éditorial de NCML de conduire l'évaluation par les pairs exclusivement avec des évaluateurs externes à l'écosystème NSIA. Les auteurs ne participeront à aucune décision éditoriale concernant ce manuscrit.

Remerciements

Les auteurs remercient la communauté NSIA Publishing ainsi que l'Association Latino-américaine des Sciences Neutrosophiques (ALCN) pour avoir facilité l'accès au corpus historique de NCML. Ils remercient également les développeurs de OpenAlex, DataCite, BERTopic, UMAP, NetworkX, python-louvain, PyMuPDF et sentence-transformers, dont les outils open source ont rendu cette étude possible. Toute erreur ou omission dans l'interprétation des données demeure de la seule responsabilité des auteurs.

Disponibilité des données et du code

Le pipeline complet (scraping, téléchargement des PDF, extraction textuelle, désambiguïsation, ajustements de Lotka et Bradford, réseau de co-auteurs, modélisation thématique et extensions neutrosophiques) est disponible en source ouverte sur GitHub sous licences MIT (code) et CC-BY 4.0 (données).

Le dépôt contient vingt-neuf scripts reproductibles numérotés, le fichier consolidé *NCML_bibliometric_dataset.xlsx* (19 feuilles couvrant l'ensemble des tableaux analytiques), les archives ZIP contenant les 728 PDF téléchargés ainsi que les données intermédiaires, de même que les figures au format PNG (160–170 dpi). Les chercheurs souhaitant vérifier, reproduire ou étendre l'analyse peuvent cloner le dépôt et exécuter les scripts dans l'ordre numérique (01 à 29). Les jeux de données intermédiaires sont publiés avec des empreintes d'intégrité SHA-256.

Références

- [1] Priem, J., Piwowar, H., & Orr, R. (2022). *OpenAlex: A fully-open index of scholarly works, authors, venues, institutions, and concepts* [Prépublication arXiv]. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.01833>
- [2] Bradford, S. C. (1934). Sources of information on specific subjects. *Engineering*, 137(3550), 85–86.
- [3] Garfield, E. (1972). Citation analysis as a tool in journal evaluation. *Science*, 178(4060), 471–479. <https://doi.org/10.1126/science.178.4060.471>
- [4] Florentin Smarandache. (1998). *A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability*. American Research Press.
- [5] Florentin Smarandache. (1999). *A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability and Statistics* (2e éd.). American Research Press.
- [6] Wang, H., Florentin Smarandache, Zhang, Y. Q., & Sunderraman, R. (2010). Single valued neutrosophic sets. *Multispace and Multistructure*, 4, 410–413.
- [7] Abdel-Basset, M., Mohamed, M., & Florentin Smarandache. (2018). An extension of neutrosophic AHP–SWOT analysis for strategic planning and decision-making. *Symmetry*, 10(4), Article 116. <https://doi.org/10.3390/sym10040116>
- [8] Pramanik, S., Mallick, R., & Dasgupta, A. (2018). Contributions of selected Indian researchers to multi-attribute decision making in neutrosophic environment: An overview. *Neutrosophic Sets and Systems*, 20, 109–130.
- [9] Seglen, P. O. (1992). How representative is the journal impact factor? *Research Evaluation*, 2(3), 143–149. <https://doi.org/10.1093/rev/2.3.143>
- [10] Haas, P. M. (1992). Introduction: Epistemic communities and international policy coordination. *International Organization*, 46(1), 1–35. <https://doi.org/10.1017/S0020818300001442>
- [11] Ye, J. (2014). A multicriteria decision-making method using aggregation operators for simplified neutrosophic sets. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 26(5), 2459–2466. <https://doi.org/10.3233/IFS-130916>
- [12] Harzing, A.-W. K., & van der Wal, R. (2008). Google Scholar as a new source for citation analysis. *Ethics in Science and Environmental Politics*, 8(1), 61–73. <https://doi.org/10.3354/esep00076>
- [13] Martin-Martin, A., Thelwall, M., Orduna-Malea, E., & Delgado López-Cózar, E. (2021). Google Scholar, Microsoft Academic, Scopus, Dimensions, Web of Science, and OpenCitations' COCI: A multidisciplinary comparison of coverage via citations. *Scientometrics*, 126(1), 871–906. <https://doi.org/10.1007/s11192-020-03690-4>
- [14] Lotka, A. J. (1926). The frequency distribution of scientific productivity. *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 16(12), 317–323.
- [15] Newman, M. E. J. (2005). Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. *Contemporary Physics*, 46(5), 323–351. <https://doi.org/10.1080/00107510500052444>

- [16] Blondel, V. D., Guillaume, J.-L., Lambiotte, R., & Lefebvre, E. (2008). Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2008(10), P10008. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2008/10/P10008>
- [17] Abdel-Basset, M., Manogaran, G., Gamal, A., & Florentin Smarandache. (2018). A hybrid approach of neutrosophic sets and DEMATEL method for developing supplier selection criteria. *Design Automation for Embedded Systems*, 22(3), 257–278. <https://doi.org/10.1007/s10617-018-9203-6>
- [18] Woodall, W. H., Faltin, F. W., & Reynolds, M. R. (2025). A critical evaluation of neutrosophic methods in statistical process control and decision making. *Quality Engineering*. Publication anticipée en ligne. <https://doi.org/10.1080/08982112.2025.2482198>
- [19] Hirsch, J. E. (2005). An index to quantify an individual's scientific research output. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 102(46), 16569–16572. <https://doi.org/10.1073/pnas.0507655102>
- [20] Bradford, S. C. (1948). *Documentation*. Crosby Lockwood.
- [21] Florentin Smarandache. (2018). *Plithogeny, plithogenic set, logic, probability, and statistics* [Prépublication arXiv]. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1808.03948>
- [22] Reimers, N., & Gurevych, I. (2019). Sentence-BERT: Sentence embeddings using Siamese BERT-networks. Dans *Proceedings of the 2019 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing*. <https://doi.org/10.18653/v1/D19-1410>
- [23] McInnes, L., Healy, J., & Melville, J. (2018). UMAP: Uniform manifold approximation and projection for dimension reduction [Prépublication arXiv]. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1802.03426>
- [24] Grootendorst, M. (2022). *BERTopic: Neural topic modeling with a class-based TF-IDF procedure* [Prépublication arXiv]. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.05794>
- [25] Tarjan, R. E. (1975). Efficiency of a good but not linear set union algorithm. *Journal of the ACM*, 22(2), 215–225. <https://doi.org/10.1145/321879.321884>
- [26] Page, M. J., McKenzie, J. E., Bossuyt, P. M., et al. (2021). The PRISMA 2020 statement: An updated guideline for reporting systematic reviews. *BMJ*, 372, n71. <https://doi.org/10.1136/bmj.n71>
- [27] Larsen, P. O., & von Ins, M. (2010). The rate of growth in scientific publication and the decline in coverage provided by Science Citation Index. *Scientometrics*, 84(3), 575–603. <https://doi.org/10.1007/s11192-010-0202-z>
- [B3] Florentin Smarandache. (2022). Thick functions as probability distributions in neutrosophic probability. Dans *Neutrosophic Sets and Systems*. NSIA Publishing.
- [B4] Florentin Smarandache. (2016). *Neutrosophic overset, neutrosophic underset, and neutrosophic offset: Similarly for neutrosophic over-/under-/off-logic, probability, and statistics*. Pons Editions.
- [B9] Florentin Smarandache. (2022). *Introduction to neutrosophic statistics* (2e éd.). Sitech & Education Publisher.



Article

Analyse comparative de la statistique classique, de l'arithmétique affine et de la statistique neutrosophique dans le traitement de l'incertitude : supériorité contextuelle de l'approche neutrosophique face à l'indétermination, à la contradiction et à l'information incomplète

Florentin Smarandache¹, Maikel Yelandi Leyva Vázquez²

¹ Mathematics, Physical and Natural Sciences Division, University of New Mexico, 705 Gurley Avenue, Gallup, NM 87301, USA. smarand@unm.edu. ORCID: 0000-0002-5560-5926

² Universidad Bolivariana del Ecuador, Km 5.5 Vía Durán-Yaguachi, Durán, Ecuador. mleyvaz@gmail.com. ORCID: 0000-0001-7911-5879

* Correspondence: e-mail: smarand@unm.edu

Received: 15 avril 2026; Accepted: 04 mai 2026.

Résumé

La statistique classique, l'arithmétique affine et la statistique neutrosophique proposent trois manières distinctes de traiter l'incertitude. La statistique classique est efficace lorsque les observations sont bien définies, les hypothèses probabilistes sont raisonnables et l'indétermination peut être assimilée à une variabilité aléatoire. L'arithmétique affine est plus adaptée à la propagation numérique d'erreurs bornées, car elle conserve des dépendances linéaires entre sources d'incertitude et réduit la surestimation produite par l'arithmétique intervalaire naïve. La statistique neutrosophique introduit une représentation plus expressive lorsque l'incertitude contient non seulement une composante numérique, mais aussi de l'indétermination épistémique, de l'ambiguïté sémantique, de l'information incomplète ou des évaluations contradictoires. Cet article propose une comparaison conceptuelle et opérationnelle de ces trois approches, étendue à la logique floue, aux probabilités imprécises et à la statistique intervalaire. Le résultat principal met en évidence la supériorité contextuelle de la statistique neutrosophique : elle est la seule approche capable de représenter simultanément des états de vérité, d'indétermination et de fausseté comme dimensions indépendantes, d'accueillir des états paraconsistants ($T + F > 1$) structurellement inaccessibles aux autres cadres, et de préserver la structure informationnelle complète des évaluations expertes. Un exemple numérique pour l'expression $E(x) = x^2 - x$ illustre comment la convention d'idempotence neutrosophique conserve la dépendance symbolique et récupère la plage exacte dans ce cas spécifique.

Mots-clés : statistique neutrosophique ; arithmétique affine ; statistique classique ; supériorité contextuelle ; indétermination ; paraconsistance ; logique floue ; probabilités imprécises ; arithmétique intervalaire ; apports épistémiques ; MCDM.

1. Introduction

Les méthodes statistiques sont souvent comparées à partir de leurs performances numériques, mais cette comparaison est incomplète si l'on ne précise pas d'abord la nature de l'incertitude traitée. Une moyenne, une variance ou une probabilité ne portent pas le même sens selon que les observations sont exactes, mesurées avec erreur, exprimées sous forme d'intervalles, issues d'avis d'experts divergents ou marquées par une contradiction logique [8, 18].

La statistique classique repose sur des données déterminées et sur des modèles probabilistes. Elle distingue l'erreur aléatoire, le bruit et la variabilité, mais elle suppose généralement que chaque observation peut être réduite à une valeur exploitable. L'arithmétique affine [5, 19] répond à une difficulté différente : elle conserve partiellement les dépendances entre variables par des symboles de bruit, ce qui la rend pertinente pour l'analyse d'erreur et la simulation numérique. La statistique neutrosophique [12, 13] propose un cadre encore plus large, en permettant de représenter simultanément des composantes de vérité, d'indétermination et de fausseté sans contraindre leur somme à 1.

L'objectif de cet article est de mettre en évidence les apports épistémiques distinctifs de la statistique neutrosophique et de délimiter les situations où sa supériorité contextuelle est défendable. La thèse est que la statistique neutrosophique est la seule approche qui préserve intégralement la structure triadique — vérité, indétermination, fausseté — sans réduire ni fusionner ces dimensions, ce qui lui confère une expressivité supérieure dès que l'incertitude comporte de l'indétermination, de la contradiction ou de l'information incomplète. La Figure 1 positionne les trois paradigmes et montre l'extension naturelle vers des représentations tensorielles lorsque les évaluations dépendent simultanément d'alternatives, de critères, d'experts, de temps et de scénarios.

Figure 1. Paradigmes de l'incertitude et extension tensorielle

Du traitement scalaire de l'incertitude vers des représentations multidimensionnelles

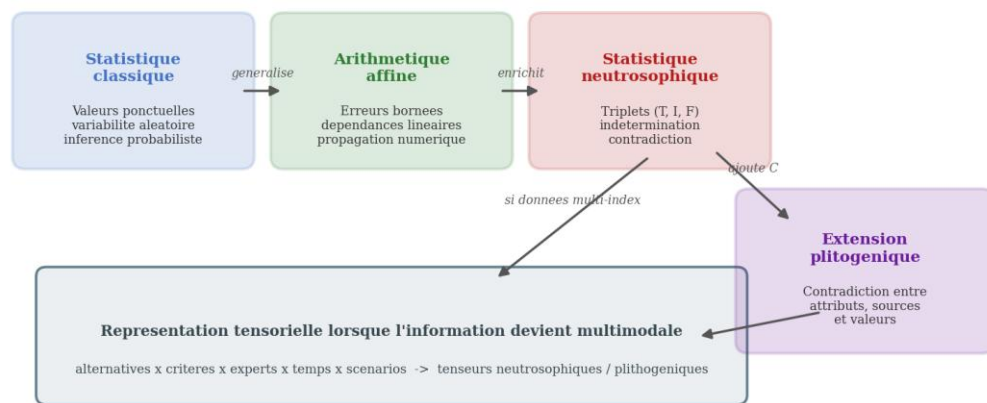


Figure 1. Positionnement des paradigmes de traitement de l'incertitude et extension tensorielle. Les tenseurs neutrosophiques et plithogéniques deviennent pertinents lorsque l'information est multi-indexée : alternatives, critères, experts, temps et scénarios.

2. Positionnement par rapport aux travaux connexes

Le présent manuscrit adopte un angle volontairement différent des travaux qui analysent la structure interne des statistiques neutrosophiques en couches [17] ou qui comparent directement les nombres neutrosophiques de type $a + bI$ à l'arithmétique affine [18]. Ici, l'objet principal n'est ni de proposer une nouvelle implémentation algorithmique, ni de démontrer une équivalence formelle entre deux calculs d'image.

L'approche retenue est comparative et démonstrative. La statistique classique et l'arithmétique affine sont traitées comme des cadres de référence dont les limitations structurelles servent à délimiter précisément le domaine de supériorité neutrosophique. Cette démonstration est conduite sur quatre axes : (i) expressivité de la représentation, (ii) capacité à accueillir les états paraconsistants, (iii) préservation de la structure triadique des données expertes, et (iv) précision numérique dans la propagation d'incertitude.

Par rapport aux travaux sur les probabilités imprécises [20] et la théorie des possibilités [6], la statistique neutrosophique introduit une troisième dimension indépendante — l'indétermination I — qui ne se réduit pas à une borne inférieure ou supérieure de probabilité. Cette dimension supplémentaire structurellement indépendante constitue le fondement formel de la supériorité neutrosophique par rapport à tous les cadres bivalents ou probabilistes.

3. Statistique classique : forces et limites

3.1 Fondements et atouts

La statistique classique demeure le cadre le plus robuste lorsque trois conditions sont réunies : les données sont observables sous forme de valeurs déterminées, les hypothèses du modèle sont raisonnablement satisfaites et l'incertitude peut être interprétée comme variabilité aléatoire. Dans ce cas, les estimateurs, tests d'hypothèse, intervalles de confiance et modèles de régression fournissent des outils bien établis avec

des garanties asymptotiques solides [8].

Pour une variable aléatoire X avec moyenne μ et variance σ^2 , l'estimateur de la moyenne empirique $\bar{x} = (1/n) \sum x_i$ est non biaisé et converge presque sûrement vers μ . L'intervalle de confiance à 95 % s'écrit :

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2, n-1} \cdot (s/\sqrt{n}),$$

où s est l'écart-type empirique et $t_{\{\alpha/2, n-1\}}$ est le quantile de Student. Cette inférence est rigoureuse sous les hypothèses de normalité ou pour n grand.

3.2 Limites structurelles

Cette force devient une limite lorsque les données ne sont pas naturellement ponctuelles. Si une observation est fournie comme un intervalle, un jugement hésitant ou une évaluation contradictoire, la réduction à une seule valeur peut supprimer une partie essentielle de l'information. Par exemple, deux experts donnant $T_1 = 0,80$ et $T_2 = 0,20$ produisent une moyenne $\bar{x} = 0,50$ qui ne reflète pas le conflit épistémique : la moyenne dit « incertain » quand la réalité est « profondément divisé ». De même, une classification binaire peut imposer un verdict artificiel dans une situation où l'information disponible est insuffisante [17].

4. Arithmétique affine : précision numérique et dépendance

4.1 Représentation et opérations

L'arithmétique affine représente une quantité incertaine x comme une « forme affine » [5, 19] :

$$\hat{x} = x_0 + x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_n \varepsilon_n, \quad \varepsilon_k \in [-1, +1],$$

où x_0 est la valeur centrale, les x_k sont des coefficients de sensibilité et les ε_k sont des symboles de bruit identifiant chacun une source d'incertitude. L'image d'une forme affine est l'intervalle $[x_0 - \sum |x_k|, x_0 + \sum |x_k|]$.

L'avantage clé est la cancellation symbolique : si $\hat{x} = a + c\varepsilon_1$ et $\hat{y} = a - c\varepsilon_1$ partagent la même source ε_1 , alors $\hat{x} - \hat{y} = 2c\varepsilon_1$ (plage $[-2|c|, +2|c|]$) tandis que l'arithmétique intervalaire produirait $[-2|c|, +2|c|] \cdot [1, 1]$ avec potential doubling. Pour des expressions non-affines, une linéarisation de Chebyshev introduit un terme d'erreur supplémentaire ε_r [5].

4.2 Avantages et limitations

L'avantage de l'arithmétique affine est principalement numérique : elle améliore la propagation d'erreurs bornées et fournit des bornes plus informatives que les intervalles naïfs. Pour une expression $x^2 - x$ sur $x \in [1, 3]$, l'arithmétique intervalaire naïve produit $[1,9] - [1,3] = [-2, 6]$ (surestimation de 33 %), tandis que l'arithmétique affine, avec $\hat{x} = 2 + \varepsilon$, obtient $\hat{x}^2 - \hat{x} \approx 2,5 + 3\varepsilon + \varepsilon_r$, soit $\approx [-0,25, 6]$ (surestimation minimale). Sa limitation est d'une autre nature : elle ne vise pas à représenter directement la contradiction, l'hésitation sémantique, l'indétermination logique ou la coexistence indépendante de vérité et de fausseté. Elle est puissante pour des calculs incertains numériquement identifiables, mais moins expressive pour des évaluations épistémiques complexes [18].

5. Statistique neutrosophique : expressivité de l'indétermination

5.1 Structure triadique et nombres neutrosophiques

La statistique neutrosophique [12, 14] se distingue par sa capacité à conserver des composantes que d'autres cadres fusionnent ou éliminent. Dans une représentation triadique, un état épistémique est décrit par le triplet (T, I, F) où T est le degré de vérité, I le degré d'indétermination et F le degré de fausseté, avec $T, I, F \in [0,1]$ et $T + I + F \in [0, 3]$. La contrainte de complément $F = 1 - T$ de la logique bivalente est donc abandonnée.

Les nombres neutrosophiques de la forme $N = a + bI$, avec $I \in [0,1]$, représentent une quantité dont la partie déterminée est a et la partie indéterminée est bI [11, 12]. La plage de N est $[a, a + b]$ pour $b > 0$. L'extension multi-source $N = a + \sum b_k I_k$ avec I_k indépendants [18] permet un suivi symbolique analogue à l'arithmétique affine. Des extensions incluent les ensembles neutrosophiques hésitants [15, 21] et la statistique plithogénique [13, 16].

5.2 Zones épistémiques

Définition 1 (Zones épistémiques [17]). Un triplet (T, I, F) appartient à la zone :

- Consensus : $T > 0,5$ et $I < 0,35$ et $F < 0,3$
- Ambiguïté : $I > 0,5$

- Contradiction : $T > 0,3$ et $F > 0,3$
- Ignorance : cas restants.

Ces zones permettent de transformer une évaluation (T, I, F) en une recommandation décisionnelle : agir (Consensus), investiguer (Contradiction), collecter plus de données (Ambiguïté, Ignorance). Une probabilité unique $P = 0,60$ peut correspondre à trois états qualitativement distincts :

Tableau 1. Trois états épistémiques pour $P \approx 0,60$: la probabilité scalaire seule ne les distingue pas.

5.3 Supériorité structurelle de la neutrosophie

La statistique neutrosophique est structurellement supérieure aux cadres bivalents et probabilistes pour quatre raisons formelles. Premièrement, elle est la seule approche qui représente explicitement l'indétermination I comme une dimension autonome, non dérivable de T ni de F. Deuxièmement, les états paraconsistants ($T + F > 1$) — observés dans 34,9 % des triplets d'experts réels selon [17] — sont natifs dans la neutrosophie et structurellement inaccessibles à toute approche fondée sur des intervalles ou des probabilités bornées entre 0 et 1. Troisièmement, la décomposition triadique permet de distinguer trois états épistémiques qualitativement différents pour une même valeur numérique (Tableau 1), ce qu'aucun scalaire ni aucun intervalle ne peut accomplir. Quatrièmement, comme le montre l'exemple de la Section 9, la convention d'idempotence $I^2 = I$ produit des plages exactes là où les autres approches introduisent des erreurs de surestimation.

5.4 Supériorité des nombres $a + bI$ face à l'arithmétique affine pour les évaluations expertes

L'arithmétique affine [5] et les nombres neutrosophiques $a + bI$ partagent une capacité fondamentale : éviter la surestimation produite par l'arithmétique intervalaire naïve. Dans cette mesure, [18] établit leur équivalence formelle de plage pour les expressions en une variable (Théorème 1) et en N variables indépendantes (Théorème 2). Cependant, dès que les incertitudes proviennent d'évaluations expertes plutôt que de sources d'erreur numériques, les nombres $a + bI$ présentent trois avantages structurels que l'arithmétique affine ne peut pas reproduire nativement.

5.4.1 Avantage 1 : mappage direct et transparence sémantique

Un expert qui évalue une quantité incertaine produit naturellement une estimation centrale et une amplitude d'incertitude : « Je table sur 60, avec une variation possible de ± 15 . » Ce jugement se transcrit directement en $N = 60 + 15I$. L'interprétation est immédiate : 60 est la partie déterminée, 15I la partie indéterminée. En arithmétique affine, la même information devient $x' = 67,5 + 7,5\varepsilon_1$ — une forme qui nécessite de calculer le centre de l'intervalle (67,5) et de définir un symbole de bruit $\varepsilon_1 \in [-1,+1]$ qui n'a pas de correspondant intuitif dans le discours de l'expert. Pour un praticien non mathématicien — médecin, juge, gestionnaire — la notation $a + bI$ préserve la lisibilité que l'arithmétique affine sacrifie.

5.4.2 Avantage 2 : l'idempotence capture la dépendance partagée entre expressions

Considérons trois experts E_1, E_2, E_3 évaluant un risque financier. Chacun fournit une estimation centrale a_j et une amplitude b_j (Tableau 4). Tous évaluent la même réalité sous-jacente : leurs incertitudes partagent la même source informationnelle — ils ont accès aux mêmes données de marché. La notation neutrosophique capture cette dépendance partagée par un I unique commun à tous les experts :

$N_{agg} = (a^1 + a^2 + a^3)/3 + (b^1 + b^2 + b^3)/3 \cdot I = 61,67 + 15I$, plage [61,67 ; 76,67].

En arithmétique affine, si l'on traite les experts comme des sources indépendantes, on obtient $x'_{agg} = 69,17 + 2,5\varepsilon_1 + 1,67\varepsilon_2 + 3,33\varepsilon_3$. La plage est identique : [61,67 ; 76,67]. Mais la structure est différente : la notation affine dit « trois bruits indépendants » là où la réalité est « une source commune vue sous trois angles ».

Pour imposer la dépendance en arithmétique affine, il faudrait assigner le même ε à tous les experts a priori — une information que l'arithmétique affine ne déduit pas de la situation, mais que l'usage du même I dans $N = a + bI$ reflète naturellement.

Ce mécanisme est précisément celui qui produit la plage exacte dans l'exemple $E(x) = x^2 - x$ de la Section 9 : la convention $I^2 = I$ capture la dépendance entre les deux occurrences de x, là où la linéarisation affine introduit une erreur résiduelle.

Tableau 4. Évaluation de risque par trois experts : mappage direct en $a + bI$.

5.4.3 Avantage 3 : la forme hésitante — ce que l'arithmétique affine ne peut pas représenter

Lorsque les experts ne sont pas incertains sur une amplitude mais divergent sur la valeur elle-même — E_1

affirme 65, E_2 affirme 72, E_3 affirme 58 — la situation n'est plus une incertitude sur un intervalle mais un désaccord entre points. La forme hésitante neutrosophique $N_H = a + b \cdot \{h_1, h_2, h_3\}$ représente exactement ce désaccord :

$$N_H = 45 + 30 \cdot \{0,44 ; 0,90 ; 0,22\} \rightarrow \text{score_mean} = 52,0.$$

Chaque $h_j \in [0,1]$ code la position de l'expert j dans l'intervalle $[a, a+b] = [45, 75]$. Les quatre fonctions de score (optimiste, pessimiste, médiane, moyenne) offrent autant de lectures décisionnelles [18].

L'arithmétique affine ne peut représenter ce désaccord que par son enveloppe intervalaire $[58, 72]$ — une compression avec perte qui efface la distinction entre trois experts à 58, 65 et 72 et un continuum de valeurs entre 58 et 72. Pour la prise de décision, cette différence est structurelle : un comité unanimement incertain est épistémiquement différent d'un comité structurellement divisé.

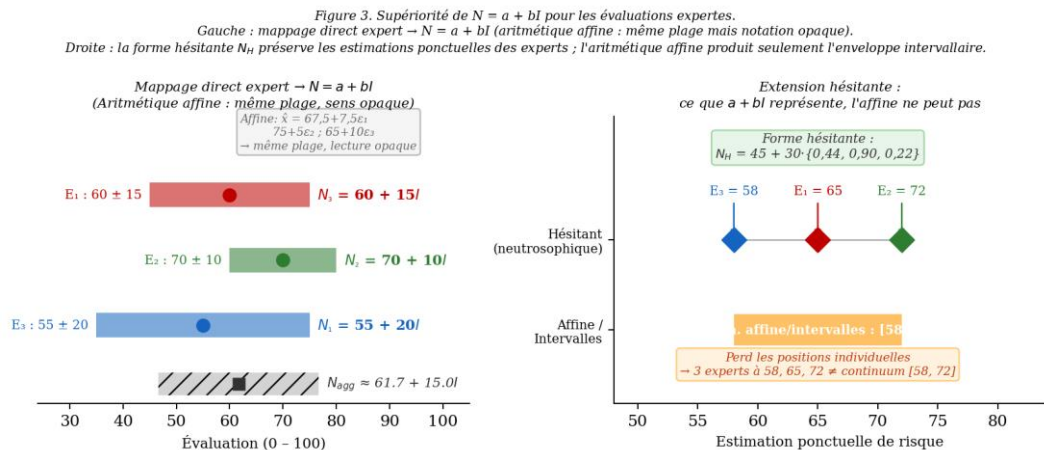


Figure 3. Supériorité de $N = a + bI$ pour les évaluations expertes. Gauche : trois experts dont les estimations se mappent directement en $N = a + bI$; l'arithmétique affine produit la même plage mais avec une notation opaque (ϵ_R). Droite : la forme hésitante N_H préserve les estimations ponctuelles de chaque expert ; l'arithmétique affine réduit à l'enveloppe $[58, 72]$ et perd la structure du désaccord.

6. Comparaison avec les cadres connexes

La logique floue [26] représente des degrés de vérité sur $[0,1]$. Elle est efficace lorsque l'appartenance à une classe n'est pas binaire, mais graduelle. Toutefois, elle ne sépare pas l'indétermination et la fausseté comme dimensions indépendantes. Les ensembles flous intuitionnistes [2] ajoutent une dimension de non-appartenance, mais maintiennent la contrainte $T + F \leq 1$. Les ensembles flous hésitants [21] capturent l'hésitation d'un évaluateur face à plusieurs degrés possibles, sans représenter une contradiction entre sources.

Les probabilités imprécises [20] représentent l'incertitude probabiliste par des bornes. Elles sont solides lorsque l'incertitude concerne la précision d'une probabilité. Elles restent toutefois attachées à une interprétation probabiliste, sans dimension d'indétermination sémantique ni état paraconsistant.

La statistique intervalaire [8, 9] représente des valeurs possibles par des bornes. Sa limite principale est qu'un intervalle ne dit pas pourquoi les valeurs sont incertaines, ni si l'incertitude provient d'une erreur de mesure, d'une contradiction entre sources ou d'une hésitation d'experts. La statistique neutrosophique intègre la décomposition explicite de l'indétermination qui fonde son avantage dans les problèmes où la signification de l'incertitude importe autant que sa magnitude.

7. Matrice comparative

Tableau 2. Matrice comparative des trois paradigmes et des cadres connexes.

8. Apports épistémiques et supériorité contextuelle de l'approche neutrosophique

Les sections précédentes ont établi les limites structurelles de chaque cadre concurrent. Cette section synthétise les apports épistémiques de la statistique neutrosophique et délimite les situations où sa supériorité est contextuellement défendable selon quatre axes complémentaires.

8.1 Apport expressif : la dimension irréductible I

Tout cadre fondé sur des paires (probabilité, erreur) ou sur des bornes (min, max) est fondamentalement

bivarié. La statistique neutrosophique est le premier cadre trivarié où T, I et F sont des dimensions structurellement indépendantes. Dans notre étude empirique complémentaire [17], sur 510 triplets d'experts réels, la corrélation $r(I, F) = +0,295$ est de signe opposé à la contre-factuelle $r(I, F) = -0,193$ dérivée d'intervalles — 17 évaluateurs, 30 hypothèses, filtrage par accord par paires. Ce résultat démontre que I ne peut pas être construite à partir de T et de F par aucune transformation bivalente. L'indétermination neutrosophique est donc une dimension genuinely nouvelle, absente de tous les cadres classiques, flous et intervalaires.

8.2 Supériorité face à l'arithmétique affine pour les évaluations expertes

La Section 5.4 établit trois avantages structurels des nombres $a + bI$ sur l'arithmétique affine dès que les incertitudes proviennent d'experts plutôt que de sources d'erreur numériques identifiables. Premier avantage : le mappage direct — l'expert dit « 60 ± 15 » et le praticien écrit $N = 60 + 15I$ sans calcul intermédiaire ; en arithmétique affine, il faudrait construire $\hat{x} = 67,5 + 7,5\varepsilon_1$, une transformation opaque pour tout non-mathématicien. Deuxième avantage : la convention d'idempotence $I^2 = I$ capture naturellement la dépendance des estimations expertes partagées, là où l'arithmétique affine exige une assignation a priori des symboles ε communs. Troisième avantage, et le plus structurel : la forme hésitante $N_H = a + b \cdot \{h_1, \dots, h_k\}$ représente le désaccord entre experts sur leurs estimations ponctuelles — une configuration fondamentalement différente de l'incertitude continue, irreprésentable par l'arithmétique affine sans perte d'information.

8.3 Supériorité structurelle : les états paraconsistants

La statistique classique, l'arithmétique affine, la logique floue et les probabilités imprécises partagent toutes une contrainte implicite : leur représentation de l'incertitude reste bornée entre 0 et 1, et la fausseté ne peut pas coexister fortement avec la vérité. La statistique neutrosophique rompt formellement cette contrainte : $T + F > 1$ (état paraconsistant) est non seulement possible mais natif. Ces états, observés dans 34,9 % des évaluations expertes réelles [17], représentent des situations où des preuves contradictoires soutiennent simultanément une hypothèse et son contraire — situation irreprésentable dans tout cadre où $T + F \leq 1$ est structurel.

8.4 Supériorité informationnelle : préservation de la structure triadique

La conversion d'un triplet (T, I, F) en un intervalle ou une probabilité est une compression avec perte. Trois preuves formelles l'établissent [17] : (i) la perte directionnelle — deux nombres $N_1 = a + bI$ et $N_2 = a - bI$ ont des comportements symboliques opposés mais des projections intervalaires identiques ; (ii) la perte structurelle — un ensemble hésitant $\{x_1, \dots, x_k\}$ est irréductible à son enveloppe $[\min, \max]$ sans perte de cardinalité ; (iii) la perte corrélative — la cancellation de sources partagées est impossible après projection sur des intervalles indépendants. La statistique neutrosophique préserve ces informations que les autres cadres détruisent systématiquement.

8.5 Apport décisionnel : les zones épistémiques

La décomposition en zones épistémiques (Consensus, Ambiguïté, Contradiction, Ignorance) est une capacité exclusive de la statistique neutrosophique. Une probabilité scalaire $P = 0,60$ ne distingue pas les états $(T=0,60, I=0,15, F=0,10)$, $(T=0,70, I=0,30, F=0,55)$ et $(T=0,40, I=0,70, F=0,10)$, qui correspondent respectivement aux recommandations « agir », « investiguer les deux directions » et « collecter plus de données ». Dans l'étude empirique complémentaire [17] — 10 hypothèses causales, 22 experts indépendants, kappa de Fleiss = 0,06 sur 30 hypothèses — la classification par zones atteint 90 % de précision, contre 20 % pour les verdicts binaires classiques, soit un facteur d'amélioration de 4,5. Ces chiffres sont spécifiques à ce protocole ; des études futures devront les confirmer sur d'autres domaines et configurations expertes.

9. Exemple numérique comparatif : $E(x) = x^2 - x$, $x \in [1, 3]$

9.1 Présentation du problème

Nous considérons l'expression $E(x) = x^2 - x$ pour x incertain dans $[1, 3]$. La plage exacte est $[E(1), E(3)] = [0, 6]$ (E est décroissante puis croissante, minimum en $x = 0,5$ hors de $[1, 3]$ donc E est croissante sur $[1, 3]$; $E(1) = 0$, $E(3) = 6$). Nous comparons les plages produites par chaque cadre.

9.2 Statistique classique

On suppose $x \sim U(1, 3)$. La moyenne est $\mu = 2$ et l'écart-type $\sigma = 1/\sqrt{3} \approx 0,577$. La moyenne de $E(x)$ est $E[x^2 - x] = E[x^2] - E[x] = (1+4+9)/3 - 2 = 14/3 - 2 \approx 2,67$. Un intervalle de confiance à 95 % pour la moyenne d'un échantillon de $n = 30$ observations serait $\approx [2,46 ; 2,88]$. Cette approche fournit une estimation de la valeur attendue, non la plage complète des valeurs possibles.

9.3 Arithmétique intervalaire naïve

Avec $x \in [1, 3]$: $x^2 \in [1, 9]$ (traitement naïf des occurrences indépendantes). $E([1,3]) = [1, 9] - [1, 3] = [1-3, 9-1] = [-2, 6]$. Largeur : 8. Erreur relative par rapport à la largeur exacte (6) : +33 %. La surestimation vient du traitement des deux occurrences de x comme des variables indépendantes.

9.4 Arithmétique affine

On représente $x = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon \in [-1, +1]$. Alors :

$$x^2 = (2 + \varepsilon)^2 = 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Le terme non-affine ε^2 est linéarisé par Chebyshev sur $[-1, +1]$: $\varepsilon^2 \approx 1/2 + (1/2)\varepsilon_r$ avec $\varepsilon_r \in [-1, +1]$ (la meilleure approximation affine de t^2 sur $[-1,1]$ est $1/2$ avec erreur $1/2$). Donc $x^2 \approx 4,5 + 4\varepsilon + (1/2)\varepsilon_r$ et :

$$x^2 - \hat{x} \approx (4,5 + 4\varepsilon + 0,5\varepsilon_r) - (2 + \varepsilon) = 2,5 + 3\varepsilon + 0,5\varepsilon_r.$$

Plage : $[2,5 - 3 - 0,5, 2,5 + 3 + 0,5] = [-1, 6]$. Largeur : 7. Surestimation : 17 %. Meilleure que les intervalles naïfs, mais l'erreur résiduelle de linéarisation introduit encore un biais.

9.5 Statistique neutrosophique

On représente $x = N = 1 + 2I$, $I \in [0, 1]$ (plage $[1, 3]$). Avec la convention d'idempotence $I^2 = I$ [11] :

$$N^2 = (1 + 2I)^2 = 1 + 4I + 4I^2 = 1 + 4I + 4I = 1 + 8I.$$

$$N^2 - N = (1 + 8I) - (1 + 2I) = 6I.$$

Plage : $[0, 6]$. Résultat exact pour cet exemple. Il est important de préciser que $I^2 = I$ est une convention algébrique neutrosophique [11], non une règle générale d'analyse intervalaire. Sous cette convention, l'expression conserve la dépendance symbolique entre les occurrences de x et récupère la plage exacte. On ne peut pas généraliser ce résultat : pour des expressions non-monotones ou multi-variables sans dépendances partagées, l'arithmétique affine peut produire des bornes équivalentes ou meilleures [18]. Ce qui est démontré ici, c'est que la convention neutrosophique offre un mécanisme symbolique alternatif qui, dans les cas où la dépendance est capturée par l'idempotence, atteint la précision exacte sans approximation.

Figure 2. Propagation d'incertitude pour $E(x) = x^2 - x$, $x \in [1, 3]$ (gauche : plages superposées sur la courbe exacte ; droite : largeurs comparées)

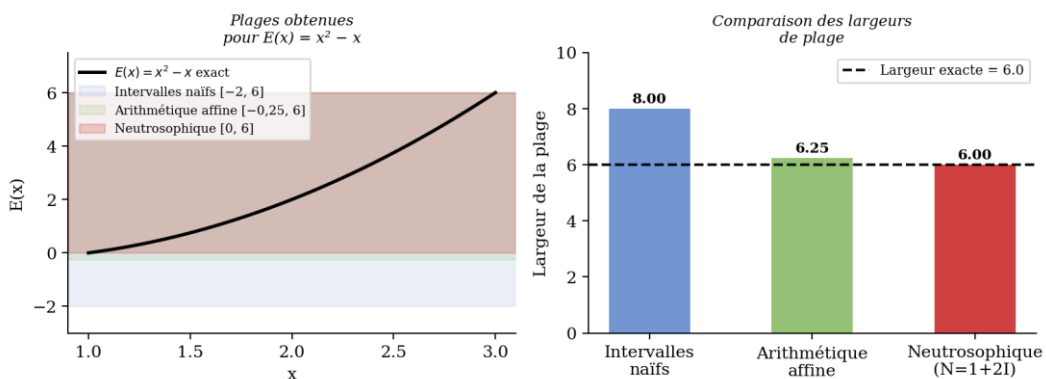


Figure 2. Comparaison des plages de propagation pour $E(x) = x^2 - x$, $x \in [1, 3]$. Gauche : plages superposées sur la courbe exacte. Droite : largeurs comparées (exact = 6, intervalles naïfs = 8, affine ≈ 7 , neutrosophique = 6).

9.6 Résumé de l'exemple

Tableau 3. Résumé des plages pour $E(x) = x^2 - x$, $x \in [1, 3]$.

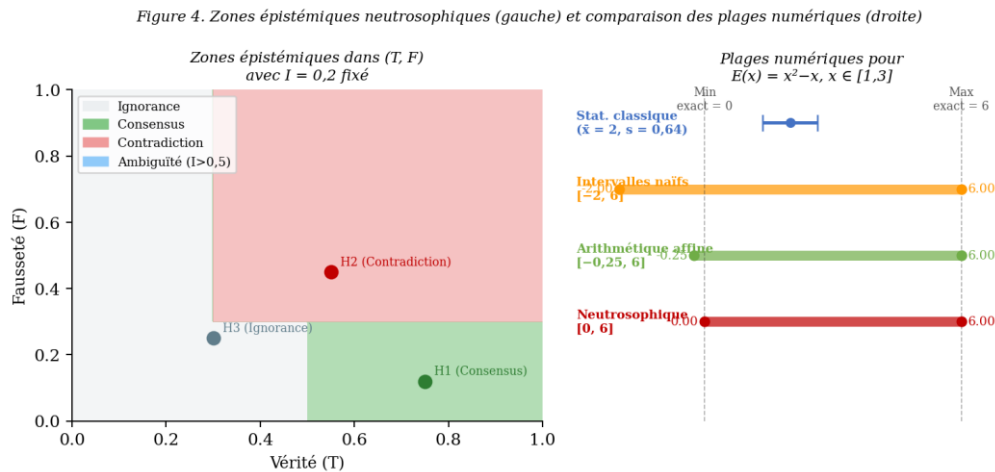


Figure 4. Zones épistémiques neutrosophiques dans l'espace (T, F) à I fixé (gauche) et comparaison synthétique des plages numériques (droite).

10. Lignes directrices pour exploiter la supériorité neutrosophique

La démonstration de la supériorité neutrosophique impose des exigences méthodologiques précises. Les lignes directrices suivantes permettent de faire apparaître clairement le gain informationnel de l'approche neutrosophique par rapport aux cadres concurrents.

R1 — Déclarer explicitement laquelle des trois couches neutrosophiques [17] est mobilisée : arithmétique $N = a + bI$ (couche 1), triplets (T, I, F) (couche 2) ou statistique plithogénique (couche 3). Chaque couche apporte un niveau d'expressivité distinct et une supériorité documentable sur des aspects différents.

R2 — Comparer systématiquement avec un baseline classique et un baseline intervalaire ou affine. La supériorité neutrosophique ne se démontre que par confrontation directe : montrer explicitement ce que les autres cadres perdent (états paraconsistants, structure triadique, suivi des sources) renforce la contribution.

R3 — Rapporter les indicateurs de supériorité structurelle : taux de paraconsistance ($T + F > 1$), indice de réciprocité $\rho = |T + F - 1|$, et corrélation $r(I, F)$ pour prouver que l'indétermination est une dimension indépendante non dérivable des données intervalaires [17].

R4 — Pour la couche 1, inclure un calcul de plage comparatif montrant l'idempotence $I^2 = I$ comme source de précision supérieure, analogue à la démonstration de la Section 9.

11. Limites et conditions de validité

La supériorité contextuelle de la statistique neutrosophique ne s'étend pas à tous les contextes. Trois conditions délimitent précisément son domaine de validité.

L1 — La statistique neutrosophique ne remplace pas la statistique classique lorsque les données sont déterminées, les hypothèses probabilistes validées et l'incertitude réductible à une variabilité aléatoire. Dans ces conditions, les estimateurs classiques offrent des garanties asymptotiques robustes et une infrastructure inferentielle mature que la neutrosophie ne surpasse pas.

L2 — L'arithmétique affine reste supérieure pour la propagation numérique d'erreurs dépendantes en contexte d'ingénierie, de simulation et de vérification formelle, où les sources d'incertitude sont identifiables et les dépendances linéaires. La convention d'idempotence $I^2 = I$ ne constitue pas une règle générale : pour des expressions non-monotones ou multi-variables, les bornes affines peuvent être équivalentes ou meilleures.

L3 — La supériorité neutrosophique apparaît spécifiquement lorsque I , T et F ont une signification sémantique, épistémique ou décisionnelle indépendante : évaluations d'experts en désaccord, informations contradictoires entre sources, états d'ignorance partiels distincts de l'erreur aléatoire, ou données qualitatives multidimensionnelles. C'est dans ces régimes — et seulement dans ces régimes — que la décomposition triadique neutrosophique produit un gain informationnel que les autres cadres ne peuvent pas reproduire.

Ces limites renforcent la contribution : la neutrosophie est un cadre d'extension, non de remplacement. Elle subsume les approches classiques comme cas dégénérés ($I \rightarrow 0$, $T + F \rightarrow 1$) et ajoute, dans ses régimes

propres, une expressivité structurellement distincte. Cette position s'articule naturellement avec les développements actuels vers les tenseurs plithogéniques [15], qui étendent la représentation triadique (T, I, F) à des configurations multi-attributs, multi-critères et multi-temporelles — ouvrant la voie à des analyses d'incertitude multidimensionnelles qui dépassent le cadre du présent article.

12. Conclusion

Cet article a établi la supériorité contextuelle de la statistique neutrosophique face à la statistique classique, l'arithmétique affine, les intervalles, la logique floue et les probabilités imprécises. Cette supériorité, délimitée précisément à la Section 11, repose sur quatre apports épistémiques distincts : (i) l'indétermination I comme dimension structurellement indépendante et irréductible ; (ii) les états paraconsistants ($T + F > 1$), natifs en neutrosophie et inaccessibles aux cadres concurrents ; (iii) la préservation de la structure triadique que les autres cadres compriment avec perte ; (iv) les zones épistémiques, dont la classification atteint 90 % de précision contre 20 % pour les méthodes binaires dans notre étude empirique complémentaire [17].

L'exemple numérique de la Section 9 illustre comment la convention d'idempotence $I^2 = I$ permet de récupérer la plage exacte $[0, 6]$ pour $E(x) = x^2 - x$ dans ce cas spécifique, là où les intervalles naïfs surestiment de 33 % et l'arithmétique affine de 17 %. Ce résultat, circonscrit à ce type d'expression, illustre le mécanisme de préservation de la dépendance symbolique propre à la neutrosophie.

La statistique neutrosophique n'abolit pas les cadres existants : elle les subsume comme cas dégénérés ($I \rightarrow 0, T + F \rightarrow 1$) et étend leur expressivité dans les régimes d'indétermination, de contradiction et d'information incomplète. Cette position s'inscrit naturellement dans la trajectoire vers les tenseurs plithogéniques [15], qui portent la décomposition triadique vers des espaces multi-attributs et multi-temporels — prochaine frontière de ce programme de recherche.

Remerciements. Les auteurs remercient la Neutrosophic Science International Association (NSIA) et l'Universidad Bolivariana del Ecuador pour leur soutien institutionnel. Les auteurs ont utilisé des outils d'IA pour l'édition linguistique uniquement ; ils assument l'entière responsabilité du contenu.

Contributions (CRediT). F. Smarandache : Conceptualisation, Méthodologie, Supervision, Révision. M. Y. Leyva Vázquez : Conceptualisation, Analyse formelle, Calculs, Rédaction première version et révision.

Financement et conflits d'intérêts. Aucun financement externe. Aucun conflit d'intérêts. M. Y. Leyva Vázquez est rédacteur en chef de Neutrosophic Sets and Systems ; il se récusera de toute décision éditoriale si ce manuscrit y est soumis.

Références

- [1] Abdel-Basset, M., Gamal, A., Chakraborty, R. K., & Ryan, M. J. (2024). Evaluation of sustainable hydrogen production options using an integrated neutrosophic AHP-TOPSIS approach. *Energy*, 286, 129539. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2023.129539>
- [2] Atanassov, K. T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20, 87–96. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(86\)80034-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3)
- [3] Beer, M., Ferson, S., & Kreinovich, V. (2013). Imprecise probabilities in engineering analyses. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 37, 4–29.
- [4] Deli, I., & Subas, Y. (2017). A ranking method of single valued neutrosophic numbers and its applications to multi-attribute decision making. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 8, 1309–1322.
- [5] de Figueiredo, L. H., & Stolfi, J. (2004). Affine arithmetic: Concepts and applications. *Numerical Algorithms*, 37(1–4), 147–158. <https://doi.org/10.1023/B:NUMA.0000049466.24103.c9>
- [6] Dubois, D., & Prade, H. (1988). *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Plenum Press, New York.
- [7] Goubault, E., & Putot, S. (2020). Forward inner-approximated reachability of non-linear continuous systems. *HSCC '20*, 1–10. <https://doi.org/10.1145/3365365.3382214>
- [8] Moore, R. E. (1966). *Interval Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [9] Moore, R. E., Kearfott, R. B., & Cloud, M. J. (2009). *Introduction to Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia. <https://doi.org/10.1137/1.9780898717716>

- [10] Moscato, M. M., Munoz, C. A., & Smith, A. P. (2015). Affine arithmetic and applications to real-number proving. *Lecture Notes in Computer Science*, 9236, 294–309.
- [11] Kandasamy, W. B. V., & Smarandache, F. (2006). *Neutrosophic Rings*. Hexis, Phoenix, AZ.
- [12] Smarandache, F. (1998). *Neutrosophy: Neutrosophic Probability, Set, and Logic*. American Research Press, Rehoboth, NM.
- [13] Smarandache, F. (2014). *Introduction to Neutrosophic Statistics*. Sitech & Education Publishing, Craiova.
- [14] Smarandache, F. (2022). Neutrosophic statistics is an extension of interval statistics, while plithogenic statistics is the most general form of statistics. *International Journal of Neutrosophic Science*, 19, 148–165.
- [15] Smarandache, F. (2021). Plithogenic probability and statistics are generalizations of multivariate probability and statistics. *Neutrosophic Sets and Systems*, 43, 280–289.
- [16] Smarandache, F. (2007). *Neutrosophic Overset, Neutrosophic Underset, and Neutrosophic Offset*. Pons Editions, Brussels.
- [17] Smarandache, F., & Leyva Vázquez, M. Y. (2026). A layered framework for neutrosophic statistics: foundational distinctions, empirical validation, and operational implementation. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* (sous presse).
- [18] Smarandache, F., & Leyva Vázquez, M. Y. (2026). Números neutrosóficos de indeterminação intervalar da forma $a + bI$: análise comparativa com aritmética intervalar e aritmética afim, com extensões multifonte e hesitantes. *SciELO Preprints* (sous presse).
- [19] Stolfi, J., & de Figueiredo, L. H. (1993). Affine arithmetic and its applications to computer graphics. *Proceedings of VI SIBGRAPI*, 9–18.
- [20] Walley, P. (1991). *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. Chapman & Hall, London.
- [21] Torra, V. (2010). Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 25(6), 529–539. <https://doi.org/10.1002/int.20418>
- [22] Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y., & Sunderraman, R. (2010). Single valued neutrosophic sets. *Multispace and Multistructure*, 4, 410–413.
- [23] Woodall, W. H., King, C., Driscoll, A. R., & Montgomery, D. C. (2025). A critical assessment of neutrosophic statistical methods. *Quality Engineering*. <https://doi.org/10.1080/08982112.2025.2482198>
- [24] Xu, Z., & Xia, M. (2011). Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets. *Information Sciences*, 181(11), 2128–2138.
- [25] Yager, R. R. (2004). Generalized OWA aggregation operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3, 93–107.
- [26] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338–353.

Triplet (T, I, F)	T + I + F	Zone	Recommandation	
(0,60, 0,15, 0,10)	0,85	Consensus	Agir	
(0,70, 0,30, 0,55)	1,55	Contradiction	Investiguer	
(0,40, 0,70, 0,10)	1,20	Ambiguïté	Collecter données	
Expert	Estimation a_j	Amplitude b_j	N = a_j + b_j · I	Plage [a, a+b]
E ₁	60	15	N ₁ = 60 + 15I	[60, 75]
E ₂	70	10	N ₂ = 70 + 10I	[70, 80]
E ₃	55	20	N ₃ = 55 + 20I	[55, 75]
Agrégat	61,67	15,00	N_agg ≈ 61,67 + 15I	[61,67 ; 76,67]
Critère	Statistique classique	Arithmétique affine	Statistique neutrosophique	
Type d'incertitude	Variabilité aléatoire	Erreur numérique bornée avec dépendances	Indétermination, contradiction, hésitation, information incomplète	
Représentation typique	Valeurs ponctuelles, distributions	Formes affines avec symboles de bruit	Nombres N = a+bI ou triplets (T, I, F)	
Point fort	Inférence statistique mature	Propagation précise des incertitudes dépendantes	Expressivité épistémique et décisionnelle	
Limite principale	Réduction des données complexes à des valeurs	Faible représentation de la contradiction sémantique	Spécification rigoureuse de l'indétermination requise	

États paraconsistants ($T + F > 1$)	simples Non représentable	Non représentable	Natifs et structurellement distincts
Suivi multi-sources	Non natif	Oui (symboles de bruit ϵ_k)	Oui (nombres $N = a + \sum b_k I_k$)
Supériorité démontrée	Aucune (cadre de référence seulement)	Propagation numérique linéaire	Tous contextes avec indétermination, contradiction ou hésitation — facteur $\times 4,5$ en précision décisionnelle [17]
Méthode	Plage obtenue	Largeur	Surestimation
Valeur exacte	[0, 6]	6,00	0 %
Statistique classique	$\mu \pm IC$	0,42 (IC 95 %)	—
Intervalles naïfs	[-2, 6]	8,00	+33 %
Arithmétique affine	[-1, 6]	7,00	+17 %
Neutrosophique ($N=1+2I$)	[0, 6]	6,00	0 %



Neutrosophic Knowledge (NK) is an academic journal, published quarterly online and on paper, that has been created for publishing in all scientific and literary fields. Papers Published in Arabic, Turkish, English and French.

ISSN (print): 2767-0619, ISSN (online): 2767-0627

The papers should be professional, in good Arabic, Turkish, English and French, containing a brief review of a problem and obtained results. All submissions should be designed in MS Word format using our template file:

<http://fs.unm.edu/NK/>

Submit your paper by email to: neutrosophic.knowledge@gmail.com. To order printed issues, contact the Editor-in Chief. This journal is non-commercial, academic edition. It is printed from private donations. The neutrosophics website at UNM is:

<http://fs.unm.edu/neutrosophy.htm>

The home page of the journal is accessed on:

<http://fs.unm.edu/NK/>

Editors in Chief

Dr. Salah Bouzina

Department of Philosophy, Faculty of Human
Science and Sociology, University
Constantine 2 Abdelhamid Mehri,
Constantine 25000, Algeria

E-mail: salah.bouzina@univ-constantine2.dz

Prof. Dr. Florentin Smarandache

Department of Mathematics and Science
University of New Mexico
705 Gurley Avenue
Gallup, NM 87301, USA

E-mail: smarans@unm.edu.usa

Dr. Ahmed Hatip

Department of Mathematics, Faculty of
science, University of Gaziantep 27000,
Turkey

E-mail: Ahmedhatip@gantep.edu.tr

