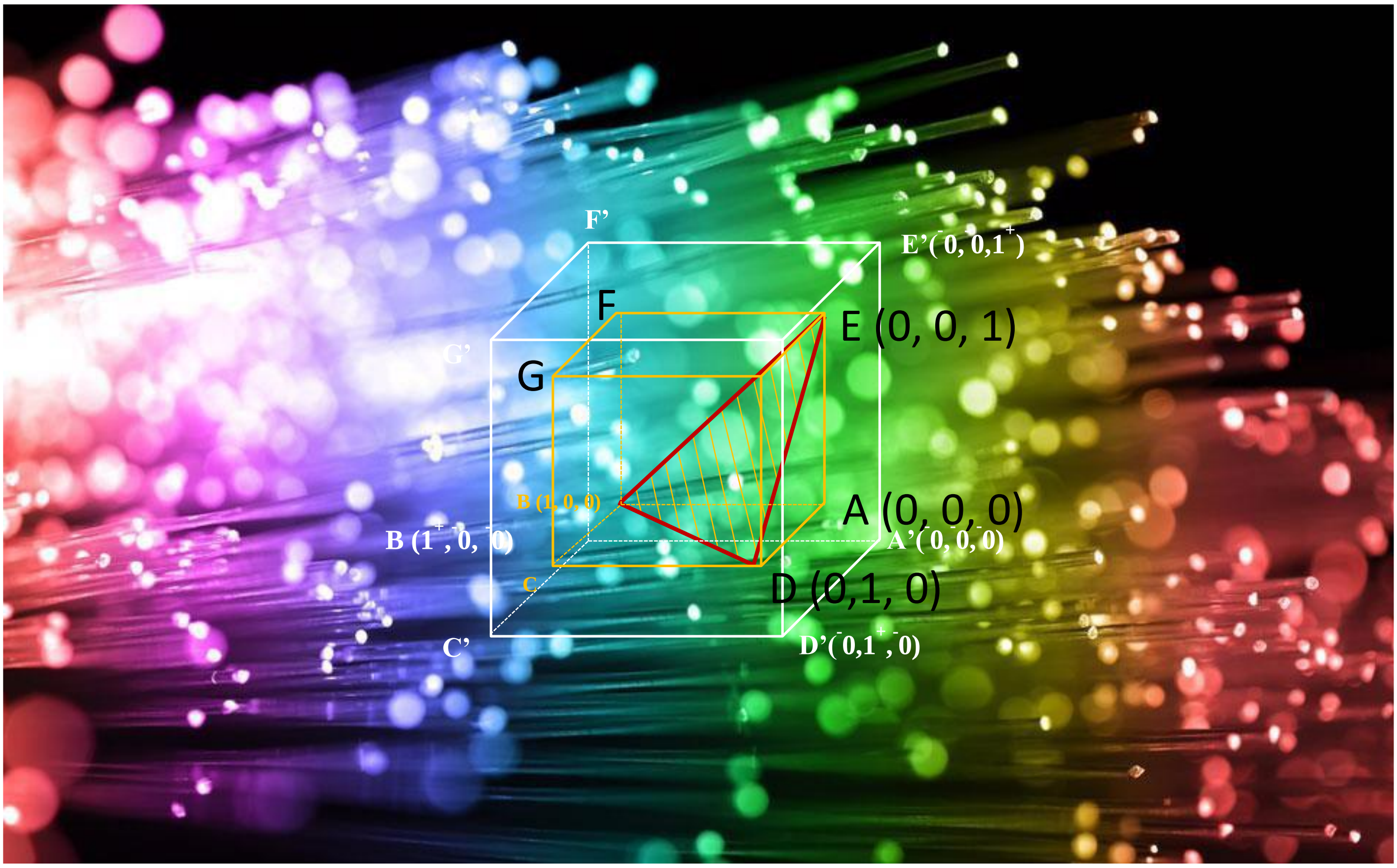
NEUTROSOPHIC KNOWLEDGE

JOURNAL OF MODERN SCIENCE AND ARTS

Volume 6, 2025



Editors-in-Chief

Salah Bouzina, Florentin Smarandache, Ahmed Hatip

ISSN 2767-0619 (Print)

ISSN 2767-0627 (Online)

Neutrosophic Science International Association (NSIA)

Published by the UNIVERSITY OF NEW MEXICO, United States

NEUTROSOPHIC KNOWLEDGE

JOURNAL OF MODERN SCIENCE AND ARTS

Editors-in-Chief

Salah Bouzina, Florentin Smarandache, Ahmed Hatip

ISSN 2767-0619 (Print)

ISSN 2767-0627 (Online)

ISSN 2767-0627 (online) ISSN 2767-0619 (Print)

Neutrosophic Knowledge

An international Journal concerned with publishing in all scientific and literary fields

Papers Published in Arabic, Turkish, English and French

Copyright Notice

Information for Authors and Subscribers

"Neutrosophics Knowledge" has been created for publications on advanced studies in neutrosophy, neutrosophic set, neutrosophic logic, neutrosophic probability, neutrosophic statistics that started in 1995 and their applications in any field, such as the neutrosophic structures developed in algebra, geometry, topology, etc.
The submitted papers should be professional, in good Arabic, Turkish, English and French containing a brief review of a problem and obtained results.
Neutrosophy is a new branch of philosophy that studies the origin, nature, and scope of neutralities, as well as their interactions with different ideational spectra.

ISSN 2767-0627 (online) ISSN 2767-0619 (Print)

This theory considers every notion or idea <A> together with its opposite or negation <antiA> and with their spectrum of neutralities <neutA> in between them (i.e. notions or ideas supporting neither <A> nor <antiA>). The <neutA> and <antiA> ideas together are referred to as <nonA>.

Neutrosophy is a generalization of Hegel's dialectics (the last one is based on <A> and <antiA> only).

According to this theory every idea <A> tends to be neutralized and balanced by <antiA> and <nonA> ideas - as a state of equilibrium.

In a classical way <A>, <neutA>, <antiA> are disjoint two by two. But, since in many cases the borders between notions are vague, imprecise, Sorites, it is possible that <A>, <neutA>, <antiA> (and <nonA> of course) have common parts two by two, or even all three of them as well.

Neutrosophic Set and *Neutrosophic Logic* are generalizations of the fuzzy set and respectively fuzzy logic (especially of intuitionistic fuzzy set and respectively intuitionistic fuzzy logic). In neutrosophic logic a proposition has a degree of truth (T), a degree of indeterminacy (I), and a degree of falsity (F), where T, I, F are standard or non-standard subsets of $]^-0, 1^+[$.

Neutrosophic Probability is a generalization of the classical probability and imprecise probability.

Neutrosophic Statistics is a generalization of the classical statistics.

What distinguishes the neutrosophics from other fields is the <neutA>, which means neither <A> nor <antiA>.

<neutA>, which of course depends on <A>, can be indeterminacy, neutrality, tie game, unknown, contradiction, ignorance, imprecision, etc.

All submissions should be designed in MS Word format using our template file:
http:// fs.unm.edu/NK/Nk-paper-template.doc.

A variety of scientific books in many languages can be downloaded freely from the Digital Library of Science:
http:// fs.unm.edu/ScienceLibrary.htm.

To submit a paper, mail the file to the Editor-in-Chief. To order printed issues, contact the Editor-in-Chief. This journal is non-commercial, academic edition. It is printed from private donations.

Information about the neutrosophics you get from the UNM website:
http:// fs.unm.edu/neutrosophy.htm.. The home page of the journal is accessed on http://fs.unm.edu/NK.

ISSN 2767-0627 (online) ISSN 2767-0619 (Print)

ISSN 2767-0627 (online) ISSN 2767-0619 (Print)

Editors

ISSN 2767-0627 (online) ISSN 2767-0619 (Print)

Content

Neutrosophic Knowledge, Vol. 06, 2025
University of New Mexico

Article

معادلة الانحدار النيتروسوفي باستخدام المصفوفات النيتروسوفية

Jamal Abdul Salam Althaljah [1]*، Murhaf Riad Alabdullah [2] and Iyad Alhamadeh [3]

[1] Faculty of Science، Department of Mathematics، Aleppo University in liberated areas، Syria; gmal.math2007@gmail.com

[2] Faculty of Science, Department of Mathematics, Aleppo University in liberated areas, Syria; murhaf.alabdullah@gmail.com

[3] Faculty of Science, Department of Mathematics, Aleppo University in liberated areas, Syria; Alhamadehiyad@gmail.com

* Correspondence: gmal.math2007@gmail.com

Received: 11 06, 2024; *Accepted:* 12 14, 2024

الملخص:

عند إيجاد معادلة الانحدار النيتروسوفي فإنه يتم تحويل العدد النيتروسوفي $a + b\,I$ إلى الشكل $(a, a + b)$ ثم تستخدم طريقة المربعات الصغرى في إيجاد معادلة الانحدار.

في هذا البحث درسنا المصفوفات النيتروسوفية والانحدار النيتروسوفي، وقدمنا طريقة في إيجاد معادلة الانحدار النيتروسوفي باستخدام المصفوفات النيتروسوفية، وعرضنا الأمثلة التي توضح صحة النتائج، وتوصلنا إلى سهولة إيجاد معادلة الانحدار النيتروسوفي باستخدام المصفوفات النيتروسوفية مقارنة باستخدام طريقة المربعات الصغرى النيتروسوفية.

الكلمات المفتاحية:

العدد النيتروسوفي، المصفوفات النيتروسوفية، الانحدار النيتروسوفي، القيم النيتروسوفية المتوقعة.

1. مقدمة:

إن الفلسفة النيتروسوفية ، كما عرّفها الشاعر والفيلسوف والرياضياتي فلورانتين سمارانداكة، تمثل تطوراً ملحوظاً عن المنطق الضبابي التقليدي [13-14-15-16-17] ، وتعكس رؤية جديدة للعالم تتسم بالشمولية والعمق[18-19]، لقد أثارت هذه الفلسفة الاهتمام بشكل خاص نظراً لتطبيقاتها الواسعة وتأثيرها المتزايد في مجالات متعددة [8-20] .

منذ ظهور الفلسفة النيتروسوفية، شهدنا كيف أثرت بشكل مباشر على علم الرياضيات[9-23] ، خاصةً من خلال إدخال العنصر الجبري (I) الذي أضاف بُعدًا جديدًا ومعاني أعمق للمفاهيم الموجودة، هذا التأثير لم يقتصر على الرياضيات المجردة فقط [21-22]، بل تعداه إلى تطبيقات عملية كثيرة [7-8-9] ، منها تحسين الدقة والوضوح في التحليلات والنتائج الإحصائية، وتطوير آليات اتخاذ القرار في الاقتصاد والعلوم الاجتماعية ومختلف العلوم الأخرى[2-7-8-9].

وقد قام فلورنتن سمارنداكة بتقديم دراسة بعنوان (مقدمة في الإحصاء النيتروسوفي)، عام 2014م [5]، حيث تحدث فيها عن الأعداد النيتروسوفية الكلاسيكية والعمليات عليها والأعداد المركبة النيتروسوفية والعمليات عليها،

وطرق عرض البيانات النيتروسوفية وتطبيق مقاييس النزعة المركزية النيتروسوفية عليها وبعض المقاييس الإحصائية، وقد ترجمت الدراسة إلى اللغة العربية من قبل عدة باحثين [2-3].

في الدراسات الإحصائية النيتروسوفية دائما نستخدم الأعداد الإحصائية النيتروسوفية بالشكل $[a, b]$، بدلاً من استخدام العدد النيتروسوفي الحقيقي من الشكل $a + b\,I;\ a, b \in \mathbb{R}$.

في هذا البحث قمنا باستخدام تطبيقات المصفوفات النيتروسوفية في نمذجة معادلة الانحدار النيتروسوفي، بين متغيرين عشوائيين نيتروسوفيين، واستخدام الأعداد النيتروسوفية بالشكل $a + b\,I;\ a, b \in \mathbb{R}$.

2. تعاريف وأساسيات:

1.2. تعريف: العدد النيتروسوفي: [1-2-3-5] Neutrosophic Number

يُعرّف العدد النيتروسوفي بأبسط صيغه بالعلاقة $w = a + bI$ حيث أن a و b أعداد حقيقة أو مركبة و I عنصر اللاتحديد، مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$0.I = 0$ و $I^{2} = I$ و $I^n = I$ لجميع قيم n الموجبة مثال ذلك:

$$W = -3 = -3 + 0I \ ، \ W = 1 - 2I$$

2.2. العمليات على الأعداد النيتروسوفية:[6-12]

ليكن لدينا العددان النيتروسوفيان الحقيقيان:

$$N_1 = a_1 + b_1 I\ , N_2 = a_2 + b_2 I\ ;\ a_1, a_2, b1, b2 \in \mathbb{R}$$

1.2.2. الجمع والطرح:

$$N_1 \pm N_2 = (\,a_1 + b_1 I) \pm (\,a_2 + b_2 I) = (\,a_1 \pm a_2) + (\,b_1 \pm b_2\,)I$$

2.2.2. الضرب:

$$N_1 . N_2 = (\,a_1 + b_1 I) . (\,a_2 + b_2 I) = a_1 . a_2 + (a_1 . b_2 + a_2 . b_1 + b_1 . b_2) I$$

3.2.2. القسمة: قسمة عددين حقيقين نيتروسوفيين:

ليكن $w_1 = a_1 + b_1 I$ و $w_2 = a_2 + b_2 I$ عددين نيتروسوفيين عندئذ يكون:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{a_1 + b_1 I}{a_2 + b_2 I} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_{2}b_1 - a_{1}b_2}{a_2\,(a_2 + b_2)}\ I\ ; a_2 \neq 0\ , a_2 + b_2 \neq 0$$

3.2. تعريف: الحقل النيتروسوفي:[5-10]

ليكن K حقل ما، يُعرَّف الحقل النيتروسوفي بالشكل $< K, I >$ ويعطى بالعلاقة

$$K(I) =< K, I >= \{\,a + bI\ ;\ a, b \in K\}$$

وإذا كان $K = \mathbb{R}$ عندئذ يُسمى الحقل $\mathbb{R}(I)$ حقل الأعداد الحقيقية النيتروسوفية، وإذا $K = \mathbb{C}$ عندئذ يُسمى الحقل $\mathbb{C}(I)$ حقل الأعداد العقدية النيتروسوفية.

4.2. تعريف: عملية الترتيب في الحقل النيتروسوفي الحقيقي: [5-10- 11]

ليكن $R(I) = \{\,a + b\,I;\ a, b \in R\,\}$ ، حقل الأعداد الحقيقية النيتروسوفية، عندئذ يُقال إن:

$$a + b\,I \leq c + d\,I \text{ إذا وفقط إذا كان } a \leq c \text{ و } a + b \leq c + d$$

وهي علاقة ترتيب جزئي.

5.2. تعريف: العدد النيتروسوفي الموجب: [5-10]

اعتماداً على التعريف السابق يُعرف العدد النيتروسوفي الموجب كما يلي:

$$a + bI \geq 0 = 0 + 0I \text{ وهذا يعني } a \geq 0 \text{ و } a + b \geq 0$$

6.2. مثال: $x = 2 - I$ عدد حقيقي نيتروسوفي موجب حيث $2 \geq 0$ و $2 - 1 = 1 \geq 0$

7.2. تعريف: الجذر التربيعي للعدد النيتروسوفي الموجب:[10]

$$\sqrt{a+b\,I}=\sqrt{a}+\ I[\sqrt{a+b}-\sqrt{a}\,]$$

8.2. تعريف: **الإيزومترية AH وحيدة البعد لتحويل العدد النيتروسوفي الى مجموعة**: [10]

يُعرَّف التطبيق T لتحويل العدد النيتروسوفي إلى مجموعة لإستخدامه في التطبيقات الإحصائية ليكن لدينا:

$$w=a+bI \quad ;\ w\in\ \mathbb{R}\,(I)$$

$$T:\mathbb{R}\,(I)\ \rightarrow\ \mathbb{R}\ \times\ \mathbb{R};\ T(w)=T(a+bI)=(\,a,a+b)\ ;\quad a,b\ \in\ \mathbb{R}\,(I)$$

9.2. تعريف:عكس الإيزومترية AH وحيدة البعد لتحويل مجموعة نيتروسوفية إلى عدد نيتروسوفي حقيقي: [10]

يُعرَّف التطبيقT^{-1} لتحويل مجموعة نيتروسوفية إلى عدد نيتروسوفي:

$$T^{-1}:\mathbb{R}\ \times\ \mathbb{R}\ \rightarrow\ \mathbb{R}\,(I);\ T^{-1}\,(a,b)=\ a\ +(b-\ a)\,I \quad ;\quad a,b\ \in\ \mathbb{R}$$

1.9.2. ملاحظة: إن التطبيقين السابقينT وT^{-1} تطبيقان إيزومورفيزمان.

2.9.2. ملاحظة: بعد تعريف التطبيق الإيزومورفزمي (8.2) عام 2021 [10]، يوجد العديد من التعاريف النيتروسوفية تم إعادة صياغتها، وبعضها تم التعديل عليها بشكل كامل.

10.2. المصفوفات النيتروسوفية: [1]

11.2. تعريف: لتكن $M_{m\times n}=\{[\,aij]\,;\,aij\ \in K(I)\}$ حيث $K(I)$ حقل نيتروسوفي، عندئذ تسمى$M_{m\times n}$ مصفوفة نيتروسوفية.

12.2. تعريف: **المصفوفة النيتروسوفية المربعة:**

تُعرف المصفوفة النيتروسوفية المربعة من المرتبة n بالعلاقة $M=A+B\,I$ حيث أنه كلا من A وB مصفوفتين حقيقيتين مربعتين من المرتبة n.

13.2. تعريف: جداء مصفوفتين نيتروسوفيتين:

لتكن المصفوفتان النيتروسوفيتان $M_{m\times p}=A+B\,I\ ,\ N_{p\times n}=C+D\,I$ يعرف جداء المصفوفتين MN بالعلاقة :

$$MN=AC+[(A+B).(C+D)-AC]\,I$$

14.2. مثال: لتكن لدينا المصفوفة النيتروسوفية M

$$M=A+B\,I\ =\begin{bmatrix}1 & 3\,I\\ 1+\ I & 2+2\,I\end{bmatrix}$$

حيث أن: $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

والمصفوفة النيتروسوفية المربعة N:

$$N=\ C+D\,I\ =\begin{bmatrix}2+3\,I & I\\ 5+4\,I & 3+2\,I\end{bmatrix}$$

حيث أن: $C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 5 & 3\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

إن جداء المصفوفتين $M\,,N$ يحسب حسب التعريف (13.2) كما يلي:

$$M.N=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 0\\ 5 & 3\end{bmatrix}+\left[\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}5 & 1\\ 9 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 0\\ 5 & 3\end{bmatrix}\right]I=\begin{bmatrix}2+30I & 16\,I\\ 12+34\,I & 6+16\,I\end{bmatrix}$$

15.2. تعريف: محدد المصفوفة النيتروسوفية المربعة:

لتكن $M = A + B\ I$ مصفوفة نيتروسوفية مربعة من المرتبة n، عندئذ يُعرف محدد هذه المصفوفة بالشكل:

$$detM = det\ A + \ I\ [det(A+B) - det\ A]$$

16.2. مثال: إن محدد المصفوفتين النيتروسوفيتين M و N الوارد في المثال (14.2) هو**:**

$$det(M) = \ 2 - 4\ I$$

$$det(N) = \ 6 + 10\ I$$

17.2. تعريف: مقلوب المصفوفة النيتروسوفية المربعة:

لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نيتروسوفية مربعة من المرتبة n، تحقق $det(A) \neq 0$ و $det(A+B) \neq 0$ ، أي $det(M) \neq 0$، عندئذ يعرف مقلوب هذه المصفوفة بالشكل:

$$M^{-1} = A^{-1} + I[\ (A+B)^{-1} - A^{-1}]$$

18.2. مثال: إن مقلوب المصفوفة الواردة M في المثال (14.2) حيث رأينا في المثال (16.2) أن وبالتالي لها مقلوب وهو:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1-3I & -1.5\ I \\ -0.5+1.5\ I & 0.5-1\ I \end{bmatrix}$$

بعد إيجاد مقلوب M المصفوفة إذا ضربنا المصفوفة M بمقلوبها حسب التعريف (13.2)، نجد أنه يتحقق:

$M.M^{-1} = M^{-1}.M = I_2$ حيث أن I_2 المصفوفة الواحدية من الدرجة الثانية.

19.2. تعريف: منقول المصفوفة النيتروسوفية:

لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نيتروسوفية ذات السعة $m \times n$ ، عندئذ منقول المصفوفة النيتروسوفية، هومصفوفة نيتروسوفية ذات السعة $n \times m$ ، يُعرف بالشكل:

$$M^T = A^T + I[\ (A+B)^T - A^T]$$

20.2. مبرهنة:

لتكن المصفوفتان النيتروسفيتان، $N = C + D\ I$ ذات السعة$p \times n$، $M = A + B\ I$ ذات السعة $m \times p$ فإن:

$$(M.N)^T = N^T.M^T$$

البرهان: لدينا

$$M^T = A^T + I[\ (A+B)^T - A^T]$$

$$N^T = C^T + I[\ (C+D)^T - C^T]$$

وبالجداء المصفوفتين السابقتين نجد:

$$\mathrm{N^T.M^T = (C^T + I[\ (C+D)^T - C^T]).(A^T + I[\ (A+B)^T - A^T])}$$

$$\mathrm{= C^T.A^T + \ I[\ \ (C+D)^T - C^T + C^T).(\ (A+B)^T - A^T + A^T) - A^T.C^T]}$$

$$\mathrm{= C^T.A^T + [(C+D)^T.(A+B)^T - C^T.A^T]I}\ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

وجدنا في (13.2) أن:

$$MN = AC + [(A+B).(C+D) - AC]\ I$$

بإيجاد المنقول النيتروسوفي حسب التعريف:

$$(MN)^T = (AC)^T + [\big((A+B).(C+D) - AC + AC\big)^T - (AC)^T]I$$

$$=(AC)^T + [(C+D)^T.(A+B)^T - (AC)^T]I$$

$$=C^T.A^T+[(C+D)^T.(A+B)^T-C^T.A^T]I \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن

$$(M.N)^T=N^T.M^T$$

21.2. تعريف: العينة النيتروسوفية:[4]

تُعرف العيّنة النيتروسوفية بأنها مجموعة جزئية من المجتمع تحتوي بعض اللاتحديد، حيث تقدم معلومات غير محددة.

22.2. تعريف: المتغير العشوائي النيتروسوفي: [3]

بفرض أنX_N فضاء العينة لتجربة عشوائية نيتروسوفية، فالمتغيرالعشوائي النيتروسوفي $x_{Ni}=x+yI\in R(I)$ هو دالة معرفة على فضاء العينة X_N، بحيث يكون الاتحديد في منطلق الدالة أو مستقرها.

3. الانحدار النيتروسوفي:

ليكن لدينا المتغيران النيتروسوفيان $X_{Ni}=U_i+V_iI$, $Y_{Ni}=L_i+K_iI$, ونريد أن نوجد معادلة الانحدار النيتروسوفي البسيط بينهما:

سوف نحتاج إلى المصفوفات [4]:

$$Y_{Ni}=\begin{bmatrix} y_{N1}\\ y_{N2}\\ .\\ y_{Nn}\end{bmatrix} \qquad X_{Ni}=\begin{bmatrix}1 & X_{N1}\\ 1 & X_{N2}\\ 1 & .\\ 1 & .\\ 1 & X_{Nn}\end{bmatrix} \qquad B_N=\begin{bmatrix}B_{N0}\\ B_{N1}\end{bmatrix}$$

$${X_{Ni}}^T.Y_{Ni}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n} y_{Ni}\\ \sum_{i=1}^{n} x_{Ni}.y_{Ni}\end{bmatrix}$$

$${X_{Ni}}^T X_{Ni}=\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{Ni}\\ \sum_{i=1}^{n} x_{Ni} & \sum_{i=1}^{n} {x_{Ni}}^2\end{bmatrix}$$

3.1. مبرهنة: إن معاملات الانحدار النيتروسوفي تعطى بالعلاقة:

$$\widehat{B_{Ni}}=\begin{bmatrix}B_{N0}\\ B_{N1}\end{bmatrix}=\left({X_{Ni}}^T X_{Ni}\right)^{-1}.{X_{Ni}}^T.Y_{Ni} \quad ;\ det({X_{Ni}}^T X_{Ni})\neq 0$$

البرهان: إن معادلة الانحدار النيتروسوفي بالشكل المصفوفي، تعطى بالعلاقة:

$$Y_{Ni}=X_{Ni}.B_N+e_{Ni} \qquad ;\ (e_{Ni}\ \text{الأخطاء العشوائية})$$

إن متجه القيّم النيتروسوفية المقدرة يعطى بالعلاقة:

$$\widehat{Y_{Ni}}=X_{Ni}.\widehat{B_{Ni}}$$

ومنه متجه البواقي النيتروسوفية هو

$$e_{Ni}=Y_{Ni}-\widehat{Y_{Ni}}=Y_{Ni}-X_{Ni}.\widehat{B_{Ni}}$$

إن منقول المتجه النيتروسوفي $e_{Ni} = \begin{bmatrix} e_{N1} \\ e_{N2} \\ \cdot \\ e_{Nn} \end{bmatrix}$ هو المتجه $e_{Ni}{}^T = [e_{N1} \quad e_{N2} \quad \cdot \quad e_{Nn}]$

ومنه نجد

$$e_{Ni}{}^T . e_{Ni} = \left(Y_{Ni} - X_{Ni} . \widehat{B_{Ni}}\right)^T . (Y_{Ni} - X_{Ni} . \widehat{B_{Ni}})$$

وحسب المبرهنة (20.2) نجدأن:

$$e_{Ni}{}^T . e_{Ni} = \left(Y_{Ni}{}^T - \widehat{B_{Ni}}{}^T . X_{Ni}{}^T\right) . (Y_{Ni} - X_{Ni} . \widehat{B_{Ni}}) =$$
$$Y_{Ni}{}^T . Y_{Ni} - Y_{Ni}{}^T . X_{Ni} . \widehat{B_{Ni}} - \widehat{B_{Ni}}{}^T . X_{Ni}{}^T . Y_{Ni} + \widehat{B_{Ni}}{}^T . X_{Ni}{}^T . X_{Ni} . \widehat{B_{Ni}}$$

ولكن

$$\widehat{B_{Ni}}{}^T . X_{Ni}{}^T . Y_{Ni} = (X_{Ni} . \widehat{B_{Ni}})^T . Y_{Ni} = (Y_{Ni}{}^T . X_{Ni} . \widehat{B_{Ni}})^T$$

أي أن المقدارين $Y_{Ni} \quad . X_{Ni} . \widehat{B_{Ni}}$ و $\widehat{B_{Ni}}{}^T . X_{Ni}{}^T . Y_{Ni}$ متساويان وهما مقداران سلميان نيتروسوفيان، ومنه نجد:

$$e_{Ni}{}^T . e_{Ni} = Y_{Ni}{}^T . Y_{Ni} - 2\widehat{B_{Ni}}{}^T . X_{Ni}{}^T . Y_{Ni} + \widehat{B_{Ni}}{}^T . X_{Ni}{}^T . X_{Ni} . \widehat{B_{Ni}}$$

وبما أننا نسعى إلى تقليل مجموع مربعات الأخطاء النيتروسوفية العشوائية، التي تمثلها، $e_{Ni}{}^T . e_{Ni} = \sum_{i=1}^{n} e_{Ni}{}^2$، يتحقق بالمشتق الأول لدالة المصفوفات بالنسبة $\widehat{B_{Ni}}{}^T$ ومساواتها بالصفركما يأتي:

$$\frac{\partial(e_{Ni}{}^T . e_{Ni})}{\partial(\widehat{B_{Ni}}{}^T)} = 0 - 2. X_{Ni}{}^T . Y_{Ni} + 2. X_{Ni}{}^T . X_{Ni} . \widehat{B_{Ni}}$$

ومنه بعد وضع، $\frac{\partial(_{Ni}{}^T . e_{Ni})}{\partial(\widehat{B_{Ni}}{}^T)} = 0$ نستنتج أن:

$$X_{Ni}{}^T . Y_{Ni} = X_{Ni}{}^T . X_{Ni} . \widehat{B_{Ni}}$$

بضرب طرفي المعادلة السابقة بمقلوب المصفوفة $X_{Ni} \quad . _{Ni}$ من اليسار نحصل على النتيجة المطلوبة وهي:

$$\widehat{B_N} = \begin{bmatrix} B_{N0} \\ B_{N1} \end{bmatrix} = \left(X_{Ni}{}^T X_{Ni}\right)^{-1} . X_{Ni}{}^T . Y_{Ni}$$

3.2. نتيجة: إن معادلة معاملات الانحدار النيتروسوفي هي تعميم لمعادلة الانحدار الكلاسيكي.

3.3. حساب المعاملات النيتروسوفية باستخدام المصفوفات النيتروسوفية:

يمكن حساب المعاملات النيتروسوفية لمعادلة الانحدار من خلال العلاقة:

$$\widehat{B_N}=\begin{bmatrix}B_{N0}\\B_{N1}\end{bmatrix}=\left({X_{Ni}}^T X_{Ni}\right)^{-1}.{X_{Ni}}^T.Y_{Ni}$$

	X_{Ni}	Y_{Ni}	X_{Ni}	Y_{Ni}	$X_{Ni}.Y_{Ni}$	${X_{Ni}}^2$
1	[2,2]	[1,3]	$2+0\,I$	$1+2\,I$	$2+4\,I$	$4+12\,I$
2	[4,5]	[6,6]	$4+\,I$	$6+0\,I$	$24+6\,I$	$16+65\,I$
3	[1,1]	[2,2]	$1+0\,I$	$2+0\,I$	$2+0\,I$	$1+3\,I$
4	[6,7]	[10,13]	$6+\,I$	$10+3\,I$	$60+31\,I$	$36+133\,I$
5	[8,8]	[14,15]	$8+0\,I$	$14+\,I$	$112+8\,I$	$64+192\,I$
6	[3,3]	[5,5]	$3+0\,I$	$5+0\,I$	$15+0\,I$	$9+27\,I$
	$\sum X_i$	$\sum Y_i$	$\sum X_I$	$\sum Y_I$	$\sum X_I.Y_I$	$\sum (X_I)^2$
Sum	[24,26]	[38,44]	$24+2\,I$	$38+6\,I$	$215+49\,I$	$130+432\,I$

من الجدول السابق نحصل على المصفوفات الأتية:

$${X_{Ni}}^T.Y_{Ni}=\begin{bmatrix}38+6I\\215+49I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}38\\215\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\49\end{bmatrix}I$$

$${X_{Ni}}^T X_{Ni}=\begin{bmatrix}6 & 24+2I\\24+2I & 130+432I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 24\\24 & 130\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 432\end{bmatrix}I$$

لنوجد مقلوب المصفوفة X_{Ni} X_{Ni} حسب التعريف:

$$\left({X_{Ni}}^T X_{Ni}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}0.64-0.4I & -0.12+0.11I\\-0.12+0.11I & 0.03-0.03I\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.64 & -0.12\\-0.12 & 0.03\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.4 & 0.11\\0.11 & -0.03\end{bmatrix}I$$

حساب معاملات الانحدار الخطي:

$$\widehat{B_N}=\begin{bmatrix}B_{N0}\\B_{N1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.64-0.4I & -0.12+0.11I\\-0.12+0.11I & 0.03-0.03I\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}38+6I\\215+49I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.08-11.59I\\1.86+3.17I\end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على معادلة الانحدار:

$$\widehat{Y_{Ni}}=(-1.08-11.59I)+(1.86+3.17I)X_{Ni} \qquad (*)$$

يمكن تحويل المعادلة السابقة باستخدام التحويل في التعريف (8.2) إلى الشكل:

$$\widehat{Y_{Ni}}=[-1.08,-12.67]+[1.86,5.03]X_{Ni} \qquad (**)$$

3.4. حساب القيم النيتروسوفية المتوقعة:

بتعويض قيم (X_{Ni}) النيتروسوفية، في المعادلة النيتروسوفية (*) نحصل على االقيم النيتروسوفية المتوقعة ونحسب البواقي النيتروسوفية، كما في الجدول الأتي:

Y_{Ni}	$\widehat{Y_{Ni}}$	$Y_{Ni}-\widehat{Y_{Ni}}$	$(Y_{Ni}-\widehat{Y_{Ni}})^2$
$1+2\,I$	$2.64-5.25\,I$	$-1.64+7.25\,I$	$2.69+28.79\,I$
$6+0\,I$	$6.36+6.12\,I$	$-0.36-6.12\,I$	$0.13+41.87\,I$
$2+0\,I$	$0.78-8.42\,I$	$1.22+8.42\,I$	$1.49+91.45\,I$
$10+3\,I$	$10.08+12.46\,I$	$-0.09-9.46\,I$	$0.01+91.01\,I$
$14+\ I$	$13.8+13.77\,I$	$0.2-12.77\,I$	$0.04+157.97\,I$
$5+0\,I$	$4.5-2.08\,I$	$0.5+2.08\,I$	$0.25+6.41\,I$
$\sum Y_{Ni}$	$\sum \widehat{Y_{Ni}}$	$\sum (Y_{Ni}-\widehat{Y_{Ni}})_i$	$\sum (Y_{Ni}-\widehat{Y_{Ni}})^2{}_i$
$38+6\,I$	$38.16+16.6\,I$	$-0.16-10.6\,I$	$4.61+417.47\,I$

نلاحظ من الجدول السابق أنه قمنا بحساب القيم النيتروسوفية المتوقعة $\widehat{Y_{Ni}}$ والبواقي النيتروسوفية المتوقعة $Y_{Ni}-\widehat{Y_{Ni}}$ ومربع البواقي النيتروسوفية المتوقعة $(Y_{Ni}-\widehat{Y_{Ni}})^2$.

4. خاتمة:

قمنا في هذه الدرسة بمايلي:

1- تم إيجاد معادلة الانحدار النيتروسوفي باستخدام المصوفات النيتروسوفية، وحساب القيم النيتروسوفية المتوقعة باستخدام المعادلة المستنتجة، وحساب البواقي النيتروسوفية، وقدمنا الأمثلة التي توضح صحة الدراسة.

2- تم البرهان على أن معادلة معاملات الانحدار النيتروسوفي هي تعميم لمعادلة معاملات الانحدار الكلاسيكي.

3- يمكن كتابة معادلة الانحدار النيتروسوفي بعدة أشكال، باستخدام التحويل الايزومورفيزمي (8.2) الذي يحول المعاملات إلى الشكل $[a,b]$، أوبالعكس باستخدام التحويل الإيزومورفيزمي (9.2) الذي يحول المعاملات إلى الشكل $a+bI$.

5. التوصيات:

1- استخدام المصفوفات النيتروسوفية في إيجاد معادلة الانحدار المتعدد.

2- استخدام المعادلة النيتروسوفية في إيجاد معامل التحديد وجدول التباين النيتروسوفي.

References

المراجع العربية:

1. سلامة، أحمد، خطيب، أحمد، الأسود، ملاذ، (2022م). أساسيات المصفوفات والمعادلات التفاضلية والهندسة في المجال النيتروسوفكي، جامعة نيومكسكو، الولايات المتحدة الامريكية.
2. رفيف، (2019م). صياغة الاحتمال الكلاسيكي وبعض التوزيعات الاحتمالية وفق منطق النيتروسوفك وتأثير ذلك على اتخاذ القرار، أطروحة دكتوراه، جامعة حلب.
3. فلورانتين، (2020م). مقدمة في الإحصاء النيوتروسوفكي، ترجمة هدى إسماعيل خالد الجميلي، أحمد خضر عيسى الجبوري، Brussels, Belgium،pons
4. شعراوي، سميرمصطفى، (2005م). مقدمة في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية -جدة.

المراجع الأجنبية:

5. F. Smarandache, (2014). introduction to Neutrosophic Statistics, New Mexico, USA.
6. F. Smarandache, (2024), Foundation of Appurtenance and Inclusion Equatione for Constructing the Operations of Neutrosophic Numbers Needed in Neutrosophic Statistics, NSWA, Vol.15, pp.17-32.
7. Gerd Bohlender, Ulrich Kulisch,Amathmatical, (2010), Basis An Interval Arithmetic Standard, Bularian Academy of Sciences Institute of Mathematics and Informatics, Serdica J. Computing Vol.4, pp: 29-42.
8. Khudr AL Kridi, Mohammed Taher Anan, Mohammed Zeina, (2018), New Approach to FM/FM/1 Queue and its Performance Measures, JKAU: Sci, vol.30Numbber (1), pp:71-75.
9. Ulrich W. Kulisch, (2008), Complete Arithmetic and its Implementation on the computer, Institut fur Angewandte und Numerische Mathematik Universitat Karlsruhe, vol. 54, pp1-15.
10. M. Abobala and A. Hatip, (2021), "An Algebraic Approach to Neutrosophic Euclidean Geometry", Neutrosophic Sets and Systems, vol. 43, pp.114-123.
11. M. B. Zeina, (2021), "Introduction to Neutrosophic Stochastic Processes", Neutrosophic Sets and Systems, vol.54, pp.170-183.
12. Said Broumi, Mohmed Talea, Assia Bakali, Florentin Smarandache, Quek Shio, Ganeshsree Selvachandran, (2019), Introduction of some new result on interval valued Neutrosophic graphs, Journal of Information and Optimization Sciences, vol.10 Jul.
13. W.B. Vasantha Kandasamy and F. Smarandache, (2006), Neutrosophic Rings، Hexis،Phoeni، Arizona. URL: http://fs.gallup.unm.edu/NeutrosophicRings.pdf.
14. A. A. A. Agboola and S.A.Aklinleye(2014). Neutrosophic Vector spaces، Int. J. Math. Comb. 4

15. A. A. A. Agboola، A. O. Akwu، and Y. T. Oyebo, (2012). Neutrosophic Groups and Neutrosophic Subgroups، Int. J. Math. Comb. 3، 1-9
16. A. A. A. Agboola، A. D. Akinola، and O. Y. Oyebola, (2011). Neutrosophic Rings I، Int. J. Math. Comb. 4 ،1-14.
17. F.Smarandache،(2003).AUnifying Field in Logics: Neutrosophic Logic، Neutrosophy، Neutrosophic Set، Neutrosophic Probability (3rd Ed.). American ResearchPress,Rehoboth. URL: http://fs.gallup.unm.edu/eBookNeutrosophic4.
18. W.B. Vasantha Kandasamy and F. Smarandache,(2006). Some Neutrosophic Algebraic Structures and Neutrosophic NAlgebraic Structures. Hexis، Phoenix، Arizona. URL: http://fs.gallup.unm.edu/NeutrosophicNAlgebraicStructures.
19. W.B. Vasantha Kandasamy and F. Smarandache، (2004). Basic Neutrosophic Algebraic Structures and Their Applications to Fuzzy and Neutrosophic Models. Hexis، Church Rock.
20. W.B. Vasantha Kandasamy and F. Smarandache(2006). Fuzzy Interval Matrices، Neutrosophic Interval Matrices and their Applications. Hexis، Phoenix، Arizona، 1-9.
21. Murhaf Riad Alabdullah, (2023). The Neutrosophic Regular and Most Important Properties that Bind Neutrosophic Ring Elements. Neutrosophic Sets and Systems, 61, 1-10.
22. M. R. Alabdullah, (2024). Neutrosophic Regular Rings and Properties of Their Ideals. Neutrosophic Sets and Systems, 70, 188-196.
23. Riad Alabdullah, M, (2023) ¨Some Special Refined Neutrosophic Ideals in Refined Neutrosophic Rings: A Proof-of-Concept,Study¨.Neutrosophic Systems With Applications, vol 13, pp 32–44. https://doi.org/10.61356/j.nswa.2024.96.

Neutrosophic Knowledge, Vol. 06, 2025
University of New Mexico

Article

المجموعة المادية النتروسوفية المتماسكة - مركز كتل مجموعة مادية نتروسوفية

Mountajab Al-Hasan[1] * , Ranim Fajer [2]

[1]Homs University, Mathematics Department, Homs, Syria; alhasanmountajab@gmail.com
[2]Homs University, Mathematics Department, Homs,Syria; ranimfajer6@gmail.com

* Correspondence: alhasanmountajab@gmail.com

Received: 11 21, 2024; *Accepted:* 01 04, 2025.

ملخص البحث: في البحث تم تعميم مركز كتل المجموعة المادية والمبرهنات الموافقة من المنطق التقليدي إلى المنطق النتروسوفي. بعدها تمت مناقشة المجموعة المادية النتروسوفية المتماسكة ومبرهنة متعلقة بها من وجهة نظر النتر وسوفيك.

الكلمات المفتاحية: المنطق النتروسوفي، مركز كتل مجموعة مادية النتروسوفية – المجنوعة المادية النتروسوفية المتماسكة.

مقدمة تاريخية: تم تعميم العديد من العلوم من المنطقين التقليدي والضبابي إلى المنطق النتروسوفي؛ من هذه العلوم علم الإحصاء، علم الاحتمال، علم الحياة، الأمثليات، علم الألوان، ... الخ، إذ أثبت هذا المنطق أنه من وجهة نظره تكون هذه العلوم أقرب إلى الواقع.

في [13 – 1] تم تعميم الطبولوجيا والهندسة بشكلها المتواضع من المنطق التقليدي إلى المنطق النتروسوفي. في [14] تم مناقشة الحركة المستوية النتروسوفية للنقطة المادية النتروسوفية. بعدها في [15] تمت مناقشة العناصر الحركية للنقطة المادية النتروسوفية، وفي [16] تمت مناقشة الجمل العطالية وفضاء الأحداث الغاليلية للميكانيك التقليدي وفق المنطق النتروسوفي، وفي [17] تمت مناقشة هندسة الكتل المجموعة المادية النتروسوفية.

طرق وأدوات البحث: سنناقش نتائج البحث معتمدين على الهندسة المتواضعة المقترحة في [13 – 1] ومعتمدين على التحويل الإيزومتري. وعلى نتائج الأبحاث .[14 – 17]

الدراسة والمناقشة:

من اجل متطلبات هذا البحث يلزمنا مايلي:

تعريف1:

ليكن: $\vec{V} = \vec{v}_1 + I\vec{v}_2 \quad , \quad \vec{U} = \vec{u}_1 + I\vec{u}_2$

– نقول عن المتجهين السابقين انهما متوازيان في $\mathbb{R}^3(I)$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \parallel (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \quad \text{و} \quad \vec{u}_1 \parallel \vec{v}_1$$

– كما نقول عن المتجهين السابقين انهما متعامدان في $\mathbb{R}^3(I)$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \perp (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \quad \text{و} \quad \vec{u}_1 \perp \vec{v}_1$$

إن علاقة التوازي السابقة تمثل لنا علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^3(I)$ ، وبالتالي فهي تملك صفوف تكافؤ، كل صف من هذه الصفوف يسمى متجهاً طليقاً نيترسوفياً.

مبرهنة1:

لتكن: $X^i = x_1^i + Ix_2^i$

حيث: $i = 1,2, \dots, n$ ، باستخدام طريقة الاستقراء الرياضي ، يمكن إثبات أن:

$$X^1.X^2 \dots X^n = x_1^1x_1^2 \dots x_1^n + I[(x_1^1 + x_2^1)(x_1^2 + x_2^2) \dots (x_1^n + x_2^n) \; - \; x_1^1x_1^2 \dots x_1^n]$$

الإثبات:

من أجل $n = 2$ لدينا:

$$X^1.X^2 = (x_1^1 + Ix_2^1)(x_1^2 + Ix_2^2) = x_1^1x_1^2 + I(x_1^1x_2^2 + x_2^1x_1^2 + x_2^1x_2^2) = x_1^1x_1^2 + I[(x_1^1 + x_2^1)(x_1^2 + x_2^2) - x_1^1x_1^2]$$

والعلاقة صحيحة من أجل $n = 2$. نفرض أن العلاقة السابقة محققة من أجل $n - 1$ أي أن:

$$X^1.X^2 \dots X^{n-1} = x_1^1x_1^2 \dots x_1^{n-1} + I[(x_1^1 + x_2^1)(x_1^2 + x_2^2) \dots (x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_1^1x_1^2 \dots x_1^{n-1}]$$

ولنثبت صحة العلاقة من أجل n . لدينا:

$$X^1.X^2 \dots \dots X^n = \{x_1^1x_1^2 \dots x_1^{n-1} + I[(x_1^1 + x_2^1)(x_1^2 + x_2^2) \dots (x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_1^1x_1^2 \dots x_1^{n-1}]\}(x_1^n + Ix_2^n)$$
$$\Rightarrow X^1.X^2 \dots X^n = x_1^1x_1^2 \dots x_1^n + I[(x_1^1 + x_2^1)(x_1^2 + x_2^2) \dots (x_1^n + x_2^n) - x_1^1x_1^2 \dots x_1^n]$$

والعلاقة محققة من أجل n. مما تقدم نجد ان العلاقة محققة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أويساوي الـ 2.

ملاحظة1: يبقى الكلام السابق صحيحاً حتى لو كان الضرب مابين اعداد نتروسوفية ومتجهات نتروسوفية.

مثال: إذا كان:

$$X = x_1 + Ix_2$$

و

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + I\vec{A}_2$$

عندئذٍ:

$$X\vec{A} = x_1\vec{A}_1 + I\left(x_2\vec{A}_1 + x_1\vec{A}_2 + x_2\vec{A}_2\right) = x_1\vec{A}_1 + I\left[(x_1 + x_2)\left(\vec{A}_1 + \vec{A}_2\right) - x_1\vec{A}_1\right] \quad (1)$$

مبرهنة2:

لتكن $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ ثلاث متجهات واحدة تقليدية من $\mathbb{R}^3$ بحيث تشكل الثلاثية $\left(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\right)$ قاعدة متعامدة منظمة ومباشرة في $\mathbb{R}^3$ ، ولتكن $\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$ ثلاث متجهات واحدة تقليدية من $\mathbb{R}^3$ مختارة بالشكل التالي: $\vec{i}_2 = \vec{j}_1, \vec{j}_2 = \vec{k}_1, \vec{k}_2 = \vec{i}_1$. عندئذ المتجهات النتروسوفية $\left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ المعينة بالشكل:

$$\vec{I} = \vec{i}_1 + I\left(\vec{i}_2 - \vec{i}_1\right), \vec{J} = \vec{j}_1 + I\left(\vec{j}_2 - \vec{j}_1\right), \vec{K} = \vec{k}_1 + I\left(\vec{k}_2 - \vec{k}_1\right) \quad (2)$$

تشكل قاعدة متعامدة منظمة ومباشرة للفضاء الإقليدي النتروسوفي ثلاثي الأبعاد $\mathbb{R}^3(I)$.

البرهان:

من جهة أولى، بعد إجراء الحساب يمكن ملاحظة أن: $\vec{I}.\vec{I} = \vec{J}.\vec{J} = \vec{K}.\vec{K} = 1, \vec{I}.\vec{J} = \vec{I}.\vec{K} = \vec{J}.\vec{K} = 0$ ، مما يعني أن الثلاثية $\left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ تشكل قاعدة متعامدة منظمة للفضاء الإقليدي النتروسوفي ثلاثي الأبعاد $\mathbb{R}^3(I)$. إضافةً إلى ما تقدم ذكره، بعد عدة عمليات حسابية، نجد أن:

$$\vec{I}\wedge\vec{J} = \vec{K}, \vec{J}\wedge\vec{K} = \vec{I}, \vec{K}\wedge\vec{I} = \vec{J} \text{ and } \vec{J}\wedge\vec{I} = -\vec{K}, \vec{K}\wedge\vec{J} = -\vec{I}, ,\vec{I}\wedge\vec{K} = -\vec{J}$$

أي أن الثلاثية $\left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ مباشرة. بذلك يكون قد تم البرهان.

مبرهنة3:

ليكن لدينا الفضاء الإقليدي النتروسوفي ثلاثي البعد $\mathbb{R}^3(I)$ ذي المبدأ O حيث $O = O_1 + IO_2$ والقاعدة $\left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ المعينة بالعلاقة (2)،

ولتكن لدينا النقطتان النتروسوفيتان: $A(X^A, Y^A, Z^A)$ و $B(X^B, Y^B, Z^B)$ ، حيث:

$$X^A = x_1^A + Ix_2^A$$

$$Y^A = y_1^A + Iy_2^A$$

$$Z^A = z_1^A + Iz_2^A$$

و

$$X^B = x_1^B + Ix_2^B$$

$$Y^B = y_1^B + Iy_2^B$$
$$Z^B = z_1^B + Iz_2^B$$

ولنضع: $A_1(x_1^A, y_1^A, z_1^A)$ و $A_2(x_2^A, y_2^A, z_2^A)$ و $\acute{A} = A_1 + A_2 = (x_1^A + x_2^A, y_1^A + y_2^A, z_1^A + z_2^A)$

و $B_1(x_1^B, y_1^B, z_1^B)$ و $B_2(x_2^B, y_2^B, z_2^B)$ و $\acute{B} = B_1 + B_2 = (x_1^B + x_2^B, y_1^B + y_2^B, z_1^B + z_2^B)$

ولنضع أيضاً: $\overrightarrow{A_1B_1} = (x_1^B - x_1^A)\,\overrightarrow{\imath_1} + (y_1^B - y_1^A)\,\overrightarrow{\jmath_1} + (z_1^B - z_1^A)\,\overrightarrow{k_1}$,

و $\overrightarrow{\acute{A}\acute{B}} = \left(x_1^B + x_2^B - (x_1^A + x_2^A)\right)\,\overrightarrow{\imath_2} + \left(y_1^B + y_2^B - (y_1^A + y_2^A)\right)\,\overrightarrow{\jmath_2} + \left(z_1^B + z_2^B - (z_1^A + z_2^A)\right)\,\overrightarrow{k_2}$

عندئذٍ تتحقق العلاقة الآتية:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + I\left(\overrightarrow{\acute{A}\acute{B}} - \overrightarrow{A_1B_1}\right) \tag{3}$$

الإثبات:

بما أن الفضاء الإقليدي النتروسوفي ثلاثي البعد $\mathbb{R}^3(I)$ هو فضاء أفيني [16]، بالتالي تتحقق علاقة شال التالية بالمعنى النتروسوفي:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

ومنه لدينا:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} &= (X^B - X^A)\vec{I} + (Y^B - Y^A)\vec{J} + (Z^B - Z^A)\vec{K} \\
&= [(x_1^B - x_1^A) + I(x_2^B - x_2^A)][\overrightarrow{\imath_1} + I(\overrightarrow{\imath_2} - \overrightarrow{\imath_1})] \\
&+ [(y_1^B - y_1^A) + I(y_2^B - y_2^A)][\overrightarrow{\jmath_1} + I(\overrightarrow{\jmath_2} - \overrightarrow{\jmath_1})] \\
&+ [(z_1^B - z_1^A) + I(z_2^B - z_2^A)]\left[\overrightarrow{k_1} + I\left(\overrightarrow{k_2} - \overrightarrow{k_1}\right)\right] \\
&= (x_1^B - x_1^A)\overrightarrow{\imath_1} + I[(x_1^B - x_1^A + x_2^B - x_2^A)(\overrightarrow{\imath_1} + \overrightarrow{\imath_2} - \overrightarrow{\imath_1}) - (x_1^B - x_1^A)\overrightarrow{\imath_1}] \\
&+ (y_1^B - y_1^A)\overrightarrow{\jmath_1}
\end{aligned}$$
$$+I[(y_1^B - y_1^A + y_2^B - y_2^A)(\overrightarrow{\jmath_1} + \overrightarrow{\jmath_2} - \overrightarrow{\jmath_1}) - (y_1^B - y_1^A)\overrightarrow{\imath_1}] + (z_1^B - z_1^A)\overrightarrow{k_1}$$
$$+I\left[(z_1^B - z_1^A + z_2^B - z_2^A)\left(\overrightarrow{k_1} + \overrightarrow{k_2} - \overrightarrow{k_1}\right) - (z_1^B - z_1^A)\overrightarrow{k_1}\right] = \overrightarrow{A_1B_1} + I\left(\overrightarrow{\acute{A}\acute{B}} - \overrightarrow{A_1B_1}\right)$$

وهو المطلوب.

تعريف2:

لتكن لدينا المجموعة المادية النتروسوفية [17]:

$$S = \{(M^1, m^1), (M^2, m^2), \dots, (M^n, m^n)\}$$

حيث M^i الموضع النتروسوفي الهندسي و m^i الكتلة النتروسوفية للنقطة المادية النتروسوفية (M^i, m^i) و $i = 1,2, \dots, n$.

نسمي النقطة الهندسية النتروسوفية C التي تحقق الشرط:

$$m^1\overrightarrow{CM^1}+m^2\overrightarrow{CM^2}+\cdots+m^n\overrightarrow{CM^n}=\vec{0} \qquad (4)$$

نسميها بمركز الكتل النتروسوفي للمجموعة المادية النتروسوفية S.

نتيجة1:

إن مركز الكتل النتروسوفي C يحقق العلاقة النتروسوفية الآتية:

$$\overrightarrow{OC}=\frac{m^1\overrightarrow{OM^1}+m^2\overrightarrow{OM^2}+\cdots+m^n\overrightarrow{OM^n}}{m^1+m^2+\cdots+m^n} \qquad (5)$$

الإثبات:

في العلاقة (4) باستخدام علاقة شال:

$$\overrightarrow{CM^i}=\overrightarrow{OM^i}-\overrightarrow{OC}$$

نحصل على:

$$m^1\left(\overrightarrow{OM^1}-\overrightarrow{OC}\right)+m^2\left(\overrightarrow{OM^2}-\overrightarrow{OC}\right)+\cdots+m^n\left(\overrightarrow{OM^n}-\overrightarrow{OC}\right)=\vec{0}$$

أو

$$m^1\overrightarrow{OM^1}+m^2\overrightarrow{OM^2}+\cdots+m^n\overrightarrow{OM^n}-(m^1+m^2+\cdots+m^n)\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

وبالتالي نحصل على:

$$\overrightarrow{OC}=\frac{m^1\overrightarrow{OM^1}+m^2\overrightarrow{OM^2}+\cdots+m^n\overrightarrow{OM^n}}{m^1+m^2+\cdots+m^n}$$

نتيجة 2: لنعتبر جملة المقارنة الديكارتية النتروسوفية $OXYZ$ ذات المبدأ O والقاعدة المتعامدة المنظمة والمباشرة $(\vec{I}\,,\vec{J},\vec{K})$ ، المعينة بحسب العلاقات (2) ،ولنفرض أن: $C(X^C,Y^C,Z^C)$, $M^i(X^i,Y^i,Z^i)$ حيث:

$$X^i=x_1^i+Ix_2^i$$
$$Y^i=y_1^i+Iy_2^i$$
$$Z^i=z_1^i+Iz_2^i$$
$$m^i=m_1^i+Im_2^i$$

و

$$X^C=x_1^C+Ix_2^C$$

$$Y^C=y_1^C+Iy_2^C$$
$$Z^C=z_1^C+Iz_2^C$$

عندئذٍ لدينا:

1- بالإسقاط على المحور النتروسوفي OX نجد:

$$X^C = \frac{m^1X^1+m^2X^2+\cdots+m^nX^n}{m^1+m^2+\cdots+m^n} \quad \text{(a)}$$

2- بالإسقاط على المحور النتروسوفي OY نجد:

$$Y^C = \frac{m^1Y^1+m^2Y^2+\cdots+m^nY^n}{m^1+m^2+\cdots+m^n} \quad \text{(b)}$$

3- بالإسقاط على المحور النتروسوفي OZ نجد:

(c)

$$Z^C = \frac{m^1Z^1+m^2Z^2+\cdots+m^nZ^n}{m^1+m^2+\cdots+m^n}$$

ومنه المبرهنة الآتية:

مبرهنة4:

إن مركز الكتل: $C = C_1 + IC_2$ للمجموعة المادية S يكافئ مركزي كتل تقليديين؛ الأول C_1 في الفراغ الاقليدي التقليدي $\mathbb{R}^3$ ذي المبدأ O_1 والقاعدة $\left(\overrightarrow{\iota_1}, \overrightarrow{J_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$ والثاني $\acute{C} = C_1 + C_2$ في الفراغ الاقليدي التقليدي $\mathbb{R}^3$ ذي المبدأ $\acute{O} = O_1 + O_2$ والقاعدة $\left(\overrightarrow{\iota_2}, \overrightarrow{J_2}, \overrightarrow{k_2}\right)$.

الإثبات:

بحسب تعريف مركز الكتل النتروسوفي لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n} m^i\, \overrightarrow{C\, M^\iota} = \vec{0} \quad (6)$$

حيث: $m^i = m_1^i + Im_2^i$.

وبحسب العلاقة (3) من المبرهنة3 يكون لدينا:

$$\overrightarrow{C\, M^\iota} = \overrightarrow{C_1 M_1^i} + I\left(\overrightarrow{\acute{C}\, \acute{M}^\iota} - \overrightarrow{C_1 M_1^i}\right)$$

مع العلم بأن: $i = 1,2,3,..,n$ و $\acute{M}^\iota = M_1^i + M_2^i = \left(x_1^i + x_2^i, y_1^i + y_2^i, z_1^i + z_2^i\right)$.

بإجراء التعويض المناسب، نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(m_1^i + Im_2^i\right)\left[\overrightarrow{C_1 M_1^i} + I\left(\overrightarrow{\acute{C}\, \acute{M}^\iota} - \overrightarrow{C_1 M_1^i}\right)\right]\right\} = \vec{0}$$

ومنه:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(m_1^i\overrightarrow{C_1M_1^i}+I\left[\left(m_1^i+m_2^i\right)\left(\overrightarrow{C_1M_1^i}+\overrightarrow{\acute{C}\,\acute{M}^\imath}-\overrightarrow{C_1M_1^i}-m_1^i\overrightarrow{C_1M_1^i}\right)\right]\right)\right\}=\vec{0}$$

ومنه:

$$\sum_{i=1}^{n}m_1^i\overrightarrow{C_1M_1^i}+I\left[\sum_{i=1}^{n}\left(m_1^i+m_2^i\right)\left(\overrightarrow{\acute{C}\,\acute{M}^\imath}\right)-\sum_{i=1}^{n}m_1^i\overrightarrow{C_1M_1^i}\right]=\vec{0}$$

أي:

$$\sum_{i=1}^{n}m_1^i\overrightarrow{C_1M_1^i}=\vec{0}$$

و

$$\sum_{i=1}^{n}\left(m_1^i+m_2^i\right)\left(\overrightarrow{\acute{C}\,\acute{M}^\imath}\right)-\sum_{i=1}^{n}m_1^i\overrightarrow{C_1M_1^i}+\sum_{i=1}^{n}m_1^i\overrightarrow{C_1M_1^i}=\vec{0}$$

وبالتالي:

$$\sum_{i=1}^{n}m_1^i\overrightarrow{C_1M_1^i}=\vec{0} \qquad (7)$$

و

$$\sum_{i=1}^{n}\left(m_1^i+m_2^i\right)\left(\overrightarrow{\acute{C}\,\acute{M}^\imath}\right)=\vec{0} \qquad (8)$$

إن العلاقة (7) تعني أن C_1 هو مركز كتل مجموعة النقاط المادية التقليدية: $M_1^1,M_1^2,M_1^3\dots,M_1^n$ ، التي كتلها على الترتيب: $m_1^1,m_1^2,\dots,m_1^n$ وذلك في الفضاء الإقليدي التقليدي $\mathbb{R}^3$ ذي المبدأ O_1 والقاعدة $\left(\overrightarrow{\imath_1},\overrightarrow{\jmath_1},\overrightarrow{k_1}\right)$ ، أما (8) فتعني أن $\acute{C}$ مركز كتل مجموعة النقاط المادية التقليدية: $\acute{M}^\imath,\ \acute{M}^2,\dots,\ \acute{M}^n$ ، التي كتلها على الترتيب: $m_1^1+m_2^1\,,m_1^2+m_2^2\,,\dots,\ m_1^n+m_2^n$ وذلك في الفضاء الإقليدي التقليدي$\mathbb{R}^3$ ذي المبدأ $\acute{O}=O_1+O_2$ والقاعدة: $\left(\overrightarrow{\imath_2}\ ,\ \overrightarrow{\jmath_2}\ ,\overrightarrow{k_2}\right)$. بذلك يكون قد اكتمل البرهان.

من أجل متطلبات الفقرة القادمة، يلزمنا التعريف التالي [14]:

تعريف3:

1) لتكن لدينا الدالة حقيقية نتروسوفية $f(t)$ ، التي تتبع للزمن النتروسوفي $t=t_1+It_2$ [14] ، ولنضع $\acute{t}=t_1+t_2$. عندئذٍ نسمي:

$$\dot{f}(t) \equiv \frac{df}{d\,t}(t) = \frac{df}{dt_1}(t_1) + I\left[\frac{df}{d\acute{t}}(\acute{t}) - \frac{df}{dt_1}(t_1)\right] \quad (9)$$

بالمشتق النتروسوفي للدالة f بالنسبة للزمن النتروسوفي t .

2) إذا كانت $\vec{f}(t) = \vec{f}_1(t) + I\ \vec{f}_2(t)$ دالة متجهية نتروسوفية، فإننا نسمي:

$$\dot{\vec{f}}(t) \equiv \frac{d\,\vec{f}}{d\,t}(t) = \frac{d\,\vec{f}_1}{d\,t_1}(t_1) + I\,[\frac{d\,(\vec{f}_1 + \vec{f}_2)}{d\,t'}(t') - \frac{d\,\vec{f}_1}{d\,t_1}(t_1)\ ] \quad (10)$$

بالمشتق النتروسوفي للدالة المتجهية $\vec{f}$ النسبة للزمن النتروسوفي t .

نتيجة3

إذا كان النظام الاحداثي النتروسوفي الديكارتي $[\ O = O_1 + I\,O_2\ ,\ (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})\ ]$ ، المعطر بـ (2) ، عطالياً [16]، فإنه عندئذ يكون:

$\dot{\vec{I}} = \dot{\vec{J}} = \dot{\vec{K}} = \vec{0} = \vec{0} + I\,\vec{0}$.

تعريف4 (المجموعة المادية النتروسوفية المتماسكة):

لنأخذ النظام الإحداثي النتروسوفي الديكارتي العطالي$OXYZ$ [16] ، ذي المبدأ O والقاعدة $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ ، المعينة وفق العلاقات (2)،

ولتكن لدينا أيضاً المجموعة المادية النتروسوفية:

$$S = \{[M^1(X^1, Y^1, Z^1), m^1], [M^2(X^2, Y^2, Z^2), m^2], \dots, [M^n(X^n, Y^n, Z^n, m^n)]\}$$

حيث:

$$X^i = x_1^i + Ix_2^i$$
$$Y^i = y_1^i + Iy_2^i$$
$$Z^i = z_1^i + Iz_2^i$$
$$m^i = m_1^i + Im_2^i$$

وحيث: $i = 1,2, \dots, n$.

نقول أن المجموعة المادية النتروسوفية السابقة متماسكة إذا وفقط إذا بقي البعد النتروسوفي ما بين أي نقطتين ماديتين نتروسوفيتين منها ثابتاً بمرور الزمن النتروسوفي: $t = t_1 + It_2$. ومنه المبرهنة الآتية:

مبرهنة5:

إذا كانت S مجموعة مادية نتروسوفية منسوبة لجملة المقارنة العطالية المكورة أعلاه، عندئذٍ الشرط اللازم والكافي حتى تكوم هذه المجموعة المادية متماسكة هو أن يتحقق الشرط الآتي:

$$\vec{V}_{M_2}.\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{V}_{M_1}.\overrightarrow{M_1M_2}\ ;\ \forall M_1, M_2 \in S$$

الإثبات:

لزوم الشرط:

نفرض أن المجموعة المادية النتروسوفية S متماسكة ولنثبت تحقق الشرط. لهذا الغرض نأخذ M_1 و M_2 نقطتان ماديتان نتروسوفيتان لاعلى التعيين

من S ، عندئذٍ يكون:

$$\overrightarrow{M_1M_2}^{\,2} = C = c_1 + Ic_2$$

حيث: $\overrightarrow{M_1M_2}^{\,2} = \overrightarrow{M_1M_2}\,.\overrightarrow{M_1M_2}$. باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن النتروسوفي: $t = t_1 + It_2$ ، يكون لدينا:

$$2\,\overrightarrow{M_1M_2}\,.\frac{d\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right)}{dt} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2}\,.\frac{d\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right)}{dt} = 0 \qquad (11)$$

لكن بحسب علاقة شال النتروسوفية يكون:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \qquad (12)$$

نعوض (12) في (11) ، فنجد:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\,.\frac{d\left(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}\right)}{dt} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}\,.\left(\vec{V}_{M_2} - \vec{V}_{M_1}\right) = 0 \Longrightarrow \vec{V}_{M_2}.\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{V}_{M_1}.\overrightarrow{M_1M_2}$$

والشرط محقق.

كفاية الشرط: نفرض أن الشرط محقق ولنثبت أن المجموعة المادية النتروسوفية S متماسكة.

لهذا الغرض لتكن $M_1, M_2 \in S$ نقطتان ماديتان نتروسوفيتان اختياريتان من S ، فبحسب الشرط يكون:

$$\begin{aligned}
&\vec{V}_{M_2}.\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{V}_{M_1}.\overrightarrow{M_1M_2} \Longrightarrow \vec{V}_{M_2}.\overrightarrow{M_1M_2} - \vec{V}_{M_1}.\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}.\left(\vec{V}_{M_2} - \vec{V}_{M_1}\right)\\
&\Longrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}\,.\left(\frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt}\right) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}\,.\frac{d\left(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}\right)}{dt} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}\,.\frac{d\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right)}{dt}\\
&= 0 \Longrightarrow \frac{d\left(\overrightarrow{M_1M_2}^{\,2}\right)}{dt} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}^{\,2} = C = c_1 + Ic_2
\end{aligned}$$

والمجموعة المادية النتروسوفية متماسكة.

النتائج والمقترحات:

1- في البحث تمت مناقشة مركز كتل مجموعة مادية نتروسوفية وبعض المبرهنات المتعلقة بها. كما تمت مناقشة المجموعة المادية النتروسوفية المتماسكة والمبرهنات المتعلقة بها.

2- **التوصيات:** نوصي بمناقشة مايلي:

a) مناقشة مبرهنتي هويجنز الأولى والثانية المتعلقتين بعزوم وجداءات عطالة مجموعة مادية نتروسوفية.

b) مناقشة المجموعة المادية النتروسوفية المتماسكة، المتحركة حركة انسحابيه والمبرهنات المتعلقة بذلك.

c) مناقشة الحركة الدورانية للجسم القاسي النتروسوفي حول محور ثابت منه والمبرهنات المتعلقة بذلك.

References

[1] F .Smarandache. "Introduction to Neutrosophic statistics", Sitech-Education Publisher, PP:34-44. 2014.

[2] F .Smarandache. "Finite Neutrosophic Complex Numbers, by W. B. Vasantha Kandasamy". Zip pubulsher, Columbus, Ohio, USA, PP1-16, 2011.

[3] Y. Alhasan., "Concepts of Neutrosophic Complex Numbers", International Journal of Neutrosophic Science, Vol.8, 9-18, 2020.

[4] R. Alhamido, M.Ismail, F .Smarandache; "The Polar form of a Neutrosophic Complex Number", International Journal of Neutrosophic Science, Vol.10, 36-44, 2020.

[5] A. A Salama; Hewayda Elghawalby; M.S, Dabash; A.M. NASR, "Retrac Neutrosophic Crisp System For Gray Scale Image", Asian Journal Of Mathematics and Computer Research, Vol 24, 104-117, (2018).

[6] F. smarandache. "Neutrosophy and Neutrosophic Logic, First International Conference on Neutrosophy, neutrosophic Logic, Set, Probability, and Statistics", University of New Mexico, Gallup, NM87301, USA 2002.

[7] M. Abdel-Basset; E. Mai. Mohamed; C. Francisco; H. Z. Abd EL-Nasser. "Cosine similarity measures of bipolar neutrosophic set for diagnosis of bipolar disorder diseases", Artificial Intelligence in Medicine Vol. 101, 101735, (2019).

[8] M. Abdel-Basset; E. Mohamed; G. Abdullah; and S. Florentin. "A novel model for evaluation Hospital medical care systems based on plithogenic sets", Artificial Intelligence in Medicine 100 (2019), 101710.

[9] M. Abdel-Basset; G. Gunasekaran Mohamed; G. Abdullah. C. Victor, "A Novel Intelligent Medical Decision Support Model Based on soft Computing and Iot", IEEE Internet of Things Journal, Vol. 7, (2019).

[10] M. Abobala, Ahmad Hatip."An Algebraic Approach Neutrosophic Euclidean Geometry ", Neutrosophic Sets and Systems, Vol 43, (2021).

[11] A. A Salama. "Basic Structure of Some Classes of Neutrosophic Crisp Nearly Open Sets and Possible Application to GIS Topology".Neutrosophic Sets and Systems,Vol.7,18-22, (2015).

[12] A. A Salama; F. Smarandache. "Neutrosophic Set Theory", Neutrosophic Sets and Systems,Vol. 5, 1-9, (2014).

[13] F. Smarandache, "The Neutrosophic Triplet Group and its Application to physics", Seminar Universidad National de Quilmes, Department of science and Technology, Beunos Aires, Argentina, 20 June 2014.

[14] M. Al-Hasan, M.F. Alaswad " A Study of the Movement of a Neutrosophic Material Point in the Neutrosophic Plane by Using a Neutrosophic AH-Isometry ", Prospects for Applied Mathimatics and data Analysis (PAMDA), Vol. 02, No. 01, PP. 08-18, 2023.

[15] M. Al-Hasan, A.Alkhabour " The Kinetic Elements of the Material Point in its Plane Motion from the View of Neutrosophic Logic ", Iraq Al-Khwarizmi Journal, Vol. 08, No. 02, Accepted for Publication. 07-02, 2024.

[16] R.Fajer, M.Al-Hasan, and M. Makhlouf ." The Geometric Meaning of Traditional Inertial Frames According to Neutrosophical Logic ", Neutrosophic Knowledge, Vol. 05,1-8,2024, University of New Mexico.

[17] M.Al-Hasan ,R. Fajer, M. Makhlouf , and Younis Alsultan." Geometry of masses of material sets from the point of view of the neutrosophic logic ", Neutrosophic Knowledge, Vol. 05,68-76,76-2024, University of New Mexico.

Neutrosophic Knowledge, Vol. 06, 2025
University of New Mexico

Article

Invertible Neutrosophic Functions on Neutrosophic Set Theory of Three Types

Adel Al-Odhari [1, 2] *

[1] Faculty of Education, Humanities and Applied Sciences (Khawlan), Yemen;
[2] Department of Foundations of Sciences, Faculty of Engineering, Sana'a University. Box:13509, Sana'a, Yemen; a.aleidhri@su.edu.ye.

* Correspondence: a.aleidhri@su.edu.ye.

Received: 01 18, 2025; *Accepted:* 01 26, 2025.

Abstract:

The aim of this paper is to present the reasons or arguments for believing that the transformation from classical set theory into neutrosophic set theory may be possible for the neutrosophic set of three types. For this reason, I present the invertible neutrosophic function, Bijective Neutrosophic function, Neutrosophic Image, investigate some examples, and prove theorems.

Keywords: Neutrosophic sets $H_i^t[I], i = 1,2,3$;Inverse Neutrosophic Function on $H_i^t[I]$; Bijective Neutrosophic function on $H_i^t[I]$; Neutrosophic Image; Properties of Neutrosophic Function on $H_i^t[I]$.

1. Introduction

This paper is about invertible neutrosophic functions on neutrosophic sets of three types with their properties. I will try by the sequence of humble contributions to continue our work in [3,5,6,7,9]. The aim of our work is to present the reasons or arguments for believing that the transformation from classical set theory into neutrosophic set theory may be possible for the neutrosophic set of three types. Of course, if this goal is achieved, we will be able to build mathematical systems that follow the new neutrosophic system depend on neutrosophic set of three types, such as: neutrosophic graph of three neutrosophic set of three types, neutrosophic topology of three neutrosophic set of three types, and so on. The indeterminacy concept arises from our world itself is indeterminate and lack of knowledge that requires a judgment, it is a type of thinking that takes a middle-term value between two extreme values, for instance, The Mu'tazilite Mental School of Islamic Thought, from a theological perspective. In 1921 Jan Lukasiewicz was proposed a third truth value indeterminacy, to treat "future contingent" sentences in [11,12]. The extension of the indeterminacy concept by Smarandache linked with the neutrosophic set as an extension of fuzzy set / intuitionistic fuzzy. It is depending on the concept of neutrality which means everything between the opposites $\langle A\rangle$ and $\langle antiA\rangle$ there is a $\langle neutA\rangle$ see for instance [16-19]. Finally, this work coincides with others that focus on creating a neutrosophic group theory of a neutrosophic set of three types in [2,4,10], and a neutrosophic linear algebra theory in[1,8]. With concerning the classical set theory, I refer to [13,14,20].

2. Invertible Neutrosophic Functions on Neutrosophic Sets of Three Types

In this section, we investigate the invertible neutrosophic function on neutrosophic set of three types with their properties.

Definition 1.2. Let $f_n^i: X_i^t[I] \mapsto Y_i^t[I]$ be the neutrosophic function of three types, where, f_n^i generated by a classical function $f_c: X \mapsto Y$, $X_i^t[I]$, and $Y_i^t[I]$ are genarted by a classical set. X and Y, we say that f_n^i is a neutrosophic invertible, if ${f_n^i}^{-1}: Y_i^t[I] \mapsto X_i^t[I]$is a neutrosophic function, and it's called the invertible neutrosophic function of f_n^i.

Observation. $\langle x, y\rangle \in f_n^i \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in {f_n^i}^{-1}$ and $f_n^i(I) = I \Leftrightarrow {f_n^i}^{-1}(I) = I$.

Theorem 1.2. If $f_n^i: X_i^t[I] \mapsto Y_i^t[I]$ is a neutrosophic function of three types, then ${f_n^i}^{-1}: Y_i^t[I] \mapsto X_i^t[I]$

May be a neutrosophic function or non neutrosophic function, and vice versa.

Proof. By counter example. Let $X_1^t[I] = \begin{Bmatrix} 1+1I, 1+2I, \\ 2+1I, 2+2I, \end{Bmatrix}$ be a neutrosophic set of type-1, and

$Y_1^t[I] = \{-1-1I\}$. Define $f_n^1(1+1I) = f_n^1(1+2I) = f_n^1(2+1I) = f_n^1(2+2I) = -1-1I$

It is clear that $f_n^1: X_1^t[I] \mapsto Y_1^t[I]$ is a neutrosophic function, and it's known that the constant neutrosophic function, but ${f_n^1}^{-1}: Y_1^t[I] \mapsto X_1^t[I]$ is not neutrosophic function. Also, if $f_n^1: Y_1^t[I] \mapsto X_1^t[I]$, where $f_n^1(-1-1I) = 1+1I, f_n^1(-1-1I) = 1+2I$ $f_n^1(-1-1I) = 2+1I, and\, f_n^1(-1-1I) = 2+2I$, we see that f_n^1 is not neutrosophic function, while ${f_n^1}^{-1}: X_1^t[I] \mapsto Y_1^t[I]$ is a neutrosophic function. The following theorem give us the necessary and sufficient condition for existence the inverse neutrosophic function for any neutrosophic function.

Theorem 2.2. Let $f_n^i: X_i^t[I] \mapsto Y_i^t[I]$ be the neutrosophic function of three types, then f_n^i is an invertible neutrosophic function **iff** $f_n^i: X_i^t[I] \mapsto Y_i^t[I]$ is a neutrosophic bijective function.

Proof. Let $f_n^i: X_i^t[I] \mapsto Y_i^t[I]$ be a neutrosophic invertible function, that is ${f_n^i}^{-1}: Y_i^t[I] \mapsto X_i^t[I]$, we want to show that $f_n^i: X_i^t[I] \mapsto Y_i^t[I]$ is a bijective neutrosophic function.

Suppose that $x, z \in X_i^t[I]$ such that $f_n^i(x) = f_n^i(z)$. Consider $f_n^i(x) = f_n^i(z) = y$, we have

$(\langle x, y\rangle \in f_n^i) \wedge (\langle z, y\rangle \in f_n^i) \Leftrightarrow \left(\langle y, x\rangle \in {f_n^i}^{-1}\right) \wedge \left(\langle y, z\rangle \in {f_n^i}^{-1}\right)$, since ${f_n^i}^{-1}$ is a neutrosophic function,

$\Rightarrow y = z$. Therefore f_n^i a neutrosophic injective function.

Second, assume that $y \in Y_i^t[I]$, and ${f_n^i}^{-1}: Y_i^t[I] \mapsto X_i^t[I]$ is a neutrosophic function, so

$\Rightarrow \exists x \in X_i^t[I]$ such that $\langle y, x\rangle \in {f_n^i}^{-1}$

$\Rightarrow \exists x \in X_i^t[I]$ such that $\langle x, y\rangle \in f_n^i$

$\Rightarrow \exists x \in X_i^t[I]$ such that $f_n^i(x) = y$

$\Rightarrow f_n^i$ is a neutrosophic surjective function.

$\Rightarrow f_n^i$ is a neutrosophic bijective (one-to-one onto) function. Conversely, Suppose that

$f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto Y_i^t[I]$ is a neutrosophic bijective function, we need to show that $f_n^{i^{-1}}: Y_i^t[I] \longmapsto X_i^t[I]$ is neutrosophic inverse function, Suppose that $y \in Y_i^t[I]$, but $f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto Y_i^t[I]$ (bijective)
$\Rightarrow \exists x \in X_i^t[I]$ such that $f_n^i(x) = y$
$\Rightarrow \exists x \in X_i^t[I]$ such that $\langle x, y\rangle \in f_n^i$
$\Rightarrow \exists x \in X_i^t[I]$ such that $\langle y, x\rangle \in f_n^{i^{-1}}$
$\Rightarrow$ $NeuDom\left(f_n^{i^{-1}}\right) = Y_i^t[I]$. Now, suppose that $\left(\langle y, x\rangle \in f_n^{i^{-1}}\right) \wedge \left(\langle y, z\rangle \in f_n^{i^{-1}}\right)$,
$\Rightarrow (\langle x, y\rangle \in f_n^i) \wedge (\langle z, y\rangle \in f_n^i)$
$\Rightarrow (f_n^i(x) = y) \wedge (f_n^i(z) = y)$
$\Rightarrow f_n^i(x) = f_n^i(z)$
$\Rightarrow x = \text{z}$, since $f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto Y_i^t[I]$ is a neutrosophic bijective function,
$\Rightarrow f_n^{i^{-1}}: Y_i^t[I] \longmapsto X_i^t[I]$ is a neutrosophic function.

Theorem 3.2. Let $f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto Y_i^t[I]$ be a neutrosophic function of three types. If f_n^i is an invertible function, then $f_n^{i^{-1}}: Y_i^t[I] \longmapsto X_i^t[I]$ is a neutrosophic bijective function.
Proof. Let $f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto Y_i^t[I]$ be a neutrosophic is invertible function, then $f_n^{i^{-1}}: Y_i^t[I] \longmapsto X_i^t[I]$ is a neutrosophic function by definition 1.2. Suppose that $y, z \in Y_i^t[I]$ such that $f_n^{i^{-1}}(y) = f_n^{i^{-1}}(z) = x$
$\Rightarrow \left(\langle y, x\rangle \in f_n^{i^{-1}}\right) \wedge \left(\langle z, x\rangle \in f_n^{i^{-1}}\right)$
$\Rightarrow (\langle x, y\rangle \in f_n^i) \wedge (\langle x, z\rangle \in f_n^i)$
$\Rightarrow (f_n^i(x) = y) \wedge (f_n^i(x) = z)$
$\Rightarrow y = z \Rightarrow f_n^{i^{-1}}$ is a neutrosophic injective (one-to-one) function. Also, suppose that $x \in X_i^t[I]$.
Since, $f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto Y_i^t[I]$ is a neutrosophic function.
$\Rightarrow \exists y \in Y_i^t[I]$ such that $f_n^i(x) = y$
$\Rightarrow \exists y \in Y_i^t[I]$ such that $\langle x, y\rangle \in f_n^i$
$\Rightarrow \exists y \in Y_i^t[I]$ such that $\langle y, x\rangle \in f_n^{i^{-1}}$
$\Rightarrow \exists y \in Y_i^t[I]$ such that $f_n^{i^{-1}}(y) = x$
$\Rightarrow f_n^{i^{-1}}$ is a neutrosophic surjective (onto) function
$\Rightarrow f_n^{i^{-1}}$ is a neutrosophic bijective (one-to-one +onto) function.

Theorem 4.2. Let $f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto Y_i^t[I]$ be an invertible neutrosophic function, then:

1. $f_n^{i^{-1}} \circ f_n^i = I_{ndX}^i$, and
2. $f_n^i \circ f_n^{i^{-1}} = I_{ndY}^i$

Proof. (1) Suppose that $f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto Y_i^t[I]$ is an invertible neutrosophic function, then
$f_n^{i^{-1}}: Y_i^t[I] \longmapsto X_i^t[I]$ is a neutrosophic function, then
$f_n^{i^{-1}} \circ f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto X_i^t[I]$ is a neutrosophic function. Assume that $x \in X_i^t[I]$ such that $f_n^i(x) = y$,
hence $\left(f_n^{i^{-1}} \circ f_n^i\right)(x) = f_n^{i^{-1}}\left(f_n^i(x)\right) = f_n^{i^{-1}}(\text{y}) = x$ In addition, $I_{ndX}^i: X_i^t[I] \longmapsto X_i^t[I]$ is a neutrosophic identity function, therefore $I_{ndX}^i(x) = x$, for all $x \in X_i^t[I]$, we have,
$f_n^{i^{-1}} \circ f_n^i(x) = I_{ndX}^i(x)$, for all $x \in X_i^t[I]$, that is $f_n^{i^{-1}} \circ f_n^i = I_{ndX}^i$ by definition 6.2 in (Al-Odhari A. M., Some Aspects of Neutrosophic Functions on Neutrosphic set theory of three types, 2025).

Theorem 5.2. Let $f_n^i: X_i^t[I] \mapsto Y_i^t[I]$ and $g_n^i: Y_i^t[I] \mapsto Z_i^t[I], i = 1,2,3$ be two one-to-one and onto neutrosophic functions. Then $g_n^i \circ f_n^i$ is one-to-one and onto neutrosophic function.

Proof. Let $f_n^i: X_i^t[I] \mapsto Y_i^t[I]$ and $g_n^i: Y_i^t[I] \mapsto Z_i^t[I], i = 1,2,3$ be two one-to-one and onto neutrosophic functions. Suppose that $(g_n^i \circ f_n^i)(x) = (g_n^i \circ f_n^i)(y), \forall x, y \in X_i^t[I]$. We conclude that

$\Rightarrow \left(g_n^i (f_n^i(x)\right) = \left(g_n^i f_n^i(y)\right) \Rightarrow g_n^i(x) = g_n^i(y) \Rightarrow x = y$, Therefore $g_n^i \circ f_n^i$ is a one-to-one.

Now consider, $z \in Z_i^t[I] \Rightarrow \exists y \in Y_i^t[I] \ni g_n^i(y) = z$

$$\Rightarrow \exists x \in X_i^t[I] \ni f_n^i(x) = y$$

$$\Rightarrow \exists x \in X_i^t[I] \ni g_n^i(y) = g_n^i\left(f_n^i(x)\right) = (g_n^i \circ f_n^i)(x).$$

$\Rightarrow$ $g_n^i \circ f_n^i$ is an onto, Thus it's injective neutrosophic function.

Theorem 6.2. Let $f_n^i: X_i^t[I] \mapsto Y_i^t[I]$ and $g_n^i: Y_i^t[I] \mapsto Z_i^t[I], i = 1,2,3$ be two one-to-one and onto neutrosophic functions. Then:

1. $\left(f_n^{i^{-1}}\right)^{-1} = f_n^i$, and
2. $(g_n^i \circ f_n^i)^{-1} = f_n^{i^{-1}} \circ g_n^{i^{-1}}$.

Proof. (1). Assume that $(x, y) \in \left(f_n^{i^{-1}}\right)^{-1}$

$\Leftrightarrow \left(f_n^{i^{-1}}\right)^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f_n^{i^{-1}}(y) \Leftrightarrow f_n^i(x) = y \Leftrightarrow (x, y) \in f_n^i$, thus $\left(f_n^{i^{-1}}\right)^{-1} = f_n^i$.

(2). Let $f_n^i: X_i^t[I] \mapsto Y_i^t[I]$ and $g_n^i: Y_i^t[I] \mapsto Z_i^t[I], i = 1,2,3$ be two one-to-one and onto, then $g_n^i \circ f_n^i$ is one-to-one and onto by theorem 4.3, hence the inverse neutrosophic function is one-to-one and onto. Now, from the right-hand side, we can be construct:

$$\left(f_n^{i^{-1}} \circ g_n^{i^{-1}}\right) \circ (g_n^i \circ f_n^i) = f_n^{i^{-1}} \circ \left(g_n^{i^{-1}} \circ \left((g_n^i \circ f_n^i)\right)\right)$$

$$= f_n^{i^{-1}} \circ \left(\left(g_n^{i^{-1}} \circ g_n^i\right) \circ f_n^i\right) \text{ " by the composition associative property".}$$

$$= f_n^{i^{-1}} \circ \left(I_{ndY}^i \circ f_n^i\right) \text{ " by theorem 4.2".}$$

$$= f_n^{i^{-1}} \circ f_n^i$$

$$= I_{ndX}^i$$

By similar argument, we have:

$$(g_n^i \circ f_n^i) \circ \left(f_n^{i^{-1}} \circ g_n^{i^{-1}}\right) = g_n^i \circ \left(f_n^i \circ \left(f_n^{i^{-1}} \circ g_n^{i^{-1}}\right)\right)$$

$$= g_n^i \circ \left(\left(f_n^i \circ f_n^{i^{-1}}\right) \circ g_n^{i^{-1}}\right)$$

$$= g_n^i \circ \left(I_{ndY}^i \circ g_n^{i^{-1}}\right)$$

$$= g_n^i \circ g_n^{i^{-1}}$$

$$= I_{ndZ}^i$$

Finally, to check that $(g_n^i \circ f_n^i)^{-1}(z) = f_n^{i^{-1}} \circ g_n^{i^{-1}}(z)$.

By taking the right-hand side: $f_n^{i^{-1}} \circ g_n^{i^{-1}}(z) = f_n^{i^{-1}}\left(g_n^{i^{-1}}(z)\right) = f_n^{i^{-1}}(y) = x = I_{ndX}^i$, and by taking

The left-hand side: $\left(f_n^{i^{-1}} \circ g_n^{i^{-1}}\right)(z) = f_n^{i^{-1}}\left(g_n^{i^{-1}}(z)\right) = f_n^{i^{-1}}(y) = x = I_{ndX}^i$. Moreover,

$(g_n^i \circ f_n^i)(x) = g_n^i\left(f_n^i(x)\right) = g_n^i(y) = z = I_{ndZ}^i$. Thus $(g_n^i \circ f_n^i)^{-1} = f_n^{i^{-1}} \circ g_n^{i^{-1}}$.

3. Properties of Invertible Neutrosophic Functions on Neutrosophic sets of Three Types

In this section, we investigate the properties of invertible neutrosophic functions on neutrosophic sets of three types, and we proved some theories with few examples explaining (or illustrating) the invertible of neutrosophic functions.

Definition 1.3 Let $f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto Y_i^t[I]$($i = 1,2,3$) be a the neutrosophic function of three types generated from a classical function $f_c: X \longmapsto Y$ and classical sets X and Y respectively.
Let $D_i^t[I]$ be a neutrosophic subset of $Y_i^t[I]$ generated from $D \subset Y$. Define the neutrosophic image of $D_i^t[I]$ under f_n^i , written $f_n^{i^{-1}}(D_i^t[I])$, as follows :$f_n^{i^{-1}}(D_i^t[I]) = \{x \in X_i^t[I]: f_n^i(x) \in D_i^t[I]\}$.
Observation. If $D_i^t[I] = \{x\}$ consist of a singleton element x, the notation $f_n^{i^{-1}}(x)$ use instead of $f_n^{i^{-1}}(\{x\})$.

Example 1.3 Let $f_n^1: \mathbb{R}_1^t[I] \longmapsto \mathbb{R}_1^t[I]$ be a neutrosophic function of type-1 on neutrosophic set of real numbers defined by: $f_n^1(x) = f_n^1(x_1 + x_2 I) = f_c(x_1) + f_c(x_2) f_n^1(I) =$ where $f_c(x) = x^2 + 2$, then

$$
\begin{aligned}
f_n^{i^{-1}}(11 + 11I) &= \{x \in X_i^t[I]: f_n^i(x) = 11 + 11I\} \\
&= \{x \in X_i^t[I]: f_c(x_1) + f_c(x_2) f_n^1(I) = 11 + 11I\} \\
&= \{x \in X_i^t[I]: ({x_1}^2 + 2) + ({x_2}^2 + 2)I = 11 + 11I\} \\
&= \{x \in X_i^t[I]: (3 + 3I), (-3 - 3I)\}
\end{aligned}
$$

Theorem 1.3 Let $f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto Y_i^t[I]$ be a the neutrosophic function of three types generated from a classical function $f_c: X \longmapsto Y$ and classical sets X and Y respectively, and Let $C_i^t[I] \subset Y[I]$ and
$B_i^t[I] \subset Y_i^t[I]$, **if** $C_i^t[I] = B_i^t[I]$, then $f_n^{i^{-1}}(C_i^t[I]) = f_n^{i^{-1}}(B_i^t[I])$.
Proof. Suppose that $C_i^t[I] = B_i^t[I]$, and let $x \in f_n^{i^{-1}}(C_i^t[I])$,
$\Rightarrow f_n^i(x) \in C_i^t[I] \Rightarrow f_n^i(x) \in B_i^t[I] \Rightarrow x \in f_n^{i^{-1}}(B_i^t[I]) \Rightarrow f_n^{i^{-1}}(C_i^t[I]) \subset f_n^{i^{-1}}(B_i^t[I])$. By similar method,
$f_n^{i^{-1}}(B_i^t[I]) \subset f_n^{i^{-1}}(C_i^t[I])$. Hence $f_n^{i^{-1}}(C_i^t[I]) = f_n^{i^{-1}}(B_i^t[I])$. The converse of the theorem is not true, by the following example.
Example 2.3 Let $f_n^1: \mathbb{R}_1^t[I] \longmapsto \mathbb{R}_1^t[I]$ be a neutrosophic function of type-1 from the neutrosophic set of real numbers to itself. Defined by $f_n^1(x) = |x_1| + |x_2|I$. Consider
$C_1^t[I] = \{x_1 + x_2 I: x_1, x_2 \in C = (1,2)\} = (1 + 1I, 2 + 2I)$, and
$B_1^t[I] = \{x_1 + x_2 I: x_1, x_2 \in B = (-1,2)\} = (-1 - 1I, 2 + 2I)$, here $C_1^t[I] \neq B_1^t[I]$, but
$f_n^{1^{-1}}\left((1 + 1I, 2 + 2I)\right) = (1 + 1I, 2 + 2I)$ and $f_n^{1^{-1}}(= (-1 - 1I, 2 + 2I) = (1 + 1I, 2 + 2I)$, we have $f_n^{i^{-1}}(C_i^t[I]) = f_n^{i^{-1}}(B_i^t[I])$, but $C_1^t[I] \neq B_1^t[I]$.

Theorem 2.3 Let $f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto Y_i^t[I]$ be a the neutrosophic function of three types generated from a classical function $f_c: X \longmapsto Y$ and classical sets X and Y respectively, and Let $C_i^t[I] \subset Y_i^t[I]$ and $B_i^t[I] \subset Y_i^t[I]$, then:

1. ${f_n^i}^{-1}(C_i^t[I] \cup B_i^t[I]) = {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I]) \cup {f_n^i}^{-1}(B_i^t[I])$,
2. ${f_n^i}^{-1}(C_i^t[I] \cap B_i^t[I]) = {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I]) \cap {f_n^i}^{-1}(B_i^t[I])$,
3. ${f_n^i}^{-1}(C_i^t[I] - B_i^t[I]) = {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I]) - {f_n^i}^{-1}(B_i^t[I])$, and
4. ${f_n^i}^{-1}\left(\overbrace{C_i^t[I]}^{c}\right) = \overbrace{\left({f_n^i}^{-1}(C_i^t[I])\right)}^{c}$

Proof. (1). Let $x \in {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I] \cup B_i^t[I]) \Leftrightarrow f_n^i(x) \in (C_i^t[I] \cup B_i^t[I])$

$$\Leftrightarrow f_n^i(x) \in C_i^t[I] \vee f_n^i(x) \in B_i^t[I]$$
$$\Leftrightarrow x \in {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I]) \vee x \in {f_n^i}^{-1}(B_i^t[I])$$
$$\Leftrightarrow x \in \left({f_n^i}^{-1}(C_i^t[I]) \cup {f_n^i}^{-1}(B_i^t[I])\right)$$
$$\Longrightarrow {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I] \cup B_i^t[I]) = {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I]) \cup {f_n^i}^{-1}(B_i^t[I]),$$

(2). Let $x \in {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I] \cap B_i^t[I]) \Leftrightarrow f_n^i(x) \in (C_i^t[I] \cap B_i^t[I])$

$$\Leftrightarrow f_n^i(x) \in C_i^t[I] \wedge f_n^i(x) \in B_i^t[I]$$
$$\Leftrightarrow x \in {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I]) \wedge x \in {f_n^i}^{-1}(B_i^t[I])$$
$$\Leftrightarrow x \in \left({f_n^i}^{-1}(C_i^t[I]) \cap {f_n^i}^{-1}(B_i^t[I])\right)$$
$$\Longrightarrow {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I] \cap B_i^t[I]) = {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I]) \cap {f_n^i}^{-1}(B_i^t[I]),$$

(3). Let $x \in {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I] - B_i^t[I]) \Leftrightarrow f_n^i(x) \in (C_i^t[I] - B_i^t[I])$

$$\Leftrightarrow f_n^i(x) \in C_i^t[I] \wedge f_n^i(x) \notin B_i^t[I]$$
$$\Leftrightarrow x \in {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I]) \wedge x \notin {f_n^i}^{-1}(B_i^t[I])$$
$$\Leftrightarrow x \in \left({f_n^i}^{-1}(C_i^t[I]) - {f_n^i}^{-1}(B_i^t[I])\right)$$
$$\Longrightarrow {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I] - B_i^t[I]) = {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I]) - {f_n^i}^{-1}(B_i^t[I]),$$

(4). Suppose that $x \in {f_n^i}^{-1}\left(\overbrace{C_i^t[I]}^{c}\right) \Leftrightarrow f_n^i(x) \in \left(\overbrace{C_i^t[I]}^{c}\right)$

$$\Leftrightarrow f_n^i(x) \notin C_i^t[I]$$
$$\Leftrightarrow x \notin {f_n^i}^{-1}(C_i^t[I])$$
$$\Leftrightarrow x \in \overbrace{{f_n^i}^{-1}(C_i^t[I])}^{c}, \text{ hence } {f_n^i}^{-1}\left(\overbrace{C_i^t[I]}^{c}\right) = \overbrace{\left({f_n^i}^{-1}(C_i^t[I])\right)}^{c}.$$

Definition 2.3 Let $f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto Y_i^t[I]$ be a neutrosophic function of three types generated from a classical function $f_c: X \longmapsto Y$ and classical sets X and Y respectively, $\mathfrak{I}(X_i^t[I])$ and $\mathfrak{I}(Y_i^t[I])$ Are neutrosophic power sets of $X_i^t[I]$. A function f_n^i is called induce neutrosophic function, if $f_n^i: \mathfrak{I}(X_i^t[I]) \longmapsto \mathfrak{I}(Y_i^t[I])$ by $C_i^t[I] \longmapsto f_n^i(C_i^t[I])$, $C_i^t[I] \subset X_i^t[I]$, and ${f_n^i}^{-1}: \mathfrak{I}(Y_i^t[I]) \longmapsto X_i^t[I]$ by $B_i^t[I] \longmapsto {f_n^i}^{-1}(B_i^t[I])$, $B_i^t[I] \subset Y_i^t[I]$.

Theorem 3.3 Let $f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto Y_i^t[I]$ be a neutrosophic one-to-one function of three types generated from a classical function $f_c: X \longmapsto Y$ and classical sets X and Y respectively, then $f_n^i: \Im(X_i^t[I]) \longmapsto \Im(Y_i^t[I])$ is a neutrosophic one-to-one function.

Proof. Case1. Let $X_i^t[I] \neq \emptyset_i^t[I]$, then $\Im(X_i^t[I])$ contains at least two neutrosophic elements, say $C_i^t[I] \in \Im(X_i^t[I])$ and $B_i^t[I] \in \Im(X_i^t[I])$ such that $C_i^t[I] \neq B_i^t[I]$, hence there exists $x \in X_i^t[I]$ such that $x \in C_i^t[I]$ and $x \notin B_i^t[I]$, therefore $f_n^i(x) \in f_n^i(C_i^t[I])$ and $f_n^i(x) \notin f_n^i(B_i^t[I])$, we conclude that $X_i^t[I] \neq \emptyset_i^t[I] \Longrightarrow f_n^i(C_i^t[I]) \neq f_n^i(B_i^t[I])$, hence $f_n^i: \Im(X_i^t[I]) \longmapsto \Im(Y_i^t[I])$ is a neutrosophic one-to-one function.

Case2. Let $X_i^t[I] = \emptyset_i^t[I]$, that $\Im(X_i^t[I]) = \{\emptyset_1 + \emptyset_1 I\}$, it's obvious one-to-one function, since there is no two different elements have the same image.

Theorem 4.3 Let $f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto Y_i^t[I]$ be a the neutrosophic function of three types generated by a classical function $f_c: X \longmapsto Y$ and classical sets X and Y respectively, then the neutrosophic induced function ${f_n^i}^{-1}: \Im(Y_i^t[I]) \longmapsto \Im(X_i^t[I])$ preserves the neutrosophic elementary operations.

1. ${f_n^i}^{-1}\left(\cup_{\alpha\in\mathbb{i}} \underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}\right) = \cup_{\alpha\in\mathbb{i}}\left({f_n^i}^{-1}\left(\underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}\right)\right)$, and

2. ${f_n^i}^{-1}\left(\cap_{\alpha\in\mathbb{i}} \underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}\right) = \cap_{\alpha\in\mathbb{i}}\left({f_n^i}^{-1}\left(\underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}\right)\right)$.

Proof (1). Suppose that $x \in {f_n^i}^{-1}\left(\cup_{\alpha\in\mathbb{i}} \underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}\right) \Leftrightarrow f_n^i(x) \in \cup_{\alpha\in\mathbb{i}} \underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}$

$\Leftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{i},\ f_n^i(x) \in \underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}$

$\Leftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{i},\ x \in {f_n^i}^{-1}\left(\underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}\right)$

$\Leftrightarrow x \in \cup_{\alpha\in\mathbb{i}} {f_n^i}^{-1}\left(\underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}\right)$, hence

$${f_n^i}^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\mathbb{i}} \underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{i}}\left({f_n^i}^{-1}\left(\underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}\right)\right).$$

(2). Suppose that $x \in {f_n^i}^{-1}\left(\cap_{\alpha\in\mathbb{i}} \underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}\right) \Leftrightarrow f_n^i(x) \in \cap_{\alpha\in\mathbb{i}} \underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}$

$\Leftrightarrow \forall\alpha \in \mathbb{i},\ f_n^i(x) \in \underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}$

$\Leftrightarrow \forall\alpha \in \mathbb{i},\ x \in {f_n^i}^{-1}\left(\underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}\right)$

$\Leftrightarrow x \in \cap_{\alpha\in\mathbb{i}} {f_n^i}^{-1}\left(\underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}\right)$, hence

$${f_n^i}^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\mathbb{i}} \underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{i}}\left({f_n^i}^{-1}\left(\underbrace{B_i^t[I\,]}_{\alpha}\right)\right).$$

Theorem 5.3 Let $f_n^i: X_i^t[I] \longmapsto Y_i^t[I]$ be a the neutrosophic function of three types generated from a classical function $f_c: X \longmapsto Y$ and classical sets X and Y respectively, let $C_i^t[I] \subset X_i^t[I]$ and $B_i^t[I] \subset Y_i^t[I]$, then:

1. $C_i^t[I] \subset {f_n^i}^{-1}\left(f_n^i(C_i^t[I])\right)$, and
2. $f_n^i\left({f_n^i}^{-1}(B_i^t[I])\right) \subset B_i^t[I]$.

Proof (1). Consider $x \in C_i^t[I] \Longrightarrow f_n^i(x) \in f_n^i(C_i^t[I]) \Longrightarrow x \in {f_n^i}^{-1}\left(f_n^i(C_i^t[I])\right)$, hence,

$C_i^t[I] \subset {f_n^i}^{-1}\left(f_n^i(C_i^t[I])\right)$. Part 2 in the theorem by the same technique.

Example 3.3 Let $f_n^1: \mathbb{R}_1^t[I] \longmapsto \mathbb{R}_1^t[I]$ be a neutrosophic function of type-1 from the neutrosophic set of real numbers to itself. Defined by $f_n^1(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2 I$. Consider

$$C_1^t[I] = \{x_1 + x_2 I: x_1, x_2 \in C = \{1,2,3\} = \begin{Bmatrix} 1+1I, 1+2I, 1+3I, \\ 2+1I, 2+2I, 2+3I, \\ 3+1I, 3+2I, 3+3I, \end{Bmatrix}, \text{ and}$$

$$f_n^1(C_1^t[I]) = f_n^1 \begin{Bmatrix} 1+1I, 1+2I, 1+3I, \\ 2+1I, 2+2I, 2+3I, \\ 3+1I, 3+2I, 3+3I, \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1+1I, 1+4I, 1+9I, \\ 4+1I, 4+4I, 4+9I, \\ 9+1I, 9+4I, 9+9I, \end{Bmatrix}, \text{ therefore,}$$

$${f_n^1}^{-1}\left(f_n^1(C_1^t[I])\right) = {f_n^1}^{-1} \begin{Bmatrix} 1+1I, 1+4I, 1+9I, \\ 4+1I, 4+4I, 4+9I, \\ 9+1I, 9+4I, 9+9I, \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1+1I, -1-1I, 1+2I, -1-2I, 1+3I, -1-3I, \\ 2+1I, -2-1I, 2+2I, -2-2I, 2+3I, -2-3I, \\ 3+1I, -3-1I, 3+2I, -3-2I, 3+3I, -3-3I \end{Bmatrix},$$

it is clear that ${f_n^1}^{-1}\left(f_n^1(C_1^t[I])\right) \neq C_1^t[I]$. Also, consider

$${f_n^1}^{-1}(\{-4-4I\}) = \emptyset_1^t[I] = \{u_1 + u_2 I: u_1, u_1 \in \emptyset\}, \text{ then}$$

$$f_n^1\left({f_n^1}^{-1}(\{-4-4I\})\right) = f_n^1\left(\emptyset_1^t[I]\right) = \emptyset_1^t[I] \neq B_1^t[I] = \{-4-4I\}.$$

4. Conclusions: In this paper, I studied the invertible neutrosophic set of three types with their properties along with some theories and examples to construct the neutrosophic set theory of the neutrosophic set of three types as an extension of previous work.

Funding: There is no financial funding for this research.

Acknowledgments: The author is grateful to the editorial and reviewers, as well as the correspondent author, who offered assistance in the form of advice, assessment, and checking during the study period.

Conflicts of Interest: There is no conflict of interest for the research.

References

[1] Al-Odhari, A. M. (2023). Some Algebraic Structure of Neutrosophic Matrices. *Prospects for Applied Mathematics and data Analysis (PAMDA), 01*(02), 37-44. doi:https://doi.org/10.54216/PAMDA.010204

[2] Al-Odhari, A. M. (2024). Axiomatic of Neutrosophic Groups. *Sana'a University Journal of Applied Sciences and Technology, 2*(2), 205-214. doi:https://doi.org/10.59628/jast.v2i2.793

[3] Al-Odhari, A. M. (2024). Basic Introduction of Neutrosophic Set Theory. *Plithogenic Logic and Computation, 2*, 20-28. doi:10.61356/j.plc.2024.2327

[4] Al-Odhari, A. M. (2024). Characteristics Neutrosophic Subgroups of Axiomatic Neutrosophic Groups. *Neutrosophic Optimization and Intelligent Systems, 3*, 32-40. doi:https://doi.org/10.61356/j.nois.2024.3265

[5] Al-Odhari, A. M. (2024). On the Generalization of Neutrosophic Set Operations: Testing Proofs by Examples. *HyperSoft Set Methods in Engineering, 2*, 72-82. doi:10.61356/j.hsse.2024.2321

[6] Al-Odhari, A. M. (2024). Some Aspects of Neutrosophic Set Theory. *Neutrosophic Optimization and Intelligent Systems, 4*, 31-38. doi:https://doi.org/10.61356/j.nois.2024.4359

[7] Al-Odhari, A. M. (2024). Some Results of Neutrosophic Relations for Neutrosophic Set Theory. *Neutrosophic Knowledge, 5*, 76-86. doi:https://doi.org/10.5281/zenodo.14181753

[8] Al-Odhari, A. M. (2024). The Computations of Algebraic Structure of Neutrosophic Determinants. *Sana'a University Journal of Applied Sciences and Technology, 2*(1), 41-52. doi:10.59628/jast.v2i1.691

[9] Al-Odhari, A. M. (2025). Some Aspects of Neutrosophic Functions on Neutrosphic set theory of three types. *to appear*.

[10] Al-Odhari, A. (n.d.). Revisiting of Axiomatic Neutrosophic Groups According to neutrosophic Set Theory. *to appear*.

[11] Lukasiewicz, J. (1918, March 7). Farewell Lecture at the university of Warsaw. *Journal Article The Polish Review, 13*(3), 45-47. Retrieved from https://www.Jstor.org/stable/25776790

[12] ŁUKASIEWICZ, J. (1968). ON THREE-VALUED LOGIC. *The Polish Review, 13*(3), 43-44. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/25776789

[13] PINTER, C. C. (2014). *A Book of SET THEORY.* Mineola, New York: DOVER PUBLICATIONS, INC. Retrieved from www.doverpublications.com

[14] Roitman, J. (2011). *Introduction to Modern Set Theory.* Retrieved from https://www.people.vcu.edu/~clarson/roitman-set-theory.pdf

[15] Smaradache, F. (1999). *A UNIFYING FIELD IN LOGICS: NEUTROSOPHIC LOGIC.* Rehoboth:American Research Press.

[16] Smarandache, F. (2002). Neutrosophy, A New Branch of Philosophy, in Multiple-Valued Logic. *An International Journal, 8*(3), 297-384.

[17] Smarandache, F. (2005). Neutrosophic Set, A Generalization of The Intuitionistic Fuzzy Sets. *Inter. J. Pure Appl. Math, 24*, 287-297.

[18] Smarandache, F. (2016). Degree of Dependence and Independence of the (Sub)Components of Fuzzy Set and Neutrosophic Set. *Neutrosophic Sets and Systems, 11*, 95-97. doi:org/10.5281/zenodo.571359

[19] Smarandache, F. (2021). Indeterminacy in Neutrosophic Theories and their Applications. *International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), 15*(2), 89-97. doi:https://doi.org/10.54216/IJNS.150203

[20] Weiss, W. A. (2008). *AN INTRODUCTION TO SET THEORY.* university of Tornoto. Retrieved from https://www.math.toronto.edu/weiss/set_theory.pdf

Neutrosophic Knowledge, Vol. 06, 2025
University of New Mexico

Article

Neutrosophy in Law: "Overcoming Barriers toward Innovative Legal Solutions"

الفلسفة النيوتروسوفية في القانون: "كسر حدود المعوقات نحو حلول قانونية مبتكرة"

Dr. Nabila Abdel Fattah keshty [1,] *

[1]Affiliation; PhD in Constitutional Law & Political Systems, Faculty of Law, Menoufia University, Egypt,

Noby.keshty2000@gmail.com

*****Correspondence: Noby.keshty2000@gmail.com ; Tel: (00201003698158)

Received: 02 02, 2025; *Accepted:* 02 26, 2025.

Abstract: The implementation of Neutrosophy in legal studies is a relatively new field, making its foundational body of studies somewhat limited. Nevertheless, there are some early efforts seeking to explore this interaction between modern philosophical logic and law. This research aims to study the obstacles facing the implementation of neutrosophic philosophy in the legal field and how to overcome them to ensure justice and innovative dispute resolution. Neutrosophic philosophy, which is based on the concept of neutrality and accommodating contradictions, offers a flexible approach that transcends the traditional binary interpretation of facts and legal frameworks. However, the implementation of this philosophy within the legal system encounters several challenges, including difficulties in integrating it with traditional legal systems that rely on rigid logic and static legal texts. These challenges are further manifested in the intellectual resistance from legal professionals who struggle to accept the integration of a philosophy characterized by flexibility and absolute neutrality in a field that demands certainty and clarity.

Keywords: Neutrosophy; Legal Studies; Justice; Judicial Disputes; Legal Obstacles.

ملخص: إن تطبيق النيوتروسوفيا في الدراسات القانونية يُعد مجالاً جديداً نسبياً، ممّا يجعل قاعدة الدراسات الخاصة به محدودة نوعاً ما، ومع ذلك هناك بعض الجهود المبكّرة التي تسعى لاستكشاف هذا التلاقح بين المنطق الفلسفي الحديث والقانون، ويستهدف هذا البحث دراسة المعوقات التي تواجه تطبيق الفلسفة النيوتروسوفية في المجال القانوني، وكيفية التغلب عليها لضمان تحقيق العدالة وحل النزاعات بشكل مبتكر، حيث تقدم الفلسفة النيوتروسوفية -التي تعتمد على مفهوم الحياد واستيعاب التناقضات- منهجًا مرنًا يتجاوز الثنائية التقليدية في تفسير الحقائق والتعامل مع القوانين، وعلى الرغم من ذلك يواجه تطبيق هذه الفلسفة في النظام القانوني عدة تحديات منها: الصعوبة في دمجها مع القوانين التقليدية التي تعتمد على منطق ثابت ونصوص قانونية جامدة، وتتجسد هذه التحديات في المقاومة الفكرية من قِبَل المتخصصين في القانون الذين يواجهون صعوبة في تقبل فكرة تطبيق فلسفة تتسم بالمرونة والحياد المطلق في مجال قانوني يتطلب اليقين والوضوح،

الكلمات المفتاحية: النيوتروسوفيا؛ الدراسات القانونية؛ العدالة؛ النزاعات القضائية؛ المعوقات القانونية.

1.مقدمة:

الفلسفة النيوتروسوفية أو النيوتروسوفيا (Neutrosophy) هي فلسفة حديثة نسبياً، وضعها الفيلسوف وعالم الرياضيات الأمريكي-الروماني "فلورنتين سمارانداكه" Florentine smarandache، وهى تركز على دراسة طبيعة الحقيقة واللا حقيقة وعلاقتهما بالأفكار المحايدة، وتعتمد النيوتروسوفية على ثلاثية تتضمن الحقيقة (Truth) واللا حقيقة (Falsehood) والحياد (Neutrality)، مما يسمح بتحليل أكثر شمولية للظواهر المعقدة والمواقف المتناقضة[1].

وتتألف كلمة النيوتروسوفيا "Neutrosophy" على الصعيد الإيتمولوجي أو الاشتقاقي اللغوي من مقطعين الأول نيوترو "Neutro" ويقترب هذا المصطلح من المصطلح الفرنسي "Neutre" والمصطلح الأنجليزي "Neutral" ويعني في الحالتين معا محايد، والمقطع الثاني من الكلمة هو "Sophy" أو "Sophia" هي كلمة يونانية تعني الحكمة والمعرفة والعلم وبتجميع المقطعين نحصل على المعنى اللغوي للنيوتروسوفيا: معرفة الفكر المحايد[2].

وتلعب الفلسفة النيوتروسوفية دورًا مهمًا في تعزيز العدالة من خلال توفير إطار شامل ومتكامل لتحليل القضايا والمواقف القانونية والاجتماعية، ومعالجة النزاعات بشكل يحقق التوازن بين الأطراف المختلفة.

وتقدم الفلسفة النيوتروسوفية نموذجًا فكريًا جديدًا لتعزيز العدالة، حيث تُعيد صياغة مفهوم العدالة بشكل يراعي جميع الجوانب المتناقضة والمحايدة في القضايا، ومن خلال تطبيقها يمكن تحقيق عدالة أكثر شمولاً وإنصافًا، سواء على المستوى الفردي أو الاجتماعي أو الدولي، مما يُساهم في بناء أنظمة قانونية واجتماعية أكثر توازنًا واستدامة.

1.1. إشكالية الدراسة:

تكمن الإشكالية الرئيسية لهذا البحث في صعوبة التكيف بين فلسفة النيوتروسوفية -التي تعزز التوازن بين المتناقضات- وبين النظام القانوني الذي يعتمد على التفسير الحرفي للنصوص والقرارات القضائية المستندة إلى أسس ثابتة.

ويطرح البحث عدة تساؤلات منها:

أ. كيف يمكن دمج الفلسفة النيوتروسوفية في الأنظمة القانونية التقليدية؟

ب. ما هى أبرز المعوقات التي تحول دون تطبيق الفلسفة النيوتروسوفية في القانون؟

ج. ما الحلول التي يمكن تبنيها لتطبيق الفلسفة النيوتروسوفية في القانون؟

2.1. أهمية الدراسة:

تتمثل أهمية البحث في توضيح كيفية تجاوز هذه المعوقات من خلال تطوير منهجيات مرنة تُساهم في معالجة التناقضات القانونية بشكل يتناسب مع تطور الفكر القانوني والمجتمعي، واستكشاف كيفية دمج الفلسفة النيوتروسوفية في النظام القانوني بشكل يتماشى مع متطلبات العدالة وتحقيق التوازن بين القوانين المتناقضة، وتقديم منظور جديد يُسهم في تطوير الدراسات القانونية، وتعزيز الحيادية والعدالة من خلال تحليل النصوص والنزاعات بمنهج ثلاثي الأبعاد.

3.1. أهداف الدراسة:

يهدف البحث إلى تحليل المعوقات الرئيسية التي تحول دون تطبيق الفلسفة النيوتروسوفية في النظام القانوني، مثل المقاومة الفكرية، وصعوبة التكيف مع القوانين التقليدية، كما يقدم البحث اقتراح حلول عملية للتغلب على هذه المعوقات، مثل تعديل بعض الإجراءات القانونية لتناسب الفكر النيوتروسوفي، وتوفير التدريب والتعليم المتخصص للمحامين والقضاة.

4.1. منهج الدراسة:

ويعتمد البحث على منهج التحليل النقدي للأدبيات المتوفرة في الفلسفة النيوتروسوفية وتطبيقاتها في بعض الأنظمة القانونية، ويتّم التوصل في النهاية إلى حلول عملية تًسهم في تعزيز العدالة القانونية بشكل مرن.

5.1. هيكل الدراسة:

يتألف هيكل البحث من مقدمة تشرح العنوان وأهميته، ثم تعريف الفلسفة النيوتروسوفية، يليها توضيح العلاقة بين الفلسفة النيوتروسوفية والقانون، والتحديات التي تواجهها وكيفية التغلب عليها، وأخيرًا خاتمة والتوصيات.

2. العلاقة بين الفلسفة النيوتروسوفية والقانون:

ترتبط الفلسفة النيوتروسوفية (Neutrosophy) بالقانون من خلال تقديم إطار فكري شامل يُساعد في فهم وتحليل القضايا القانونية المعقدة، حيث توفر أدوات لتجاوز التفكير الثنائي التقليدي (الصواب/الخطأ) وتعتمد على دمج الحقيقة واللا حقيقة والحياد، وتتجسد العلاقة بين الفلسفة النيوتروسوفية والقانون في عدة محاور رئيسية:

أ- تُوفر الفلسفة النيوتروسوفية أدوات للتعامل مع القضايا التي تتسم بالتعقيد والغموض، مثل القضايا ذات الأبعاد الأخلاقية أو الاجتماعية، من خلال النظر إلى جميع الجوانب الممكنة (الحقيقة، اللا حقيقة، الحياد)، فليست كل القضايا في القانون واضحة بشكلٍ مطلق وتعترف الفلسفة النيوتروسوفية بالمناطق الرمادية بين الصواب والخطأ مما يساعد على تقديم تفسيرات أكثر شمولًا للمواقف القانونية.

ب- تدعم الفلسفة النيوتروسوفية التفكير الذي يوازن بين المصالح المتضاربة في صياغة القوانين، فهى تُشجع على تحليل الأثر المحتمل للتشريعات من جميع الزوايا بما في ذلك العوامل المحايدة التي تؤثر على تطبيق القانون، ويمكن للمشرعين من خلال استخدام المنهج النيوتروسوفي اقتراح قوانين توازن بين الحقوق والواجبات وتراعي المصالح المختلفة للأفراد والجماعات.

ج- تُساعد الفلسفة النيوتروسوفية في تسهيل عمليات الوساطة والتفاوض بين الأطراف المتنازعة من خلال تحديد النقاط المشتركة والمناطق المحايدة التي يمكن أن تكون أساسًا للحلول التصالحية، وباستخدام المنهج النيوتروسوفي في حالات النزاع القانوني الشديد يتيح تقليل التوتر بين الأطراف والوصول إلى حلول متوازنة.

د- يمكن للفلسفة النيوتروسوفية أن تُسهم في تحقيق العدالة بشكل أكثر إنصافًا وذلك بتشجيع القضاة على النظر إلى الأدلة والحقائق من جميع الزوايا، بما في ذلك الاعتراف بالجوانب المحايدة التي تؤثر على القرارات القضائية، وتحقق الإنصاف من خلال استخدام مقاربة شاملة تجمع بين الحقيقة واللا حقيقة والحياد.

ه- يمكن استخدام الفلسفة النيوتروسوفية في مجال القانون الدولي لتحليل النزاعات بين الدول أو الأطراف الدولية، حيث توفر أدوات لتحليل المصالح المتضاربة وإيجاد حلول توافقية، كما تدعم القانون الدولي لحقوق الإنسان من خلال الاعتراف بحقوق جميع الأطراف والعمل على تحقيق التوازن بين الحقوق الفردية والجماعية.

و- تُساعد الفلسفة النيوتروسوفية على تطوير النظرية القانونية من خلال تقديم طرق جديدة لتحليل التناقضات بين القوانين أو التفسيرات المختلفة للنصوص القانونية، كما يمكن استخدامها لإعادة صياغة بعض المفاهيم القانونية مثل العدالة والإنصاف لتتناسب مع التحديات الحديثة[3].

ونستعرض مجموعة من التطبيقات العملية التي تعكس كيفية استخدام مبادئ الفلسفة النيوتروسوفية لتحليل القضايا القانونية وحل النزاعات وتطوير النظم القانونية، وهذه التطبيقات تُظهر كيف يمكن دمج التفكير النيوتروسوفي في الممارسات القانونية:

أ- يمكن تطبيق الفلسفة النيوتروسوفية لتحديد مناطق الحياد ونقاط التوافق في النزاعات القانونية التي تنطوي على أطراف متعددة ومصالح متعارضة، مثال ذلك: نزاع بين شركتين على حقوق الملكية الفكرية، حيث يمكن تحليل القضية وفق الفلسفة النيوتروسوفية لتحديد النقاط التي يتفق عليها الطرفان (الحياد)، والمصالح المتعارضة (الحقيقة واللا حقيقة) وتقديم حل وسط يستند إلى تحقيق التوازن، مثل الترخيص المشترك أو الاتفاق على شروط تعويض.

ب- يمكن استخدام الفلسفة النيوتروسوفية عند وضع قوانين جديدة لتقييم الآثار الإيجابية والسلبية والمناطق المحايدة المحتملة لتلك التشريعات، ففي حالة صياغة قانون ينظم استخدام الذكاء الاصطناعي يمكن للفلسفة النيوتروسوفية المساهمة في تحليل تأثير القانون على المطورين (الحقيقة)، وتحديد المخاطر المحتملة على الأفراد (اللا حقيقة)، والأخذ بعين الاعتبار المنافع المحايدة مثل تحسين كفاءة العمليات الإدارية (الحياد).

ج- يُمكن للفلسفة النيوتروسوفية أن تكون أداة فعالة في التحكيم الدولي، حيث تختلف الثقافات والقوانين بين الأطراف المتنازعة، ففي نزاع بين شركتين من دولتين مختلفتين حول شروط عقد تجاري يمكن للمحكّم تقييم التزامات العقد وفق القوانين الوطنية لكل دولة (الحقيقة واللا حقيقة)، والتركيز على المناطق المحايدة مثل المصالح التجارية المشتركة للوصول إلى حل توافق (الحياد).

د- تحليل الأنظمة القانونية المختلفة ومقارنتها بهدف تطوير أفضل الممارسات، فعند مقارنة القوانين المتعلقة بحقوق العمال بين دول مختلفة يمكن للفلسفة النيوتروسوفية تحديد الجوانب الإيجابية لكل نظام (الحقيقة)، وإبراز القصور أو التعارضات (اللا حقيقة)، واستخراج المبادئ المحايدة التي يمكن أن تخدم كمعيار دولي (الحياد).

هـ- تُستخدم الفلسفة النيوتروسوفية لحل النزاعات المتعلقة بانتهاكات حقوق الإنسان في المحاكم الدولية، حيث تبرز تعارض المصالح بين الدول والأفراد، ففي قضية تخص اللاجئين يمكن لمحكمة دولية النظر إلى حقوق اللاجئين (الحقيقة)، وتقييم المخاوف الأمنية للدولة المضيفة (اللا حقيقة)، والتركيز على مناطق الحياد، مثل وضع برامج تكامل تضمن الأمن والدعم للاجئين (الحياد).

و- تُسهم الفلسفة النيوتروسوفية في تطوير العدالة التصالحية التي تهدف إلى إصلاح الضرر بدلاً من معاقبة الجاني فقط، ويمكن استخدام المنهج النيوتروسوفي في قضية جنائية بسيطة لتحديد الحقائق القانونية التي تثبت الجرم (الحقيقة)، والظروف المخففة التي تقلل المسئولية (اللا حقيقة)، والمناطق المحايدة مثل تأثير العقوبة على المجتمع، والتوصل إلى عقوبات بديلة مثل الخدمة المجتمعية (الحياد)[4].

تُظهر هذه التطبيقات العملية كيف يمكن للفلسفة النيوتروسوفية أن تكون أداة قوية لدعم القانون في تحقيق العدالة وحل النزاعات وتطوير الأنظمة القانونية من خلال إدخال مفهوم الحياد، كما يمكن للفلسفة النيوتروسوفية تقديم حلول مبتكرة وشاملة تتعامل مع التحديات القانونية المعقدة بمرونة وكفاءة.

3. تحديات تطبيق الفلسفة النيوتروسوفية في الدراسات القانونية:

يواجه تطبيق الفلسفة النيوتروسوفية في الدراسات القانونية العديد من التحديات، وذلك على على الرغم من أهميتها في تعزيز التحليل الشامل وتطوير الحلول المبتكرة للنزاعات، وفيما يلي أبرز هذه التحديات:

أ- **الطبيعة المجردة للفلسفة النيوتروسوفية**: تعتمد الفلسفة النيوتروسوفية على مفاهيم مجردة -مثل الحقيقة، اللا حقيقة، والحياد- يصعب أحيانًا ترجمتها إلى أدوات عملية في المجال القانوني، مما يؤدي إلى صعوبة فهم هذه الفلسفة من قِبَل المشرعين والقضاة والباحثين القانونيين الذين يعتمدون على منهجيات أكثر تقليدية وملموسة، ويتمثل المعوق الرئيسي في الحاجة إلى تحويل المفاهيم المجردة إلى نماذج عملية قابلة للتطبيق في الإجراءات القانونية.

ب- **غياب الإطار المؤسسي لتطبيق الفلسفة النيوتروسوفية**: هى ليست جزءًا متكاملًا من المناهج القانونية التقليدية أو المؤسسات القضائية، ويؤدي نقص المعرفة أو الخبرة في استخدام هذه الفلسفة في التحليل القانوني إلى محدودية استخدامها.

ج- **مقاومة التغيير في الأنظمة القانونية**: تعتمد الأنظمة القانونية على أطر عمل تقليدية ومنهجيات صارمة، مما يجعل من الصعب تبني فلسفات جديدة مثل الفلسفة النيوتروسوفية، وهناك ميل للممارسين القانونيين لتجنب استخدام هذه الفلسفة بسبب عدم التوافق مع الأنظمة القانونية القائمة، ويرجع ذلك إلى الجمود في النظام القانوني الذي يعيق الابتكار وتبني أفكار جديدة.

د- **التعقيد في القضايا القانونية:** هناك قضايا قانونية معقدة تتطلب اتخاذ قرارات سريعة، وهنا لا تكون الفلسفة النيوتروسوفية عملية في هذه الحالات التي تتطلب حلولًا فورية، وذلك أن الفلسفة النيوتروسوفية تحتاج إلى وقت طويل لتحليل شامل ومتعدد الأبعاد لتطبيق التفكير النيوتروسوفي مقارنة بالطرق القانونية التقليدية.

هـ- **محدودية المراجع والدراسات التطبيقية حول العلاقة بين الفلسفة النيوتروسوفية والقانون**: هناك نقص في الأبحاث التي تربط الفلسفة النيوتروسوفية بالدراسات القانونية، وغياب للأدبيات القانونية التي تدعم استخدام الفلسفة النيوتروسوفية في تحليل القضايا، حيث لا تزال الفلسفة النيوتروسوفية حديثة نسبيًا.

و- **تعارض مع بعض المبادئ القانونية التقليدية**: يعتمد القانون على مبادئ مثل "الأدلة الحاسمة" و"الحق والباطل"، بينما تدعو الفلسفة النيوتروسوفية إلى مراعاة الحياد والمناطق الرمادية، ويعتبر بعض الممارسين القانونيين أن الفلسفة النيوتروسوفية تتعارض مع الأسس التقليدية للعدالة واليقين القانوني، حيث يجدوا صعوبة في الموازنة بين الفكر التقليدي القائم على الحسم والتفكير وبين الفكر النيوتروسوفي القائم على المرونة.

ز- **تحديات الترجمة الثقافية والقانونية**: يختلف تطبيق الفلسفة النيوتروسوفية من سياق قانوني إلى آخر بسبب اختلاف الأنظمة القانونية والثقافات، واختلاف السياقات الثقافية والقانونية بين الدول يجعل من الصعب تبني نموذج موحّد، مما يؤدي إلى صعوبة اعتماد منهجية واحدة لتطبيق الفلسفة النيوتروسوفية عالميًا.

ح- **القيود العملية والتطبيقية**: يصعب تطبيق الفلسفة النيوتروسوفية في بعض القضايا مثل القوانين الجنائية أو القوانين التي تحتاج إلى تحديد صارم للحق والباطل مما يؤدي إلى تفضيل الطرق التقليدية التي تركز على الحسم القانوني والابتعاد عن الفلسفة النيوتروسوفية.

ط- **قلة التدريب على التفكير النيوتروسوفي**: يتطلب التفكير النيوتروسوفي مهارات تحليلية متقدمة وتدريبًا مكثفًا لا يتوافر لجميع الممارسين القانونيين، مما يؤدي إلى ضعف القدرة على استخدام الفلسفة النيوتروسوفية بشكل فعّال في الممارسات القانونية، لذا يجب توفير برامج تدريبية لتأهيل الممارسين القانونيين على استخدام الفلسفة النيوتروسوفية.

ي- **محدودية الدعم التكنولوجي**: يتطلب تطبيق الفلسفة النيوتروسوفية في القانون استخدام أدوات تكنولوجية متقدمة لتحليل البيانات والمواقف المتعددة، ويؤدي نقص التكنولوجيا الداعمة إلى صعوبة تنفيذ التحليل النيوتروسوفي بشكل فعال[5].

رغم التحديات التي تواجه تطبيق الفلسفة النيوتروسوفية في الدراسات القانونية فإنها تظل أداة واعدة لتعزيز العدالة وتطوير النظم القانونية، والتغلب على هذه التحديات يتطلب إدماجها تدريجيًا في المناهج التعليمية مع تطوير الأبحاث العلمية وتوفير التدريب للممارسين القانونيين.

4. استراتيجيات التغلب على تحديات تطبيق الفلسفة النيوتروسوفية في الدراسات القانونية:

للتغلب على التحديات التي تواجه تطبيق الفلسفة النيوتروسوفية في الدراسات القانونية يمكن اتباع مجموعة من الاستراتيجيات التي تساهم في تسهيل دمجها في الأنظمة القانونية وتعزيز فعاليتها، وفيما يلي بعض الطرق الممكنة للتغلب على هذه المعوقات:

أ- استخدام التكنولوجيا لدعم التطبيق الفعلي للفلسفة النيوتروسوفية في القضايا القانونية، وتطوير أدوات تكنولوجية تساعد في التحليل القانوني باستخدام الفلسفة النيوتروسوفية؛ مثل برامج تحليل القضايا القانونية متعددة الأبعاد التي تدمج العناصر الحقيقية واللا حقيقية والحياد، وذلك لتحسين القدرة على التعامل مع القضايا القانونية المعقدة والبحث عن حلول شاملة وعادلة.

ب- بناء شراكات بين القانون والفلسفة النيوتروسوفية لتحفيز التعاون بين مختلف التخصصات، ليسهم في تطوير منهج قانوني متعدد الأبعاد يرتكز على الفلسفة النيوتروسوفية، وذلك بعقد مؤتمرات وورش عمل مشتركة بين الفلاسفة المختصين بالفلسفة النيوتروسوفية والقانونيين، وتبادل المعرفة بين التخصصات لتعزيز قدرة النظام القانوني على التعامل مع القضايا القانونية من خلال رؤية أوسع تدمج المنهجيات القانونية والفلسفية.

ج- تشجيع استخدام الحلول التوافقية في حل النزاعات القانونية عبر الوساطة والتحكيم، وتدريب المحكمين والقضاة على تقنيات الفلسفة النيوتروسوفية في الوساطة والتحكيم، بحيث يمكن استخدام تحليل متعدد الأبعاد للوصول إلى حلول مرضية لجميع الأطراف، وذلك لتحسين نتائج الوساطة والتحكيم وتحقيق حلول قانونية متوازنة.

د- تحفيز التحوّل من التفكير التقليدي إلى التفكير الأكثر مرونة وتعدد الأبعاد من خلال نشر الوعي بين الممارسين القانونيين حول فوائد الفلسفة النيوتروسوفية، وتشجيع المحاكم والمنظمات القانونية على تجربة تطبيق بعض مبادئ الفلسفة النيوتروسوفية في القضايا التجريبية، وذلك لتعزيز القبول الفلسفي والتطبيق العملي للمفاهيم الجديدة داخل النظام القضائي.

ه- على المؤسسات التعليمية تطوير مناهج دراسات قانونية جديدة تركز على الفلسفات الحديثة مثل الفلسفة النيوتروسوفية، وإدخالها كجزء من المناهج القانونية على مستوى الجامعات والمعاهد الأكاديمية.

و- تنظيم ورش عمل ودورات تدريبية للمحامين والقضاة لتعريفهم بتطبيقات الفلسفة النيوتروسوفية العملية، لتحسين فهمها وإعداد الأفراد لتطبيقها في الحياة العملية.

ز- إنشاء مراكز بحثية متخصصة تدعم دراسات الفلسفة النيوتروسوفية في سياق القانون، وتطوير مشاريع بحثية تستند إلى تحليل القضايا القانونية باستخدام الفلسفة النيوتروسوفية لتعزيز قاعدة المعرفة حول كيفية استخدامها في تطبيقات قانونية عملية، مما يسهم في تبني هذه الفلسفة في الممارسة القانونية.

ح- تكييف القوانين الحالية لاستيعاب الفلسفة النيوتروسوفية، وتعديل التشريعات المحلية والدولية بشكل تدريجي لإدراج مفاهيم الحياد والتعددية في القانون، بحيث يمكن الاستفادة من الفلسفة النيوتروسوفية في إطار العمليات القانونية وتعزيز العدالة القانونية من خلال تطبيق حلول أكثر توازناً وشمولية.

ط- دعم التجارب التطبيقية في القضاء لاختبار فعالية الفلسفة النيوتروسوفية في الممارسة العملية، مثل القضايا البيئية أو حقوق الإنسان، واستخدام الفلسفة النيوتروسوفية كإطار عمل تحليلي في حل القضايا القانونية المعقدة وتقديم نتائج مبتكرة.

من خلال ما سبق نرى أنه لتجاوز التحديات المرتبطة بتطبيق الفلسفة النيوتروسوفية في الدراسات القانونية يجب العمل على دمج هذه الفلسفة ضمن البرامج الأكاديمية والتطبيقات العملية، والتعاون بين الفلاسفة والمتخصصين في القانون، وتطوير أدوات تكنولوجية تدعم هذه الفلسفة، فهذه الخطوات تعزز فعالية الفلسفة النيوتروسوفية في معالجة القضايا القانونية المعقدة وتحقيق العدالة الشاملة.

5. خاتمة:

في ضوء ما تم مناقشته في هذه الورقة يتضح أن الفلسفة النيوتروسوفية تقدم رؤية متميزة يمكن أن تُحدث تحولاً في الطريقة التي يتّم بها تحليل وتفسير القوانين والنصوص القانونية من خلال اعتمادها على الجمع بين الأبعاد الثلاثة للحقيقة، اللا حقيقة، والحياد، حيث تتيح هذه الفلسفة فهماً أعمق وأشمل للنزاعات القانونية وتعزّز من العدالة في النظام القضائي.

وعلى الرغم من الفوائد الواضحة التي يمكن أن تترتب على تطبيق الفلسفة النيوتروسوفية في المجال القانوني فإن التحديات المرتبطة بتكييف هذه الفلسفة مع الأنظمة القانونية التقليدية تظل قائمة، وتتطلب جُهداً جماعياً من الأكاديميين والممارسين لتطوير الأدوات المناسبة لذلك.

وفي النهاية تفتح الفلسفة النيوتروسوفية آفاقًا جديدة للتفكير في القانون وإصلاحه، مما يتطلب المزيد من البحث والتجريب لاختبار فاعليتها في معالجة قضايا العدالة والحقوق في عالم متغير، وخلصت هذه الورقة البحثية إلى مجموعة من النتائج والتوصيات وذلك على النحو التالي:

1.5. النتائج:

أ- توفّر الفلسفة النيوتروسوفية إطارًا مرنًا لتحليل النزاعات القانونية؛ مما يساعد على إيجاد حلول متوازنة تضمن تحقيق العدالة.

ب- تواجه الفلسفة النيوتروسوفية تحديات كبيرة عند تطبيقها في النظام القانوني التقليدي، مثل مقاومة الفكر التقليدي وصعوبة إدماجها مع النصوص القانونية الثابتة.

ج- هناك حاجة إلى توسيع نطاق الفهم القانوني ليشمل المبادئ النيوتروسوفية بما يعزّز من كفاءة النظام القانوني في التعامل مع النزاعات المتداخلة والمعقدة.

2.5. التوصيات:

أ- ضرورة تنظيم برامج تدريبية للقضاة والمحامين لتعريفهم بمبادئ الفلسفة النيوتروسوفية وأهميتها في حل النزاعات القانونية المعقدة.

ب- تطوير النصوص القانونية بما يسمح بإدماج مرونة أكبر تمكن من تطبيق المبادئ النيوتروسوفية.

ج- إجراء المزيد من الدراسات الأكاديمية التي تركز على تطبيقات الفلسفة النيوتروسوفية في مختلف مجالات القانون لتحليل مزاياها وعيوبها بشكل أكثر عمقًا.

د- البدء بتطبيق الفلسفة النيوتروسوفية في مجالات قانونية محدّدة كمرحلة تجريبية لتقييم فعاليتها في معالجة القضايا القانونية.

وأخيراً يمثل تطبيق الفلسفة النيوتروسوفية فرصة لإعادة تشكيل النظام القانوني بما يجعله أكثر قدرة على مواجهة تحديات الواقع الحديث، ولكن نجاح هذا التطبيق يعتمد على تجاوز المعوقات الفكرية والمؤسسية من خلال العمل المشترك بين الباحثين القانونيين وصناع القرار.

6. المراجع:

1) Kachchouh, Mustapha, Laws of Thought in Neutrosophy Logic, Neutrosophic Knowledge, Vol.3, University of New Mexico, 2021, p. 52

2) Kachchouh, Mustapha, Introduction to Neutrosophic Philosophy: Application of Neutrosophic Logic to Philosophy, Neutrosophic Knowledge, Vol.4, University of New Mexico, 2024, p. 72

3) سمارانداكه، فلورنتين، عثمان، صلاح، الفلسفة العربية من منظور نيوتروسوفي، منشأة المعارف، الإسكندرية، 2007

4) Neutrosophic Sets & Systems, {Special Issue: Neutrosophic Advancements And Their Impact on Research in Latin America}, Vol. 62, 2023, p. 166

5) بسطامي، محمود، معضلة الحقيقة في الفكر القانوني مقاربة في فلسفة القانون، المجلة الجنائية القومية، مج67، ع2، 2024

Neutrosophic Knowledge, Vol. 06, 2025
University of New Mexico

Article

A Brief Comparative Study on HyperStructure, Super HyperStructure, and n- Super SuperHyperStructure

Adel Al-Odhari [1, 2] *

[1] Faculty of Education, Humanities and Applied Sciences (Khawlan), Yemen;
[2] Department of Foundations of Sciences, Faculty of Engineering, Sana'a University. Box:13509, Sana'a, Yemen; a.aleidhri@su.edu.ye.

* Correspondence: a.aleidhri@su.edu.ye.

Received: 03 14, 2025; *Accepted:* 03 30, 2025.

Abstract:
This article compares Hyperfunction, Extra Hyperfunction, Super Hyperfunction, and Extra Super Hyperfunction depending on the nth-PowerSet. The nth-PowerSet reflects many real-world problems because any ontological object, like a system, organization, country, or entity, can be represented by systems and subsystems by the nth-PowerSet. This article will review the concepts and investigate some theorems and examples.

Keywords: nth-PowerSet, HyperFunction, Extra HyperFunction, SuperHyperFunction, and Extra SuperHyperFunction.

1. Introduction

The magic of mathematics is generated by the concept of an abstract set and its abstract concepts, such as abstract relations, functions, operations, etc. I will claim that - without hesitation- if we could imagine a human body without a skeleton, then one can imagine mathematics without the concept of a set. This is a sensory image, which provides us with the importance of a set in mathematics. This article represents a modest (or humble) contribution to the field of the hyper-structures of mathematics. The mathematical system of Hyper-Structure Theory appeared in 1934 when French mathematician Marty presented the Hyper-Groups structure. He extended the codomain of the binary operation on a non-empty set "H" into the power set of H. He defined the Hyper-Groups by taking the concept of left/right cosets on the set Hn, instead of the subset of "H" with associative property [4]. At that time, the concept of HyperSet was not known. After more than half a century, namely, in 1991, Barwise and Moss introduced the HyperSet [1]. So, there is no relationship between the HyperOperation and the HyperSet by the common word of hyper, and both have different structures. In 2016, Smarandache proposed the SuperHyperOperation and Super HyperAlgebra and their corresponding Neutrosophic SuperHyperOperation and Neutrosophic Super Hyper-Algebra [8-12]. This article will review HyperFunction and introduce Extra HyperFunction with some theorems. Moreover, we will present some facts about SuperHyperFunction and n-SuperHyperFunction.

2. Power of A Set and N[th]-Power of a Set

The concept of PowerSet was known in the classical books of Set Theory, for example [5,6]. In 2016, Smarandache proposed the nth-PowerSet to construct new mathematical structures such as SuperHyperOperation, Super HyperAlgebra, and Neutrosophic Super HyperAlgebra [8,-12]. This section will review this concept, which will be used in subsequent sections.

Definition 1.2. [5,6] A set is a collection of well-defined objects called elements. This concept is due to Georg Cantor (1845–1918).

Definition 2.2. [5,6] Let H be a universal set. A set $P(H) = \{S: S \subseteq H\}$is called the PowerSet of all subsets of a set H.

Theorem 1.2. [5,6] If H is a finite set of order n, then the order of $P(H)$ is equal to 2^n.

Definition 3.2. [5,6] Let H be any set and n be any positive integer**,** then the set $P_n(H)$ is the set of all n-elements of a subset of H with order $\boldsymbol{n}$.

Definition 4.2. [8,9] (n[th] -Power set**)** Let H be a universe of discourse set, and $n \in \mathbb{Z}^+$. Define the n^{th} -Power set of a set H as follows:

$$
\begin{aligned}
P^n(H) &= P\big(P^{n-1}(H)\big),\\
&= P\big(P^{n-1}(P^{n-2}(H)\big)\\
&= P\big(P^{n-1}P^{n-2}(P^{n-3}(H)\big)\\
&\ \vdots\\
&= P\big(P^{n-1}P^{n-2}P^{n-3}\cdots P^1(P^0(H)\big),
\end{aligned}
$$

where $P^0(H) = H$, and $P^1(H) = P(H)$ with the decreasing order relation of subsets, such as: $P^0(H) \subset P^1(H) \subset P^2(H) \cdots P^{n-1} \subset P^n$. If we excluded the empty set from $P(H)$,Then $P_n^*(H) = P^n(H)\backslash\emptyset$ defined in a similar way. The class $P^n(H)$ plays a crucial role in complex reality.

Theorem 2.2. [8,9] Let X be a discrete finite set of 2 or more elements, and $n \geq 1$ is an integer. Then:

$$P^0(H) \subset P^1(H) \subset P^2(H) \cdots P^{n-1} \subset P^n.$$

Remark. For any subset A, we identify {A} with A.

Example 1.2. Let $H = \{a\}$ be a singleton set. Then the 0-order power of a set H: $P^0(H) = \{a\}$, and The 1st-order power of a set $P^0(H)$: $P^1(H) = \{\emptyset, \{a\}\}$. Also, the 2nd-order power of a set $P^1(H)$: $P^2(H) = P\left(P^1(H)\right) = P\left(\{\emptyset, \{a\}\}\right)$

$P^2(H) = \begin{Bmatrix} \{\emptyset, \{a\}\} \\ \{\emptyset\}, \{\{a\}\} \\ \emptyset \end{Bmatrix}$, and the 3rd-order power of a set $P^2(H)$:

$$P^3(H) = P\left(P^2(H)\right) = P\left(\begin{Bmatrix} \{\emptyset, \{a\}\} \\ \{\emptyset\}, \{\{a\}\} \\ \emptyset \end{Bmatrix}\right)$$

$$P^3(H) = \left\{\begin{array}{c} \begin{Bmatrix} \{\emptyset, \{a\}\} \\ \{\emptyset\}, \{\{a\}\} \\ \emptyset \end{Bmatrix} \\ \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{a\}\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{a\}\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\{a\}\}\}, \{\{\emptyset, \{a\}\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\{\{a\}\}\}, \{\{\emptyset, \{a\}\}\}\} \\ \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\{a\}\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{a\}\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\{\{a\}\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{a\}\}\}\}, \{\{\{\{a\}\}\}, \{\{\emptyset, \{a\}\}\}\} \\ \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{a\}\}\}, \{\{\emptyset, \{a\}\}\} \\ \emptyset \end{array}\right\}$$

To calculate $P^4(H)$, we have the order of $P^4(H) = 2^{16} = 65536$ elements by Theorem 1.2. In this case and beyond, we see the limitations of manual handling in classifying cases, and the role of the machine and algorithms comes to solve some of the required problems. If we exclude the empty set, we get $P_0^*(H) = \{a\}$, and the 1st-order power of a set $P_0^*(H)$: $P_1^*(H) = \{\{a\}\}$, and the 2nd-order power of a set $P_1^*(H)$: $P_2^*(H) = \{\{\{a\}\}\}$. We deduced that,

$$P_n^*(H) = \left\{\begin{array}{c} \underbrace{\{\{\cdots\{a\}\cdots\}\}}_{n+1} \\ \vdots \\ \{\{\{a\}\}\} \\ \{\{a\}\} \\ \{a\}. \end{array}\right\}.$$

Example 2.2. Let $H = \{a, b, c, d\}$, then $P^0(H) = H = \{a, b, c, d\}$, and

$$P^1(H) = \left\{\begin{array}{c} \{a, b, c, d\} \\ \{a, b, c, \}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\} \\ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\} \\ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\} \\ \emptyset \end{array}\right\}, \text{ also,}$$

$$P_1^*(H) = \left\{\begin{array}{c} \{a, b, c, d\} \\ \{a, b, c, \}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\} \\ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\} \\ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\} \end{array}\right\}.$$

If $n = 2$, then by Theorem 1.2 tells us the order of $|P^2(H)| = 2^{16} = 65536$-elements, while the order of $|P_2^*(H)| = 32768$-elements.

3. HyperFunction and Inverse HyperFunction of one variable

The semantics of the word" HyperFunction" in mathematical language refers to the connection between the universal set under consideration, say H. In classical set theory, and its power set, written $\mathrm{P}(H)$, by unary or more operations. In 2016, Smarandache proposed the concept of a Super HyperOperation as an extension of a HyperFunction [8].

1.3. HyperFunction of One Variable

Definition 1.1.3. [11,12] Let H be a universal set, and $P(H)$ be the power set of H. A function $f^h: H \longmapsto P(H)$ is called a HyperFunction, if for all $h \in H$, then there exists an element $E_{\gamma \in J} \in P(H)$ such that $f^h(h) = E_{\gamma \in J}$, for some γ.

Observation. The codomain of HyperFunction includes the empty set. If we consider $P^*(H) = P(H) \backslash \emptyset$, then the codomain of HyperFunction $f^h: H \longmapsto P^*(H)$ does not include the empty set. If H is a finite with order n, i.e.,$O(H) = n$, then the order $\mathrm{O(P}(H)) = 2^n$. The notation $\mathrm{P}(H)^H = \{f^h: H \longmapsto P(H)\}$ represents the set of all hyperfunctions from H into $\mathrm{P}(H)$.

Example 1.1.3. Let $H = \{1,2,3\}$ be a set and $P(H) = \{\emptyset, H, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ is the power set of H. Define the hyperfunction f^h by $f^h: H \longmapsto P(H)$ such that $f^h(1) = \{1,2\}$, $f^h(2) = \{1,3\}$, and $f^h(3) = \{2\}$. Then the $HypDom(f_1^h) = \{1,2,3\}$, and $Hypcd(f_1^h) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2\}\}$.

Example 2.1.3. Let $H = \{h\}$ be a set of singleton elements, and $P(H) = \{\emptyset, H\}$ be the power set of H. The function:

$$f^h(h) = \begin{cases} \emptyset, if\ h \notin H \\ \{h\}, if\ h \in H \end{cases}$$

Or $f^h(h) = \{h\}$, for all $h \in H$ is a hyperfunction.

Example 3.1.3. Let $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ be a finite set, and $P(H)$ be the power set of H. Then the function:

$$f^h(h) = \begin{cases} \emptyset, if\ h \notin H \\ H - \{h\}, if\ h \in H \end{cases}$$

or $f^h(h) = H - \{h\}$, for all $h \in H$ is a hyperfunction. The following theorem tells us the main properties of subsets of H under operations, union, intersection, difference, and subset between any two subsets of H.

Theorem 1.1.3. Consider the hyperfunction $f^h: H \longmapsto P(H)$, A,B⊂H, then:

1. $f^h(A \cup B) = f^h(A) \cup f^h(B)$,
2. $f^h(A \cap B) \subset f^h(A) \cap f^h(B)$,
3. $f^h(A) - f^h(B) \subset f^h(A - B)$, and
4. If $A \subset B$, then $f^h(A) \subset f^h(B)$.

Proof. (1) Assume that $E_{\gamma\in J} \in f^h(A \cup B)$, for some $\gamma \Longrightarrow \exists\alpha \in (A \cup B)$ such that $f^h(\alpha) = E_{\gamma\in J}$ for some γ Since $\alpha \in (A \cup B) \Longrightarrow \alpha \in A \Longrightarrow f^h(\alpha) = E_{\gamma\in J} \in f^h(A)$ for some γ or $\alpha \in (A \cup B) \Longrightarrow \alpha \in B \Longrightarrow f^h(\alpha) = E_{\gamma\in J} \in f^h(B)$, for some γ , therefore, $E_{\gamma\in J} \in f^h(A) \cup f^h(B)$, we deduced that $f^h(A \cup B) \subset f^h(A) \cup f^h(B)$. Conversely, assume that $E_{\gamma\in J} \in f^h(A) \cup f^h(B) \Longrightarrow E_{\gamma\in J} \in f^h(A) \vee E_{\gamma\in J} \in f^h(B) \Longrightarrow \exists\alpha \in A$ such that $f^h(\alpha) = E_{\gamma\in J}$ or $\Longrightarrow \exists\alpha \in B$ such that $f^h(\alpha) = E_{\gamma\in J}$, since $f^h(\alpha) = E_{\gamma\in J}$ and $\alpha \in (A \cup B)$, hence $E_{\gamma\in J} \in f^h(A \cup B)$, that is $f^h(A) \cup f^h(B) \subset f^h(A \cup B)$. Therefore, $f^h(A \cup B) = f^h(A) \cup f^h(B)$.

(2). Suppose that $E_{\gamma\in J} \in f^h(A \cap B) \Longrightarrow \exists\alpha \in (A \cap B)$ such that $f^h(\alpha) = E_{\gamma\in J}$, for some γ Since $\alpha \in (A \cap B) \Longrightarrow \alpha \in A \Longrightarrow f^h(\alpha) = E_{\gamma\in J}$, for some $\gamma \in f^h(A)$ and $\alpha \in (A \cap B) \Longrightarrow \alpha \in B \Longrightarrow f^h(\alpha) = E_{\gamma\in J}$, for some $\gamma \in f^h(B)$, therefore, $E_{\gamma\in J} \in f^h(A) \cap f^h(B)$, we deduced that $f^h(A \cap B) \subset f^h(A) \cap f^h(B)$.

(3). Consider $E_{\gamma\in J} \in \left(f^h(A) - f^h(B)\right) \Longrightarrow E_{\gamma\in J}$, for some $\gamma \in f^h(A)$ and $E_{\gamma\in J}$, for all $\gamma \notin f^h(B)$. Since $E_{\gamma\in J}$, for some $\gamma \in f^h(A) \Longrightarrow \exists\alpha \in A$ such that $f^h(\alpha) = E_{\gamma\in J}$, for some γ. Also, $E_{\gamma\in J}$, for all $\gamma \notin f^h(B)$ $\Longrightarrow f^h(\alpha) \notin f^h(B) \Rightarrow \alpha \notin B$. We have $\exists\alpha \in A$ and $\alpha \notin B$ such that $f^h(\alpha) = E_{\gamma\in J}$, for some γ , therefore, $\alpha \in (A - B)$ such that $f^h(\alpha) = E_{\gamma\in J}$, for some γ. Hence $E_{\gamma\in J}$, for some $\gamma \in f^h(A - B)$. That is, $f^h(A) - f^h(B) \subset f^h(A - B)$.

(4). Suppose that $A \subset B$ and $E_{\gamma\in J} \in f^h(A)$, for some γ, then there exists an $\alpha \in A$ such that $f^h(\alpha) = E_{\gamma\in J}$ for some γ , therefore $\alpha \in B$ such that $f^h(\alpha) = E_{\gamma\in J}$ for some γ, hence $E_{\gamma\in J} \in f^h(B)$, and consequently, $f^h(A) \subset f^h(B)$. The next example illustrates that the previous theorem's equality in parts 2 and 3 does not hold.

Example 4.1.3. Consider the set $\mathrm{H} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ with its power set $\mathrm{P(H)} = \{\emptyset, \{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{b}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}\}$, $A = \{a\}$ and $B = \{b\}$. Define the hyperfunction $f^h: H \longmapsto P(H)$ by:

$$f^h(h) = \begin{cases} \{a\}, if\ h \in H \\ \emptyset, if\ h \notin H \end{cases}.$$

In this case, we get,

$f^h(a) = \{a\}, f^h(b) = \{a\}, f^h(a) \cap f^h(b) = \{a\} \cap \{a\} = \{a\}$, and $A \cap B = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$, $f^h(A \cap B) = f^h(\emptyset) = \emptyset$, so $f^h(A \cap B) \subset f^h(A) \cap f^h(B)$. Also $A - B = \{a\} - \{b\} = \{a\}$. Moreover, $f^h(A - B) = f^h(\{a\}) = \{a\}$, while $f^h(a) - f^h(b) = \{a\} - \{a\} = \emptyset$.

Hence $f^h(A) - f^h(B) \subset f^h(A - B)$. The next theorem provides the properties of the family of subsets of H.

Theorem 2.1.3. Consider the hyperfunction $f^h: H \longmapsto P(H)$, for any family $\{A_{\rho\in J}\}$ of subsets of H, then:

1. $f^h(\bigcup_{\rho\in J} A_\rho) = \bigcup_{\rho\in J} f^h(A_\rho)$, and
2. $f^h(\bigcap_{\rho\in J} A_\rho) \subset \bigcap_{\rho\in J} f^h(A_\rho)$.

Proof. (1) Suppose that $E_{\rho\in J} \in \bigcup_{\rho\in J} f^h(A_\rho) \Leftrightarrow \exists\rho \in J, E_{\rho\in J} \in f^h(A_\rho)$

$\Leftrightarrow \exists\rho \in J, h \in H \ni f^h(h) = E_{\rho\in J}$

$\Leftrightarrow \exists\rho \in J, h \in \bigcup_{\rho\in J} A_\rho \ni f^h(h) = E_{\rho\in J}$

$\Leftrightarrow f^h(h) = E_{\rho\in J} \in f^h(\bigcup_{\rho\in J} A_\rho)$.

(2). Suppose that $E_{\rho\in J} \in f^h(\bigcap_{\rho\in J} A_\rho) \Longrightarrow \exists h \in \bigcap_{\rho\in J} A_\rho \ni f^h(h) = E_{\rho\in J}$

$\Longrightarrow \exists h, \forall\rho \in A_\rho \ni f^h(h) = E_{\rho\in J}$

$\Longrightarrow \exists h, \forall\rho, E_{\rho\in J} \in f^h(A_\rho)$

$\Longrightarrow, E_{\rho\in J} \in \bigcap_{\rho\in J} f^h(A_\rho)$.

Theorem 3.1.3. Let $f^h: H \longmapsto P(H)$ be a hyperfunction and $A, B \subset H$, then f^h is a one-to-one hyperfunction if and only if $f^h(A \cap B) = f^h(A) \cap f^h(B)$.

Proof. Let $f^h: H \longmapsto P(H)$ be a hyperfunction and $A, B \subset H$. Suppose that f^h is a one-to-one hyperfunction. To show that $f^h(A \cap B) = f^h(A) \cap f^h(B)$.

Let $E_{\rho\in J} \in f^h(A \cap B) \Leftrightarrow \exists h \in (A \cap B) \ni f^h(h) = E_{\rho\in J}$, for some ρ.

$\Leftrightarrow \exists h \in A \ni f^h(h) = E_{\rho\in J}$, for some $\rho \wedge \exists h \in B \ni f^h(h) = E_{\rho\in J}$, for some ρ.

$\Leftrightarrow E_{\rho\in J} \in f^h(A) \wedge E_{\rho\in J} \in f^h(B)$.

$\Leftrightarrow E_{\rho\in J} \in (f^h(A) \cap f^h(B))$.

Conversely, suppose that $f^h(A \cap B) = f^h(A) \cap f^h(B)$.

To show that the hyperfunction $f^h: H \longmapsto P(H)$ is a one-to-one. Let $h_1, h_2 \in H$ with $h_1 \neq h_2$ such that $f^h(h_1) = f^h(h_2) = E_{\rho\in J}$. Consider $A = h_1, B = h_2$, we get,

$f^h(A) \cap f^h(B) = f^h(h_1) \cap f^h(h_2) = E_{\rho\in J} \neq f^h(A \cap B) = f^h(\emptyset)$.

Definition 2.1.3. Let $f^h: H \longmapsto P(H)$ be a hyperfunction and $g^h: P(H) \to P^2(H)$ be a hyperfunction. Then the composition of the hyperfunction $g^h \circ f^h: H \longmapsto P^2(H)$ such that

$(g^h \circ f^h)(h) = g^h(f^h(h)), \forall h \in H$.

Example 4.1.3. Consider the set $\mathrm{H} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ with its power set $\mathrm{P(H)} = \{\emptyset, \{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{b}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}\}$, and

$$\mathrm{P}^2(\mathrm{H}) = \left\{\begin{array}{c} \{\{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}\} \\ \{\{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{a,b\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}\}, \{\{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}\} \\ \{\{\emptyset\}, \{\{a\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{b\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{a,b\}\}\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a,b\}\}, \{\{b\}, \{a,b\}\} \\ \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\} \\ \emptyset \end{array}\right\}$$

Define $f^h: H \longmapsto P(H) \ni f^h(a) = \{b\}$, $f^h(b) = \{a, b\}$, and $g^h: P(H) \to P^2(H) \ni g^h(\{\emptyset\}) = \emptyset$, $g^h(\{a\}) = \{\{b\}\}$, $g^h(\{b\}) = \{\{\text{a}\}\}$ and $g^h(\{a, b\}) = \{\{\text{b}\}\}$. Then the composition of the hyperfunction $g^h \circ f^h$ is given by:

$(g^h \circ f^h)(a) = g^h(f^h(a)) = g^h(\{\text{b}\}) = \{\{\text{a}\}\}$, and $(g^h \circ f^h)(b) = g^h(f^h(b)) = g^h(\{\text{a}, \text{b}\}) = \{\{\text{b}\}\}$.

Definition 3.1.3. Let H be a universe of discourse set, $n \in \mathbb{Z}^+$, and $P^n(H)$ is n^{th}-Power set of a set H. Then there exists a sequence of hyperfunctions $f_i^h, i = 1,2, \dots, n$.

$f_1^h: H \to P(H), f_2^h: P(H) \longrightarrow P^2(H), f_3^h: P^2(H) \longrightarrow P^3(H), \dots, f_n^h: P^{n-1}(H) \longrightarrow P^n(H)$ such that

$$(f_n^h \circ f_{n-1}^h \circ \dots \circ f_2^h \circ f_1^h)(x) = (f_n^h \circ f_{n-1}^h \circ \dots \circ f_2^h)(f_1^h(x))$$

$$= (f_n^h \circ f_{n-1}^h \circ \dots)\left(f_2^h\left(f_1^h(x)\right)\right)$$

$$=\vdots$$

$$= (f_n^h)\left(f_{n-1}^h\left(\dots f_2^h(f_1^h(x))\right)\right),\ \forall\, x \in H.$$

2.3. Inverse HyperFunction of One Variable

Definition 1.2.3. Let H be a universal set, and $\mathrm{P}(H)$ be the power set of H. A function $f_h^{-1}: P(H) \longmapsto H$ is called the inverse hyperfunction, if for all γ, $E_{\gamma \in J} \in P(H)$, then there exists an element $h \in H$ such that $f_h^{-1}(E_{\gamma \in J}) = h$.

Observation. If $f^h: H \longmapsto P(H)$ is a hyperfunction, then $f_h^{-1}: P(H) \longmapsto H$ maybe not inverse hyperfunction by the following example.

Example 1.2.3. Let $H = \{1,2,3\}$ be a set, and $P(H) = \{\emptyset, H, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ is the power set of H. Consider $f^h: H \longmapsto P(H)$ such that $f^h(1) = f^h(2) = f^h(3) = \{2\}$. Then the $f_h^{-1}: P(H) \longmapsto H$ is given by: $f_h^{-1}(\{2\}) = f_h^{-1}(\{2\}) = f_h^{-1}(\{3\}) = \{1\}$. f_h^{-1} is not an inverse hyperfunction.

Example 2.2.3. Let $H = \{1,2,3\}$ be a set, and $P(H) = \{\emptyset, H, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ is the power set of H. Consider $f^h: H \longmapsto P(H)$ as in example 1.1.3. Then the $f_h^{-1}: P(H) \longmapsto H$ is given by: $f_h^{-1}(\{1,2\}) = 1$, $f_h^{-1}(\{1,3\}) = 2$, and $f_h^{-1}(\{2\}) = 3$. f_h^{-1} is an inverse hyperfunction.

Example 3.2.3. Let $H = \{1,2,3\}$ be a set, and $P(H) = \{\emptyset, H, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ is the power set of H. Here, some inverse HyperFunction are defined by:

1. $f_h^{-1}(A) = \begin{cases} H - A. if\ A \neq \emptyset \\ 1, if\ A = \emptyset \end{cases}$. Or
2. $f_h^{-1}(A) = \begin{cases} the\ smallest\ of\ A. if\ A \neq \emptyset \\ 2, if\ A = \emptyset \end{cases}$. Or

3. $f_h^{-1}(A) = \begin{cases} the\ largest\ of\ A. if\ A \neq \emptyset \\ 3, if\ A = \emptyset \end{cases}$

Theorem 1.2.3. If H is an infinite universal set or discourse, then there exists a denumerable set S such that $S \subset H$.

Proof. Let H be an infinite universal set or discourse, and $P(H)$ is a power set of a set H. Define the inverse hyperfunction $f_h^{-1}: P(H) \longmapsto H$ as follows:

$$f_h^{-1}(H) = h_1,$$
$$f_h^{-1}(H - \{h_1\}) = h_2,$$
$$f_h^{-1}(H - \{h_1, h_2\}) = h_3,$$
$$f_h^{-1}(H - \{h_1, h_2, h_3\}) = h_4,$$
$$\vdots$$
$$f_h^{-1}(H - \{h_1, h_2, h_3, \dots, h_n\}) = h_{n+1}$$

Since the set is infinite, hence the set $H - \{h_1, h_2, h_3, \dots, h_n\} \neq \emptyset$, for any $n \in \mathbb{N}$. Since the inverse hyperfunction f_h^{-1} is a choice function, we get $h_n \neq h_k$, for all $n \neq k$, we conclude that the set $S = \{h_1, h_2, \dots, h_n, h_{n+1}, \dots\}$ is a denumerable subset of H, and the elements h_n are distinct according to the hyperfunction f_h^{-1} is a choice function that chooses one element from H, say $f_h^{-1}(H) = h_1$, and so on from other sets. The next theorem gives us some properties of hyperfunctions.

4. Extra HyperFunction of One Variable

Definition 1.4. Let H be a universal set, and $P(H)$ be the power set of H. A function $f^{eh}: P(H) \longmapsto P(H)$ is called an extra hyperfunction, if for all $A_{\gamma \in J} \in P(H)$. Then there exists an element $B_{\delta \in I} \in P(H)$ such that $f^{eh}(A_{\gamma \in J}) = B_{\delta \in I}$. This is an extra hyperfunction including the empty set.

Definition 2.4. [8,9,11,12] Let H be a universal set, and $P^*(H)$ be the power set of H. A function $f^{eh}: P^*(H) \longmapsto P^*(H)$ is called an extra hyperfunction, if for all $A_{\gamma \in J} \in P^*(H)$. Then there exists an element $B_{\delta \in I} \in P^*(H)$ such that $f^{eh}(A_{\gamma \in J}) = B_{\delta \in I}$. This is an extra hyperfunction that does not include the empty set, where $P^*(H) = P(H) \backslash \emptyset$.

Example 1.4. Let $H = \{1,2,3\}$ be a set and $P(H) = \{\emptyset, H, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ is the power set of H. Define the extra hyperfunction f^{eh} by $f^{eh}: P(H) \longmapsto P(H)$ such that $f^{eh}(A_{\gamma \in J}) = A^c{}_{\gamma \in J}$, for all $A_{\gamma \in J} \in P(H)$. f^{eh} is an extra hyperfunction.

Example 2.4. Let $H = \{a, b\}$ be a set and $P(H) = \{\emptyset, H, \{a\}, \{b\}\}$ is the power set of H. Define the extra hyperfunction $f^{eh}: P(H) \longmapsto P(H)$ such that

$f^{eh}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{eh}(\{a\}) = \{a\}, f^{eh}(\{b\}) = \{b\}$, and $f^{eh}(H) = H$ is an extra hyperfunction.

Theorem 1.4. Let H be a universal set, and $\mathrm{P}(H)$ be the power set of H. If $f: H \longrightarrow H$ is a one-to-one function, then the extra hyperfunction $f^{eh}: P(H) \longmapsto P(H)$ is a one-to-one.

Proof. Case-1. If $H = \emptyset$, then $P(H) = \{\emptyset\}$. In this case, $f^{eh}: P(H) \longmapsto P(H)$ is a one-to-one function, because no two different elements of $P(H)$ can have the same image as the set $P(H)$ consists of only one element.

Case-2. Suppose that $H \neq \emptyset$, then $P(H)$ has at least two elements. Let's say A and B, and $A \neq B$. Then there exists $x \in A$ and $x \notin B \Longrightarrow f(x) \in f(A)$ and $f(x) \notin f(B)$. Since f is a one-to-one, we get $f(A) \neq f(B)$, therefore, $f^{eh}(A) \neq f^{eh}(B)$. Hence f^{eh} is a one-to-one.

Theorem 2.4. Let H be a universal set, and $\mathrm{P}(H)$ be the power set of H. If $f: H \longrightarrow H$ is a function, then the extra hyperfunction $f^{eh}: P(H) \longmapsto P(H)$ preserving the elementary set operations as follows:

1. $f^{eh}\left(\bigcup_{\rho \in J} A_\rho\right) = \bigcup_{\rho \in J} f^{eh}(A_\rho)$,
2. $f^{eh}\left(\bigcap_{\rho \in J} A_\rho\right) = \bigcap_{\rho \in J} f^{eh}(A_\rho)$, and
3. $f^{eh}(A - B) = f^{eh}(A) - f^{eh}(B)$.

Proof (1). Suppose that $f^{eh}(E) \in f^{eh}\left(\bigcup_{\rho \in J} A_\rho\right) \Leftrightarrow E \in \bigcup_{\rho \in J} A_\rho$

$\Leftrightarrow E \in A_\rho$, for some $\rho \in J$.

$\Leftrightarrow f^{eh}(E) \in f^{eh}(A_\rho)$, for some $\rho \in J$.

$\Leftrightarrow f^{eh}(E) \in \bigcup_{\rho \in J} f^{eh}(A_\rho)$, for some $\rho \in J$. Hence,

$f^{eh}\left(\bigcup_{\rho \in J} A_\rho\right) = \bigcup_{\rho \in J} f^{eh}(A_\rho)$.

(2). Consider $f^{eh}(E) \in f^{eh}\left(\bigcap_{\rho \in J} A_\rho\right)$

$\Leftrightarrow E \in \bigcap_{\rho \in J} A_\rho$

$\Leftrightarrow E \in A_\rho$, for all $\rho \in J$.

$\Leftrightarrow f^{eh}(E) \in f^{eh}(A_\rho)$, for all $\rho \in J$.

$\Leftrightarrow f^{eh}(E) \in \bigcap_{\rho \in J} f^{eh}(A_\rho)$, for all $\rho \in J$. Therefore, $f^{eh}\left(\bigcap_{\rho \in J} A_\rho\right) = \bigcap_{\rho \in J} f^{eh}(A_\rho)$.

(3). Assume that $f^{eh}(E) \in f^{eh}(A - B) \Leftrightarrow E \in (A - B)$

$\Leftrightarrow E \in A \wedge E \notin B$

$\Leftrightarrow f^{eh}(E) \in f^{eh}(A) \wedge f^{eh}(E) \notin f^{eh}(B)$

$\Leftrightarrow f^{eh}(E) \in (f^{eh}(A) - f^{eh}(B))$. We deduced that,

$f^{eh}(A - B) = f^{eh}(A) - f^{eh}(B)$.

5. Super HyperFunction and Extra Super HyperFunction of One Variable

Definition 1.5. [3,8,9,11,12] Let H be a universal set, and $P^n(H)$ be the n[th]-PowerSet of H. A function $f^s\colon H \longmapsto P^n(H)$ is called a super hyperfunction, if for all $h \in H$. Then there exists an element $E_{\gamma\in J} \in P^n(H)$ such that $f^s(h) = E_{\gamma\in J}$, where $n \geq 2$. When $n = 1$, then $f^s(h) = f^h(h)$. The codomain of f^s is includes the empty set. But when $f^s\colon H \longmapsto P_n^*(H) = P^n(H)\backslash\emptyset$, then the codomain of f^s does not contain the empty set. The following theorem generalizes from hyperfunction to super hyperfunction, namely, Theorem 1.3.

Theorem 1.5. Consider the super hyperfunction $f^s\colon H \longmapsto P^n(H)$, A,B⊂H, then:

1. $f^s(A \cup B) = f^s(A) \cup f^s(B)$,
2. $f^s(A \cap B) \subset f^s(A) \cap f^s(B)$,
3. $f^s(A) - f^s(B) \subset f^s(A - B)$, and
4. If $A \subset B$, then $f^s(A) \subset f^s(B)$.

Proof. By the same argument as Theorem 1.3. The following theorem is a generalization of Theorem 2.3.

Theorem 2.5. Consider the super hyperfunction $f^s\colon H \longmapsto P^n(H)$, for any family $\{A_{\rho\in J}\}$ of subsets of H, then:

1. $f^s\left(\bigcup_{\rho\in J} A_\rho\right) = \bigcup_{\rho\in J} f^s(A_\rho)$, and
2. $f^s\left(\bigcap_{\rho\in J} A_\rho\right) \subset \bigcap_{\rho\in J} f^s(A_\rho)$.

Proof. By a similar method to Theorem 2.3.

Theorem 3.5. Let $f^s\colon H \longmapsto P^n(H)$ be a super hyperfunction and $A, B \subset H$, then f^s is a one-to-one SuperHyperFunction if and only if $f^s(A \cap B) = f^s(A) \cap f^s(B)$.

Proof. By a similar method to Theorem 3.3.

Definition 2.5.[3, 8-12,] Let H be a universal set, and $P^n(H)$ be the nth-PowerSet of H. A function $f^{es}\colon P^m(H) \longmapsto P^n(H)$ is called an Extra SuperHyperFunction, or n-SuperHyperFunction if for all $A_{\gamma\in J} \in P^n(H)$. Then there exists an element $B_{\delta\in I} \in P^n(H)$ such that $f^s\left(A_{\gamma\in J}\right) = B_{\delta\in I} \in P^n(H)$, where m, n ≥0 . The following remark gives us the relationship between f^h, f_h^{-1}, f^{es}, f^s, and f^{es}.

Remark.

- If $m = 0\ and\ n = 0$, then f^{es} maybe a classical identity function, an ordinary function, or a permutation function.
- If $m = 0\ and\ n = 1$, then $f^{es} = f^h$.
- If $m = 0\ and\ n \geq 2$, then $f^{es} = f^s$.
- If $m = 1\ and\ n = 0$, then $f^{es} = f_h^{-1}$.

- If $m = 1 \; and \; n = 1$, then $f^{es} = f^{eh}$.
- If $m = 1 \; and \; n \geq 2$, then we always get f^{es}.

Example 1.5. Let $H = \{a, b\}$ and $P^0(H) = H = \{a, b\}, P^1(H) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, then

$$P^2(H) = \left\{ \begin{array}{c} \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \\ \{\{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{a, b\}\}\}, \{\{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a, b\}\}\} \\ \{\{\emptyset\}, \{\{a\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{b\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{a, b\}\}, \{, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}\}, \{\{\{a\}\}, \{\{a, b\}\}\}, \{\{\{b\}\}\}, \{\{a, b\}\}\} \\ \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a, b\}\} \\ \emptyset \end{array} \right\}$$

Define a super hyperfunction as follows: $f^s : H \longmapsto P^2(H)$ such that $f^s(a) = \{b\}$, and $f^s(b) = \{b\} = \{\{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a, b\}\}\}$. Also, we can define an extra super hyperfunction or 2-SuperHyperFunction as $f^{es} : P^1(H) \longmapsto P^2(H)$ such that $f^{es}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{es}(\{a\}) = \{\{b\}\}$, $f^{es}(\{b\}) = \{\{a\}\}$, and $f^{es}(\{a, b\}) = \{\{\{a\}\}, \{\{a, b\}\}\}$.

Theorem 3.5. Consider the extra super hyperfunction $f^{es} : P^n(H) \longmapsto P^n(H)$, $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subset P^n(H)$, then:

1. $f^{es}(A \cup B) = f^{es}(A) \cup f^{es}(B)$,
2. $f^{se}(A \cap B) \subset f^{es}(A) \cap f^{es}(B)$,
3. $f^{es}(A) - f^{es}(B) \subset f^{es}(A - B)$, and
4. If $A \subset B$, then $f^{es}(A) \subset f^{es}(B)$.

Theorem 3.5 is a generalization of Theorem 1.5 for a fixed $n \geq 2$.

Proof. By the same argument as Theorem 1.3.

Theorem 4.5. Consider the extra super hyperfunction $f^{es} : P^n(H) \longmapsto P^n(H)$, for any family $\{A_{\rho \in J}\}$ of subsets of $P^n(H)$, then:

1. $f^{es}(\bigcup_{\rho \in J} A_\rho) = \bigcup_{\rho \in J} f^{es}(A_\rho)$, and
2. $f^{es}(\bigcap_{\rho \in J} A_\rho) \subset \bigcap_{\rho \in J} f^{es}(A_\rho)$.

Theorem 4.5 is an extension of Theorem 2.5, and the proof is similar to that of Theorem 2.3.

. Conclusions:

This paper presents a brief comparative study of hyperfunction, extra hyperfunction, and extra super hyperfunction, presenting some characteristics for developing the concepts mentioned in the reference list.

Funding: There is no financial funding for this research.

Acknowledgments: The author is grateful to the editorial and reviewers, as well as the corresponding author, who offered advice, assessment, and checking during the study period.

Conflicts of Interest: There is no conflict of interest for the research.

References

1. Barwise, J., & Moss, L. (1991). Hypersets. *The Mathematical Intelligencer, 13*, 31-41. doi:10.1007/BF03028340
2. Extension of G-Algebras to SuperHyper G-Algebras. (2023). *Neutrosophic Sets and Systems, 55*.
3. Fujita, T. (2024, December). *A Theoretical Exploration of Hyperconcepts: Hyperfunctions, Hyperrandomness, Hyperdecision-Making, and Beyond (Including a Survey of Hyperstructures).* doi: 10.13140/RG.2.2.21658.96964
4. Marty, F. (1934). Sur une Généralisation de la Notion de Groupe. *Huitième Congrès des Mathématiciens Scand*, 45-49.
5. Pinter, C. C. (2014). *A Book of SET THEORY.* Mineola, New York: DOVER PUBLICATIONS, INC. Retrieved from www.doverpublications.com
6. Roitman, J. (2011). *Introduction to Modern Set Theory.* Retrieved from https://www.people.vcu.edu/~clarson/roitman-set-theory.pdf
7. Smaracenche, Florentin. (2020). Extension of HyperGraph to n-SuperHyperGraph and to Plithogenic n-SuperHyperGraph, and Extension of HyperAlgebra to n-ary (Classical-/Neutro-/Anti-) HyperAlgebra. *Neutrosophic Sets and Systems, 33*, 290–296.
8. Smarandache, F. (2016). SuperHyperAlgebra and Neutrosophic SuperHyperAlgebra. In F. Smarandache, *Nidus Idearum* (II ed., pp. 107-108). Brussels: Pons Publishing.
9. Smarandache, F. (2022). Introduction to SuperHyperAlgebra and Neutrosophic SuperHyperAlgebra. *Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras*, 1-8.
10. Smarandache, F. (2022). Introduction to the n-SuperHyperGraph - the most general form of graph today. *Neutrosophic Sets and Systems, 48*, 483-485.
11. Smarandache, F. (2022). The SuperHyperFunction and the Neutrosophic SuperHyperFunction (revisited again). *Neutrosophic Sets and Systems, 49*, 594-600. doi:10.5281/zenodo.6466524
12. Smarandache, F. (2023). SuperHyperFunction, SuperHyperStructure, Neutrosophic SuperHyperFunction and Neutrosophic SuperHyperStructure: Current understanding and future directions. *Neutrosophic Systems with Applications, 12*, 68-76. doi:https://orcid.org/0000-0002-5560-5926

Neutrosophic Knowledge, Vol. 06, 2025
University of New Mexico

Article

Expanding the Horizons of Philosophy through Neutrosophic Movements

Florentin Smarandache [1] *

[1]University of New Mexico, Gallup Campus, NM 87301, USA, fsmarandache@gmail.com

* Correspondence: fsmarandache@gmail.com

Received: 03 30, 2025; *Accepted:* 04 08, 2025.

Abstract:
Philosophy is characterized by its rich diversity of methods and schools of thought. Beneath this diversity, however, lies a subtle but profound unity: the interrelation of affirmation, negation, and neutrality. A neutrosophic perspective reveals that philosophical movements are not *isolated ruptures* from tradition but are *dynamic threads* interwoven into a larger intellectual tapestry. This short essay birelfy examines six philosophical movements—revisionism, inspirationalism, recur-rentism, sophisticalism, rejectivism, and paradoxism—through the lens of neutrosophy, illustrating how each contributes to the evolving landscape of philosophy.
Keywords. Neutrosophy, Philosophical Movements, Revisionism, Inspirationalism, Recurrentism, Sophisticalism, Rejectivism, Paradoxism, Philosophy of Contradiction, Affirmation, Negation, Neutrality, Philosophical Diversity, Existentialism, Dynamic Philosophy.

1. *Revisionism*: Philosophy as a *Summum Bonum*

Revisionism calls for a comprehensive reexamination of all philosophical systems, thinkers, and schools, with the aim of redefining philosophy as a unified *summum bonum*—the highest good.[1] From a neutrosophic standpoint, this movement highlights the necessity of engaging with prior systems through a triadic process of affirmation (T), negation (F), and neutrality (I).
A revisionist approach does not discard the past but reinterprets it. For example, revisiting metaphysical paradigms such as Aristotle's teleology or Kant's transcendental idealism requires

[1] [1] Gkotzaridis, Evi (2001). "Revisionism and Postmodernism." *Études irlandaises*, 26-1:131-157. DOI: 10.3406/irlan.2001.1561. Available online: www.persee.fr/doc/irlan_0183-973x_2001_num_26_1_1561. Accessed 10 February 2025.

recognizing their strengths, weaknesses, and neutral contributions.[2] In this way, revisionism views philosophy not as a hierarchical contest among competing schools but as a continuum of insights.

2. *Inspirationalism*: The Quest for Originality

Inspirationalism seeks to generate originality by drawing upon the past and present, fostering a creative synthesis between tradition and innovation.[3] From a neutrosophic perspective, this process involves exploring the interstitial spaces between influence and originality.

Every original concept carries the imprint of its inspirations. Neutrosophy reframes these imprints not as constraints but as neutral zones of potential, enabling the fusion of old and new into transformative insights. Heidegger's existentialism, informed by ancient Greek philosophy and contemporary phenomenology, exemplifies this dynamic, blending affirmation of tradition with groundbreaking innovation.

3. *Recurrentism*: The Infinite Cycle of Ideas

Recurrentism posits that philosophical ideas arise from a continuous cycle, where each idea builds upon its predecessors and seeds future developments.[4] Neutrosophy enriches this perspective by emphasizing that these cycles are neither strictly linear nor deterministic but involve oscillations across affirmations, negations, and neutral zones of reinterpretation.

For instance, the Enlightenment's emphasis on reason emerged as a response to medieval scholasticism, which itself drew from classical philosophy. Each recurrence reinterprets prior insights, creating a dynamic interplay between continuity and novelty. Neutrosophically, these cycles also encompass neutral zones—moments where ideas are neither wholly derivative nor entirely innovative but exist as a fusion of both.

4. *Sophisticalism*: Embracing Ambiguity and Abstraction

Sophisticalism celebrates the ambiguous, abstract, and often unintelligible aspects of thought, framing obscurity as a philosophical virtue. While this approach might seem esoteric or indulgent, a neutrosophic lens reinterprets it as an exploration of the indeterminate spaces between clarity and mystery.

---

[2] 2 The Editors of Encyclopaedia Britannica. "revisionism". *Encyclopedia Britannica*, 7 Aug. 2008, https://www.britannica.com/topic/revisionism-Marxism. Accessed 16 February 2025.

[3] 3 "Inspirationism, *N.*" *Oxford English Dictionary*, Oxford UP, December 2023, https://doi.org/10.1093/OED/9430949387. Accessed 16 February 2025.

[4] 4 Correia, Fabrice; Rosenkranz, Sven (2011). "Recurrentism." In: *As Time Goes By. Eternal facts in an Ageing Universe*, pp. 87–94. Brill. DOI: https://doi.org/10.30965/9783957438898_008.

Ambiguity, far from being a weakness, reflects the inherent complexity of reality. The sophistical approach, when viewed neutrosophically, becomes a powerful tool for probing the boundaries of human understanding. [Smarandache, Vladutescu]

5. *Rejectivism*: The Dialectic of Rejection

Rejectivism is characterized by the impulse to reject existing philosophical systems as a means of establishing new ones.[5] While this may appear purely oppositional, neutrosophy reveals its inherent duality: rejection is both a negation of external ideas and an affirmation of alternative perspectives, mediated by a neutral space of transformation.

For example, Spinoza's rejection of Cartesian dualism was not merely a critique but a constructive act, resulting in a monistic framework that redefined substance and mind. In this sense, rejectivism is not destructive but reconstructive, reshaping philosophy through a dynamic process of affirmation and negation.[6]

6. *Paradoxism*: The Implicit Contradiction

Paradoxism asserts that every philosophical idea is simultaneously true and false, embracing contradiction as a fundamental aspect of reality.[7]

This perspective aligns seamlessly with neutrosophy, which recognizes contradiction as intrinsic to nature. Paradoxism's core principle—"nothing is non-contradictory"—challenges the binary logic of classical thought.

Consider Zeno's paradoxes, which both deny and affirm the coherence of motion. Paradoxism does not attempt to resolve contradictions but instead treats them as essential truths.

<u>Neutrosophy extends this approach, showing that contradictions are not obstacles but opportunities to explore the deeper complexities of thought.</u>

7. Conclusion: Toward a Holistic Philosophy

Each of these movements—*revisionism, inspirationalism, recurrentism, sophisticalism, rejectivism, and paradoxism*—offers a unique lens through which to understand the evolution of philosophy. Through a neutrosophic perspective, these movements reveal that no idea or system is wholly true or false; all exist within a continuum of affirmation, negation, and neutrality. By transcending the silos of traditional schools of thought, neutrosophy fosters a deeper engagement with ideas, not as isolated entities but as dynamic elements.

---

[5] [5] Martin, Ben (2016). "Rejectivism and the Challenge of Pragmatic Contradictions." *Disputatio* 8 (43):260.

[6] [6] Humberstone, Lloyd (2000). "The revival of rejective negation." *Journal of Philosophical Logic* 29 (4):331-381.

[7] [7] "pARadOXisM – the Last Literary, Artistic, Philosophic and Scientific Vanguard of the Second Millennium", edited by C. Le, https://fs.unm.edu/a/paradoxism-en.htm

References

[1] [Correia, Rosenkranz] Correia, Fabrice; Rosenkranz, Sven (2011). **As Time Goes By. Eternal facts in an Ageing Universe**. Brill.

[2] [Gkotzaridis] Gkotzaridis, Evi (2001). "Revisionism and Postmodernism." *Études irlandaises*, 26-1:131-157. DOI: 10.3406/irlan.2001.1561. Available online: www.persee.fr/doc/irlan_0183-973x_2001_num_26_1_1561.

[3] [Humberstone] Humberstone, Lloyd (2000). "The revival of rejective negation." *Journal of Philosophical Logic* 29 (4):331-381.

[4] [Khemlani et al.] Khemlani, S., Orenes, I., & Johnson-Laird, P. N. (2012). "Negation: A theory of its meaning, representation, and use." *Journal of Cognitive Psychology*, *24*(5), 541–559. https://doi.org/10.1080/20445911.2012.660913

[5] [Kosko] Kosko, Bart (1993). **Fuzzy Thinking: The New Science of Fuzzy Logic**. New York: Hyperion.

[6] [Incurvati, Schlöder] Incurvati, L.; Schlöder, J. J. (2017). "Weak Rejection." *Australasian Journal of Philosophy*, *95*(4), 741–760. https://doi.org/10.1080/00048402.2016.1277771

[7] [Lewis] Lewis, David (1976). "The Paradoxes of Time Travel." *American Philosophical Quarterly* 13 (2):145-152.

[8] [Martin] Martin, Ben (2016). "Rejectivism and the Challenge of Pragmatic Contradictions." *Disputatio* 8 (43):253-267.

[9] [Schaffer] Schaffer, Jonathan (2016). "Grounding in the image of causation." *Philosophical Studies* 173 (1):49-100.

[10] [Smarandache, Vladutescu] Smarandache, Florentin; Vladutescu, Stefan (2013). **Neutrosophic emergencies and incidences**. Lambert Academic Publishing. Available online: https://www.vixra.rxiv.org/pdf/1411.0167v1.pdf

[11] [Smarandache 1998] Smarandache, F. (2007). **A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability and Statistics**, 6th edition. Ann Arbor: InfoLearnQuest. Retrieved from the The University of New Mexico Digital Repository, https://digitalrepository.unm.edu/math_fsp/163/

[12] [Smarandache 2002] Smarandache, Florentin (2002). "Neutrosophy, A New Branch of Philosophy." *Multiple Valued Logic*, 3: 297-384. Retrieved from the The University of New Mexico Digital Repository, https://digitalrepository.unm.edu/math_fsp/24

[13] [Smarandache 2013] Smarandache, Florentin (2005). **Introduction to Neutrosophic Measure, Neutrosophic Integral, and Neutrosophic Probability**. Craiova, Romania: Sitech. https://digitalrepository.unm.edu/math_fsp/34

[14] [Swiderski] Swiderski, Jan (2024). "Varieties of Metaphysical Coherentism." *Erkenntnis* 89 (5):1861-1886.

[15] [Tahko] Tahko, Tuomas E. (2023). "Fundamentality." *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

[16] [Tegmark] Tegmark, Max (2018). **Life 3.0: Being Human in the Age of Artificial Intelligence**. New York: Vintage Books.

[17] [Textor] Textor, Mark (2011). "Is 'no' a Force-Indicator? No!" *Analysis*, 71(3): 448–56. JSTOR, http://www.jstor.org/stable/41237350.

[18] [Wilhelm] Wilhelm, Isaac (2024). "Explanatory circles." *Studies in History and Philosophy of Science* Part A 108 (C):84-92.

[19] [Williamson] Williamson, Timothy (2000). **Knowledge and its limits**. Oxford University Press.

[20] [Žižek] Žižek, Slavoj (1989). **The Sublime Object of Ideology**. Verso.

Neutrosophic Knowledge, Vol. 6, 2025

University of New Mexico

Toward a Unified Framework for Knot Theory, Hyperknot Theory, and Superhyperknot Theory via Superhyperstructures

Takaaki Fujita[1] *

[1] Independent Researcher, Shinjuku, Shinjuku-ku, Tokyo, Japan. Takaaki.fujita060@gmail.com

*Correspondence: Takaaki.fujita060@gmail.com

Received: *03 01, 2025;* Accepted: *05 20, 2025*

Abstract. Many real-world concepts exhibit hierarchical organization, and mathematics has explored numerous hierarchical structures. Mathematical frameworks can often be extended into hyperstructures and superhyperstructures by employing the powerset and the n-th iterated powerset constructions (cf. [21,22]). The concept of SuperHyperStructures was defined by F. Smarandache and has been studied in the context of graphs, algebraic structures, and functions [19,22,25]. These extensions are particularly well suited for modeling hierarchical relationships across diverse conceptual domains.

Knot theory studies smooth embeddings of circles in three-dimensional space, classifying knots by algebraic and geometric invariants and exploring their topological properties. Beyond its intrinsic theoretical interest, knot theory has found applications in chemistry, computer science, and other fields.

In this paper, we develop HyperKnot Theory and SuperHyperKnot Theory as extensions of classical knot theory. We provide rigorous definitions, examine fundamental properties, and present illustrative examples of these new frameworks. We anticipate that this work will foster further advances in both the mathematical theory and practical applications of knots.

Keywords: Hyperstructure, SuperHyperstructure, Knot Theory, HyperKnot Theory, SuperHyperKnot Theory

---

1. Preliminaries and Definitions

This section provides an overview of the fundamental concepts and definitions essential for the discussions in this paper. Throughout this paper, we assume that all concepts and sets under consideration are finite.

1.1. *Classical Structures, Hyperstructures, and n-Superhyperstructures*

A *Classical Structure* is a fundamental algebraic framework defined over a base set. A *Hyperstructure* generalizes this notion by defining operations on the powerset of the base set [1,3,16]. An *n-Superhyperstructure* further extends the idea by employing the n-th iterated powerset [2,6,17,24]. Intuitively, each iteration applies the powerset operation to the result of the previous level [7,9,23].

The concept of SuperHyperStructures was introduced by F. Smarandache and has been studied in various mathematical contexts, including graphs, algebraic structures, and functions [19, 22, 25]. The parameter n is assumed to be a natural number. Related notions, such as superhyperalgebras [5, 20] and superhypergraphs [8, 10, 11, 19], have also been explored. Relevant definitions and illustrative examples follow.

Definition 1.1 (Set)**.** [12] A *set* is a well-defined collection of distinct objects, called its *elements*. We write $x \in A$ to indicate that x is an element of the set A.

Definition 1.2 (Subset)**.** [12] Given two sets A and B, we say that A is a *subset* of B, written $A \subseteq B$, if every element of A is also an element of B:

$$A \subseteq B \iff \forall x\,(x \in A \implies x \in B).$$

Definition 1.3 (Base Set)**.** A *base set* S is the underlying set from which more complex constructions—such as powersets and hyperstructures—are built:

$$S = \{\, x \mid x \text{ belongs to the domain of interest}\}.$$

All elements of $\mathcal{P}(S)$ and $\mathcal{P}^n(S)$ are subsets whose members lie in S.

Definition 1.4 (Powerset)**.** The *powerset* of a set S, denoted $\mathcal{P}(S)$, is the collection of all subsets of S, including the empty set and S itself:

$$\mathcal{P}(S) = \{\, A \mid A \subseteq S\}.$$

Definition 1.5 (n-th Powerset)**.** [18, 24] The *n-th powerset* of a set H, denoted $\mathcal{P}^n(H)$, is defined recursively by

$$\mathcal{P}^1(H) = \mathcal{P}(H), \quad \mathcal{P}^{k+1}(H) = \mathcal{P}\big(\mathcal{P}^k(H)\big), \quad k \geq 1.$$

Analogously, the *n-th nonempty powerset* $\mathcal{P}^*_n(H)$ is given by

$$\mathcal{P}^*_1(H) = \mathcal{P}^*(H), \quad \mathcal{P}^*_{k+1}(H) = \mathcal{P}^*\big(\mathcal{P}^*_k(H)\big),$$

where $\mathcal{P}^*(H)$ denotes the powerset of H with the empty set removed.

Definition 1.6 (Classical Structure)**.** (cf. [18,24]) A *Classical Structure* is a mathematical framework defined on a non-empty set H, equipped with one or more *Classical Operations* that satisfy specified *Classical Axioms*. Specifically:

A *Classical Operation* is a function of the form:

$$\#_0 : H^m \to H,$$

where $m \geq 1$ is a positive integer, and H^m denotes the m-fold Cartesian product of H. Common examples include addition and multiplication in algebraic structures such as groups, rings, and fields.

Definition 1.7 (Hyperoperation)**.** [26,27] A *hyperoperation* on a set S is a binary rule whose value is a subset of S rather than a single element. Formally, a hyperoperation $\circ$ is a map

$$\circ \;:\; S \times S \;\longrightarrow\; \mathcal{P}(S),$$

where $\mathcal{P}(S)$ denotes the powerset of S.

Definition 1.8 (Hyperstructure)**.** [18,24] A *hyperstructure* extends a classical algebraic structure by defining its operations on the powerset of a base set. Concretely, given a set S and a hyperoperation $\circ$, the pair

$$\mathcal{H} = \bigl(\mathcal{P}(S), \circ\bigr)$$

is called a hyperstructure, where $\circ$ acts on subsets of S.

Definition 1.9 (SuperHyperOperation)**.** [24] Let H be a nonempty set and define its iterated powersets by

$$\mathcal{P}^0(H) = H, \quad \mathcal{P}^{k+1}(H) = \mathcal{P}\bigl(\mathcal{P}^k(H)\bigr), \quad k \geq 0.$$

An (m,n)-*SuperHyperOperation* is an m-ary mapping

$$\circ^{(m,n)} \;:\; H^m \;\longrightarrow\; \mathcal{P}^n_*(H),$$

where $\mathcal{P}^n_*(H)$ denotes the n-th powerset of H, either excluding the empty set (classical type) or including it (neutrosophic type). Such operations generalize hyperoperations by producing outputs in higher–order powersets.

Definition 1.10 (n-Superhyperstructure)**.** [18, 24] An n-*Superhyperstructure* on a set S is given by the pair

$$\mathcal{SH}_n = \bigl(\mathcal{P}^n(S), \circ\bigr),$$

where $\mathcal{P}^n(S)$ is the n-th iterated powerset of S and $\circ$ is an operation defined on elements of $\mathcal{P}^n(S)$. This framework captures hierarchical algebraic behaviors across n levels of powerset iteration.

Example 1.11 (n-Superhyperstructure of integer "sum-difference" hyperoperations)**.** Let $S = \mathbb{Z}$. For each $k \geq 0$ define the k-th iterated powerset

$$\mathcal{P}^0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad \mathcal{P}^{k+1}(\mathbb{Z}) = \mathcal{P}\big(\mathcal{P}^k(\mathbb{Z})\big).$$

We construct a family of binary *SuperHyperOperations* $\circ^{(k)}$ for $k = 0, 1, \ldots, n$ by induction:

$\circ^{(0)}$: Define

$$\circ^{(0)} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{P}^1(\mathbb{Z}), \qquad a \ \circ^{(0)} \ b \ = \ \{\, a+b, \ a-b\}.$$

Clearly $a \circ^{(0)} b \subseteq \mathbb{Z}$ is nonempty, so $\circ^{(0)}$ is a hyperoperation on $\mathbb{Z}$.

$\circ^{(k+1)}$: Suppose $\circ^{(k)} : \mathcal{P}^k(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}^k(\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}^{k+1}(\mathbb{Z})$ is defined. Then set

$$\circ^{(k+1)} : \mathcal{P}^{k+1}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}^{k+1}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{P}^{k+2}(\mathbb{Z}),$$

$$X \ \circ^{(k+1)} \ Y = \big\{\, A \ \circ^{(k)} \ B \,\big|\, A \in X, \ B \in Y \big\},$$

which is a well-defined map into $\mathcal{P}^{k+2}(\mathbb{Z})$ because each $A \circ^{(k)} B$ is itself a nonempty subset of $\mathcal{P}^k(\mathbb{Z})$.

Then

$$\mathcal{SH}_n = \big(\mathcal{P}^n(\mathbb{Z}), \circ^{(n)}\big)$$

is an n-Superhyperstructure:

(1) *Nonempty values:* By induction, for any $X, Y \in \mathcal{P}^n(\mathbb{Z})$, $X \circ^{(n)} Y$ is a nonempty collection of nonempty subsets of $\mathcal{P}^{n-1}(\mathbb{Z})$.

(2) *Closure:* $X \circ^{(n)} Y \subseteq \mathcal{P}^n(\mathbb{Z})$ by construction.

(3) *Hyperoperation property:* The result of $\circ^{(n)}$ is a set of elements of $\mathcal{P}^n(\mathbb{Z})$, not a single element.

Hence $\mathcal{SH}_n$ forms a concrete example of an n-Superhyperstructure on $\mathbb{Z}$.

1.2. *Knot Theory*

Knot theory studies embeddings of circles in three-dimensional spaces, classifying knots by algebraic and geometric invariants and understanding topological properties (cf. [4, 13–15]).

Definition 1.12 (Knot)**.** A *knot* is a smooth embedding

$$K : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$$

considered up to ambient isotopy in $\mathbb{R}^3$. Equivalently, a knot is the image $K(S^1)$ of such an embedding, where two embeddings K_0, K_1 define the same knot if there exists a smooth one-parameter family of diffeomorphisms

$$\Phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, 1],$$

with $\Phi_0 = \mathrm{id}$ and $\Phi_1 \circ K_0 = K_1$.

Example 1.13 (Unknot)**.** Let

$$K_{\text{unknot}}\colon S^1 \to \mathbb{R}^3, \quad K_{\text{unknot}}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

This is a smooth embedding of the circle into the xy–plane:

- *Smoothness*: Each coordinate is a smooth function of θ.
- *Injectivity*: If $\theta_0 \neq \theta_1 \bmod 2\pi$, then $(\cos\theta_0, \sin\theta_0) \neq (\cos\theta_1, \sin\theta_1)$.
- *No self-intersections*: The image is the unit circle, a simple closed curve.

Since any smooth simple closed curve in $\mathbb{R}^3$ that lies in a plane is ambient-isotopic to the standard unit circle, K_{unknot} represents the trivial (unknot) class.

Example 1.14 (Trefoil Knot)**.** Define the map

$$K_{\text{trefoil}}\colon S^1 \to \mathbb{R}^3, \quad K_{\text{trefoil}}(t) = \big(x(t),\, y(t),\, z(t)\big), \quad t \in [0, 2\pi),$$

with the parametric functions

$$\begin{cases} x(t) = \big(2 + \cos(3t)\big)\cos(2t), \\ y(t) = \big(2 + \cos(3t)\big)\sin(2t), \\ z(t) = \sin(3t). \end{cases}$$

Properties:

- *Smoothness*: $x(t), y(t), z(t)$ are all infinitely differentiable in t.
- *Injectivity*: One checks that for $t_0 \neq t_1 \bmod 2\pi$, the points $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \neq (x(t_1), y(t_1), z(t_1))$, so there are no self-intersections.
- *Nontrivial knot type*: This embedding has three crossings in its minimal planar projection and is not ambient-isotopic to the unknot.

Thus K_{trefoil} is a smooth embedding whose image is the (right-handed) trefoil knot.

2. **Result of this paper**

As the main result of this paper, we investigate the definitions, properties, and examples of HyperKnots and SuperHyperKnots.

2.1. *HyperKnot*

We present the definition of a HyperKnot as follows.

Definition 2.1 (HyperKnot)**.** Let $C(\mathbb{R}^3)$ be the hyperspace of nonempty compact subsets of $\mathbb{R}^3$, equipped with the Hausdorff metric d_H. A *HyperKnot* is a continuous map

$$K_H\colon S^1 \to C(\mathbb{R}^3)$$

such that

(1) There exists a smooth classical knot embedding

$$K\colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{with} \quad \{K(t)\} \subseteq K_H(t) \quad (\forall\, t \in S^1),$$

(2) The map K_H is continuous in the Hausdorff metric: for all $t_0 \in S^1$, $\lim_{t\to t_0} d_H\big(K_H(t), K_H(t_0)\big) = 0$.

Two HyperKnots K_H^0, K_H^1 are *ambient hyperisotopic* if there exists a continuous family of homeomorphisms

$$\Phi_t\colon C(\mathbb{R}^3) \to C(\mathbb{R}^3), \quad t \in [0,1],$$

with $\Phi_0 = \mathrm{id}$ and $\Phi_1 \circ K_H^0 = K_H^1$.

Example 2.2 (Arc-based HyperKnot)**.** Let

$$K\colon S^1 \to \mathbb{R}^3, \quad K(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

be the standard unit circle in the xy-plane. Fix a small $\varepsilon > 0$. Define

$$K_H(\theta) = \big\{\, K(\phi) \mid \phi \in [\theta - \varepsilon,\ \theta + \varepsilon]\big\}, \quad \theta \in S^1,$$

where intervals are taken mod 2π. Then:

(1) Each $K_H(\theta)$ is a nonempty compact arc in $\mathbb{R}^3$ containing the core point $K(\theta)$.
(2) As $\theta \to \theta_0$, the endpoints of the arc move continuously, so $d_H\big(K_H(\theta), K_H(\theta_0)\big) \leq \max\{\|K(\theta \pm \varepsilon) - K(\theta_0 \pm \varepsilon)\|\} \to 0$.
(3) A smooth core embedding is K itself, and obviously $\{K(\theta)\} \subseteq K_H(\theta)$.

Thus $K_H\colon S^1 \to C(\mathbb{R}^3)$ is a HyperKnot.

Example 2.3 (Tubular-neighborhood HyperKnot)**.** Let $K\colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ be any smooth knot embedding and choose a radius $r > 0$ smaller than the reach of K. Define

$$K_H(t) = \big\{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - K(t)\| \leq r\big\}, \quad t \in S^1;$$

each $K_H(t)$ is the closed ball of radius r around the core point $K(t)$. Then:

(1) $K_H(t)$ is nonempty, compact, and contains $\{K(t)\}$.
(2) Continuity in the Hausdorff metric follows since

$$d_H\big(B(K(t), r), B(K(t_0), r)\big) = \|K(t) - K(t_0)\| \xrightarrow[t\to t_0]{} 0.$$

(3) The core inclusion condition is immediate from the construction.

Hence $K_H\colon S^1 \to C(\mathbb{R}^3)$ defines a HyperKnot which is a "thickening" of the classical knot.

Example 2.4 (Normal-Circle HyperKnot)**.** Let

$$K\colon S^1 \to \mathbb{R}^3, \quad K(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

be the standard unit circle, which has everywhere nonzero curvature. Let $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$ be its Frenet frame, and fix a radius $r > 0$. Define for each $t \in S^1$

$$C_t \;=\; \big\{\, K(t) \big\} \;\cup\; \big\{\, K(t) + r\big(\cos\phi\, N(t) + \sin\phi\, B(t)\big) \;\big|\; \phi \in [0, 2\pi] \big\}.$$

Then $C_t \subset \mathbb{R}^3$ is a nonempty compact subset containing the core point $K(t)$. Define

$$K_H \colon S^1 \to C(\mathbb{R}^3), \qquad K_H(t) = C_t.$$

We check:

(1) **Core inclusion.** By construction $\{K(t)\} \subset C_t$.

(2) **Compactness.** Each circle $\{\, K(t) + r(\cos\phi\, N(t) + \sin\phi\, B(t))\}$ is compact, and the union with $\{K(t)\}$ remains compact.

(3) **Continuity in the Hausdorff metric.** As $t \to t_0$, the Frenet frame $\{T, N, B\}$ depends smoothly on t, so

$$d_H\big(C_t, C_{t_0}\big) \;\le\; \sup_{\phi} \big\| K(t) + r(\cos\phi\, N(t) + \sin\phi\, B(t)) \;-\; K(t_0) - r(\cos\phi\, N(t_0) + \sin\phi\, B(t_0)) \big\| \;\xrightarrow[t \to t_0]{}\; 0.$$

(4) **Smooth core embedding.** The map $K \colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ is a smooth knot embedding and $\{K(t)\} \subset K_H(t)$.

Therefore $K_H \colon S^1 \to C(\mathbb{R}^3)$ is a HyperKnot, giving a family of small normal-plane circles thickening the core.

Theorem 2.5 (HyperKnot generalizes classical knots)**.** *The assignment*

$$\iota \colon \{\textit{classical knots}\} \;\to\; \{\textit{HyperKnots}\}, \qquad \iota\big(K\big)(t) = \{K(t)\}$$

is injective and respects ambient isotopy. Hence every classical knot yields a HyperKnot, and distinct knot types give non-hyperisotopic HyperKnots.

Proof. Given a smooth embedding $K \colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, define $K_H(t) = \{K(t)\}$. Clearly:

- $\{K(t)\} \in C(\mathbb{R}^3)$ for all t.
- Continuity in the Hausdorff metric follows since

$$d_H\big(\{K(t)\}, \{K(t_0)\}\big) \;=\; \|K(t) - K(t_0)\| \;\xrightarrow[t \to t_0]{}\; 0.$$

- If K_0 and K_1 are ambient-isotopic via $\Psi_t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, then $\Phi_t(A) = \Psi_t(A)$ for each compact $A \subset \mathbb{R}^3$ defines an ambient hyperisotopy between $\iota(K_0)$ and $\iota(K_1)$.

Injectivity follows because if $\iota(K_0)$ and $\iota(K_1)$ are hyperisotopic then their cores $\{K_0(t)\}$ and $\{K_1(t)\}$ are ambient-isotopic in $\mathbb{R}^3$, so K_0 and K_1 represent the same knot type. $\square$

Theorem 2.6 (HyperKnots form a hyperstructure)**.** *Let $\mathcal{HK}$ be the set of all HyperKnots. Define a binary* hyperoperation $\odot$ *on $\mathcal{HK}$ by*

$$(K_H^1 \odot K_H^2)(t) \;=\; K_H^1(t) \cup K_H^2(t) \quad (\forall\, t \in S^1).$$

Then $(\mathcal{HK}, \odot)$ is a hyperstructure: for any $K_H^1, K_H^2 \in \mathcal{HK}$, $\{K_H^1 \odot K_H^2\} \subseteq \mathcal{HK}$ and the union-map is well-defined.

Proof. We must check that $K_H^1 \odot K_H^2$ is again a HyperKnot:

(1) For each t, $K_H^1(t) \cup K_H^2(t)$ is a nonempty compact subset of $\mathbb{R}^3$.

(2) Continuity in the Hausdorff metric holds because union is continuous on $C(\mathbb{R}^3)$: if $d_H(K_H^i(t), K_H^i(t_0)) \to 0$ as $t \to t_0$ for $i = 1, 2$, then

$$d_H\big(K_H^1(t) \cup K_H^2(t),\, K_H^1(t_0) \cup K_H^2(t_0)\big) \;\leq\; d_H\big(K_H^1(t), K_H^1(t_0)\big) + d_H\big(K_H^2(t), K_H^2(t_0)\big) \;\to\; 0.$$

(3) There exists a classical knot K whose image lies in $K_H^1(t) \cup K_H^2(t)$ (for instance, choose either core of K_H^1 or K_H^2), so the core-inclusion condition holds.

Thus $\mathcal{HK}$ is closed under $\odot$. By definition of a hyperstructure, $(\mathcal{HK}, \odot)$ is a hyperstructure. □

Theorem 2.7 (Classical knots embed faithfully into HyperKnots)**.** *The map*

$$\iota\colon \{\textit{classical knots up to ambient isotopy}\} \;\to$$

$$\{\textit{HyperKnots up to ambient hyperisotopy}\}, \quad \iota(K)(t) = \{K(t)\}$$

is well-defined and injective. In particular, if two classical knots K_0, K_1 satisfy $\iota(K_0)$ ambient-hyperisotopic to $\iota(K_1)$, then K_0 is ambient-isotopic to K_1.

Proof. First, given a classical knot embedding $K\colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, the assignment $\iota(K)(t) = \{K(t)\}$ is a continuous map $S^1 \to C(\mathbb{R}^3)$, and clearly $\{K(t)\}$ contains the core $K(t)$, so $\iota(K)$ is a HyperKnot.

Next, suppose $\iota(K_0)$ and $\iota(K_1)$ are ambient-hyperisotopic via $\Phi_t\colon C(\mathbb{R}^3) \to C(\mathbb{R}^3)$. Since each singleton $\{x\} \subset \mathbb{R}^3$ is identified in $C(\mathbb{R}^3)$, the family

$$\Psi_t(x) \;=\; \text{the unique point in } \Phi_t\big(\{x\}\big) \quad (x \in \mathbb{R}^3)$$

defines a continuous family of homeomorphisms of $\mathbb{R}^3$ with $\Psi_0 = \mathrm{id}$ and $\Psi_1 \circ K_0 = K_1$. Hence K_0 and K_1 are ambient-isotopic. □

Theorem 2.8 (Pointwise union of HyperKnots)**.** *Let K_H^1, K_H^2 be HyperKnots. Define*

$$(K_H^1 \odot K_H^2)(t) \;=\; K_H^1(t) \cup K_H^2(t).$$

Then $K_H^1 \odot K_H^2$ is again a HyperKnot.

Proof. (1) Each $K_H^i(t)$ is a nonempty compact subset of $\mathbb{R}^3$, so the union $K_H^1(t) \cup K_H^2(t)$ is nonempty and compact.

(2) Continuity in the Hausdorff metric follows from the estimate

$$d_H\big(K_H^1(t) \cup K_H^2(t),\, K_H^1(t_0) \cup K_H^2(t_0)\big) \leq d_H\big(K_H^1(t), K_H^1(t_0)\big) + d_H\big(K_H^2(t), K_H^2(t_0)\big),$$

which tends to zero as $t \to t_0$.

(3) Each K_H^i admits a smooth core embedding $K^i \colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ with $\{K^i(t)\} \subset K_H^i(t)$. Choosing either core K^1 or K^2 gives a core for the union, so $K_H^1 \odot K_H^2$ satisfies the core-inclusion condition.

Therefore $K_H^1 \odot K_H^2$ is a HyperKnot. □

Theorem 2.9 (Hyperstructure properties of $\mathcal{HK}$)**.** *Let $\mathcal{HK}$ be the set of all HyperKnots. The binary operation $\odot \colon \mathcal{HK} \times \mathcal{HK} \to \mathcal{HK}$ defined by pointwise union is*

- Commutative*:* $K_H^1 \odot K_H^2 = K_H^2 \odot K_H^1$.
- Associative*:* $(K_H^1 \odot K_H^2) \odot K_H^3 = K_H^1 \odot (K_H^2 \odot K_H^3)$.

Hence $(\mathcal{HK}, \odot)$ is a commutative semihypergroup.

Proof. Both commutativity and associativity follow immediately from the corresponding properties of the set-union operation on compact subsets of $\mathbb{R}^3$. Specifically, for any $t \in S^1$,

$$K_H^1(t) \cup K_H^2(t) = K_H^2(t) \cup K_H^1(t),$$

and

$$\big(K_H^1(t) \cup K_H^2(t)\big) \cup K_H^3(t) = K_H^1(t) \cup \big(K_H^2(t) \cup K_H^3(t)\big).$$

Since pointwise union preserves continuity and the core-inclusion condition, $\odot$ makes $\mathcal{HK}$ into a commutative semihypergroup. □

2.2. *SuperHyperKnot*

We present the definition of a SuperHyperKnot as follows.

Definition 2.10 (n-SuperHyperKnot)**.** Let $n \geq 1$. Define recursively the k-th iterated hyperspace of $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} C^{(0)}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3, \\ C^{(k)}(\mathbb{R}^3) = \big\{\, A \subseteq C^{(k-1)}(\mathbb{R}^3) \mid A \neq \emptyset,\ A \text{ is compact in the Hausdorff metric } d_H^{(k-1)} \big\}, \quad k \geq 1, \end{cases}$$

where $d_H^{(0)}$ is the Euclidean distance on $\mathbb{R}^3$, and for $k \geq 1$, $d_H^{(k)}$ is the induced Hausdorff metric on compact subsets of $C^{(k-1)}(\mathbb{R}^3)$.

An *n-SuperHyperKnot* is a continuous map

$$K^{(n)}: S^1 \to C^{(n)}(\mathbb{R}^3)$$

satisfying the *core inclusion condition*: there exists a classical knot embedding

$$K: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{and selections} \quad A_k(t) \in C^{(k)}(\mathbb{R}^3) \quad (1 \leq k \leq n,\ t \in S^1)$$

with

$$A_n(t) = K^{(n)}(t), \quad A_{k-1}(t) \in A_k(t) \quad (1 \leq k \leq n), \quad A_0(t) = \{K(t)\}.$$

Two n-SuperHyperKnots $K_0^{(n)}, K_1^{(n)}$ are *ambient superhyperisotopic* if there exists a continuous family of homeomorphisms

$$\Phi_t^{(n)}: C^{(n)}(\mathbb{R}^3) \to C^{(n)}(\mathbb{R}^3), \quad t \in [0,1],$$

with $\Phi_0^{(n)} = \mathrm{id}$ and $\Phi_1^{(n)} \circ K_0^{(n)} = K_1^{(n)}$.

Example 2.11 (n-SuperHyperKnot via iterated arc-neighborhoods)**.** Let

$$K: S^1 \to \mathbb{R}^3, \quad K(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

be the standard unit circle. Fix a small $\varepsilon > 0$. We define a nested family of compact sets

$$A_0(\theta) = \{K(\theta)\}, \quad A_1(\theta) = \{\, K(\phi) \mid \phi \in [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]\},$$

and for $k = 2, \ldots, n$,

$$A_k(\theta) = \{\, A_{k-1}(\phi) \mid \phi \in [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]\}.$$

Then:

- Each $A_k(\theta)$ is nonempty and compact in $C^{(k-1)}(\mathbb{R}^3)$ by continuity of $\phi \mapsto A_{k-1}(\phi)$ on the compact interval $[\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]$.
- By construction $A_{k-1}(\theta) \in A_k(\theta)$ for all $1 \leq k \leq n$, and $A_0(\theta) = \{K(\theta)\}$ is the core.
- The map $K^{(n)}: S^1 \to C^{(n)}(\mathbb{R}^3)$ defined by

  $$K^{(n)}(\theta) = A_n(\theta)$$

  is continuous in the induced Hausdorff metric $d_H^{(n)}$, since each stage arises from a continuous image of a compact interval.

Therefore $K^{(n)}$ satisfies the core-inclusion condition and continuity, hence is an n-SuperHyperKnot.

Example 2.12 (n-SuperHyperKnot via iterated tubular neighborhoods)**.** Let

$$K: S^1 \to \mathbb{R}^3, \quad K(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

be the standard unit circle. Choose a radius $r > 0$ smaller than the reach of K and a small $\varepsilon > 0$. Define for each $\theta \in S^1$:

$$A_0(\theta) = \{K(\theta)\}, \quad A_1(\theta) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - K(\theta)\| \le r\},$$

and for $2 \le k \le n$,

$$A_k(\theta) = \bigcup_{\phi \in [\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon]} A_{k-1}(\phi),$$

where intervals are taken modulo 2π. Then:

(1) *Nonempty compactness.* Each $A_k(\theta)$ is nonempty and compact in $C^{(k-1)}(\mathbb{R}^3)$ because it is a finite union of compact sets.

(2) *Nested inclusion.* By definition $A_{k-1}(\theta) \in A_k(\theta)$ for all $1 \le k \le n$, and $A_0(\theta) = \{K(\theta)\}$ is the core.

(3) *Continuity in the Hausdorff metric.* For each k,

$$d_H^{(k)}\big(A_k(\theta), A_k(\theta_0)\big) \le \sup_{\phi \in [\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon]} d_H^{(k-1)}\big(A_{k-1}(\phi), A_{k-1}(\phi + \theta_0 - \theta)\big) \to 0 \quad (\theta \to \theta_0),$$

since $\phi \mapsto A_{k-1}(\phi)$ is continuous and the supremum over a small interval tends to zero.

Hence the map

$$K^{(n)} : S^1 \to C^{(n)}(\mathbb{R}^3), \quad K^{(n)}(\theta) = A_n(\theta)$$

is continuous and satisfies the core–inclusion condition. Therefore $K^{(n)}$ is an n-SuperHyperKnot.

Theorem 2.13 (Generalization of knots and HyperKnots)**.** *The assignments*

$$\iota_0 : \{\textit{classical knots}\} \to \{n\textit{-SuperHyperKnots}\}, \quad \iota_0\big(K\big)(t) = \{\{\cdots\{\{K(t)\}\}\cdots\}\}$$

(nested n times) and

$$\iota_1 : \{\textit{HyperKnots}\} \to \{n\textit{-SuperHyperKnots}\}, \quad \iota_1\big(K_H\big)(t) = \{\{\cdots\{\, K_H(t)\}\cdots\}\}$$

(nested $n-1$ times) are injective and respect ambient isotopy. Thus every classical knot and every HyperKnot embeds faithfully as an n-SuperHyperKnot.

Proof. Given a classical embedding K, define $\iota_0(K)(t)$ by $\{\{\cdots\{\{K(t)\}\}\cdots\}\} \subset C^{(n)}(\mathbb{R}^3)$. Continuity follows by iterated Hausdorff estimates:

$$d_H^{(k)}\big(\iota_0(K)(t), \iota_0(K)(t_0)\big) = d_H^{(k-1)}\big(\iota_0(K)(t), \iota_0(K)(t_0)\big) \to 0,$$

and ambient isotopies lift at each level by $\Phi_t^{(n)}(A) = \{\cdots\{\Psi_t(A)\}\cdots\}$. Injectivity holds since the unique core $\{K(t)\}$ recovers K. The argument for ι_1 is identical, treating $K_H(t)$ as the first level. □

Theorem 2.14 (n-SuperHyperKnots form an n-Superhyperstructure)**.** *Let $\mathcal{SHK}_n = \{ K^{(n)} : S^1 \to C^{(n)}(\mathbb{R}^3)\}$. Define the binary* superhyperoperation

$$(K_1^{(n)} \star K_2^{(n)})(t) = K_1^{(n)}(t) \cup K_2^{(n)}(t) \subseteq C^{(n)}(\mathbb{R}^3).$$

Then $\big(\mathcal{SHK}_n, \star\big)$ is an n-Superhyperstructure: $\star$ is a well-defined map $\mathcal{SHK}_n \times \mathcal{SHK}_n \to \mathcal{P}\big(C^{(n)}(\mathbb{R}^3)\big)$, and $\mathcal{SHK}_n$ is closed under $\star$.

Proof. For any $K_1^{(n)}, K_2^{(n)}$, $K_1^{(n)}(t) \cup K_2^{(n)}(t)$ is nonempty compact in $C^{(n-1)}(\mathbb{R}^3)$, so lies in $C^{(n)}(\mathbb{R}^3)$. Continuity under $d_H^{(n)}$ follows from the union estimate

$$d_H^{(n)}\big(A \cup B,\ A_0 \cup B_0\big) \le d_H^{(n)}(A, A_0) + d_H^{(n)}(B, B_0).$$

The core inclusion condition holds by choosing at each t one of the two nested core chains. Hence $\mathcal{SHK}_n$ is closed under $\star$ and defines an n-Superhyperstructure as in [24]. □

Theorem 2.15 (Projection to lower levels)**.** *For each $1 \le m < n$, there is a natural "projection" map*

$$\pi_m^{(n)} : C^{(n)}(\mathbb{R}^3) \to C^{(m)}(\mathbb{R}^3), \qquad \pi_m^{(n)}(A) = A_m \quad \big(A \in C^{(n)}(\mathbb{R}^3)\big),$$

where A_m is any nonempty compact subset with $\{K(t)\} = A_0 \in A_1 \in \cdots \in A_n = A$. Then for any n-SuperHyperKnot $K^{(n)}$, the composition

$$K^{(m)} = \pi_m^{(n)} \circ K^{(n)}$$

is an m-SuperHyperKnot. Moreover, if $K_0^{(n)}, K_1^{(n)}$ are ambient superhyperisotopic via $\Phi_t^{(n)}$, then $\pi_m^{(n)} \circ K_0^{(n)}$ and $\pi_m^{(n)} \circ K_1^{(n)}$ are ambient superhyperisotopic in level m.

Proof. Since each $K^{(n)}(t) \in C^{(n)}(\mathbb{R}^3)$ admits a nested chain $\{K(t)\} = A_0(t) \in A_1(t) \in \cdots \in A_n(t)$, the map $\pi_m^{(n)}(A_n(t)) = A_m(t)$ is continuous in the Hausdorff metric $d_H^{(m)}$ and contains the core $\{K(t)\}$. Hence $K^{(m)}$ satisfies the definition of an m-SuperHyperKnot. If $\Phi_t^{(n)}$ is an ambient superhyperisotopy at level n, then by restriction $\Phi_t^{(m)} = \pi_m^{(n)} \circ \Phi_t^{(n)} \circ (\pi_m^{(n)})^{-1}$ defines a family of homeomorphisms on $C^{(m)}(\mathbb{R}^3)$, giving an ambient superhyperisotopy of $K_0^{(m)}$ and $K_1^{(m)}$. □

Theorem 2.16 (Core recovery)**.** *Every n-SuperHyperKnot $K^{(n)}\colon S^1 \to C^{(n)}(\mathbb{R}^3)$ determines uniquely a classical knot $\kappa\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ by the rule*

$$\kappa(t) = \textit{the unique point in} \bigcap_{k=0}^{n} A_k(t),$$

where $A_k(t) \in C^{(k)}(\mathbb{R}^3)$ is any chain with $A_n(t) = K^{(n)}(t)$. Moreover, ambient superhyperisotopy of $K^{(n)}$ projects to ambient isotopy of κ.

Proof. By the core inclusion condition there is a nested sequence $\{K(t)\} = A_0(t) \in A_1(t) \in \cdots \in A_n(t)$. Since $A_0(t)$ is a singleton, the intersection $\bigcap_{k=0}^n A_k(t)$ equals $\{K(t)\}$. Continuity of κ follows from continuity of $K^{(n)}$ and the fact that intersections of nested compact sets vary continuously in $d_H^{(0)}$. If $K_0^{(n)}, K_1^{(n)}$ are related by $\Phi_t^{(n)}$, then their cores satisfy $\Psi_t(\{K_0(t)\}) = \{K_1(t)\}$ for Ψ_t the induced ambient isotopy on $\mathbb{R}^3$. □

Theorem 2.17 (Commutative semihypergroup structure)**.** *Let $\mathcal{SHK}_n$ be the set of all n-SuperHyperKnots. Define*

$$(K_1^{(n)} \star K_2^{(n)})(t) = K_1^{(n)}(t) \cup K_2^{(n)}(t).$$

Then $(\mathcal{SHK}_n, \star)$ is a commutative semihypergroup:

1. *$\star$ is well-defined: each union is nonempty compact in $C^{(n-1)}(\mathbb{R}^3)$.*
2. *$\star$ is commutative and associative by properties of set union.*
3. *The core inclusion condition holds since one may choose the core chain from either operand.*

Proof. (1) follows as in the HyperKnot case, using continuity of union in $d_H^{(n)}$. For (2), for all t,

$$K_1^{(n)}(t) \cup K_2^{(n)}(t) = K_2^{(n)}(t) \cup K_1^{(n)}(t),$$

and

$$(K_1^{(n)} \cup K_2^{(n)}) \cup K_3^{(n)} = K_1^{(n)} \cup (K_2^{(n)} \cup K_3^{(n)}).$$

For (3), if $A_k^i(t)$ are core chains for $K_i^{(n)}$, then $\{A_k^1(t) \cup A_k^2(t)\}_{k=0}^n$ is a valid core chain for $K_1^{(n)} \star K_2^{(n)}$. Thus $(\mathcal{SHK}_n, \star)$ satisfies all axioms of a commutative semihypergroup. □

Theorem 2.18 (Transitivity of Projections)**.** *Let $0 \le \ell < m < n$. Then the projections*

$$\pi_m^{(n)} : C^{(n)}(\mathbb{R}^3) \to C^{(m)}(\mathbb{R}^3), \quad \pi_\ell^{(m)} : C^{(m)}(\mathbb{R}^3) \to C^{(\ell)}(\mathbb{R}^3),$$

satisfy

$$\pi_\ell^{(m)} \circ \pi_m^{(n)} = \pi_\ell^{(n)}.$$

Proof. By definition, for any $A \in C^{(n)}(\mathbb{R}^3)$ there is a nested chain $\{K(t)\} = A_0 \in A_1 \in \cdots \in A_n = A$. Then

$$\big(\pi_\ell^{(m)} \circ \pi_m^{(n)}\big)(A) = \pi_\ell^{(m)}\big(\pi_m^{(n)}(A)\big) = \pi_\ell^{(m)}(A_m) = A_\ell = \pi_\ell^{(n)}(A),$$

so the two compositions agree on every element. □

Theorem 2.19 (Projection of Core Injection). *Let ι_0 be the embedding of classical knots into n-SuperHyperKnots given by $\iota_0(K)(t) = \{\{\cdots\{\{K(t)\}\}\cdots\}\}$. Then*

$$\pi_0^{(n)}\big(\iota_0(K)(t)\big) = \{K(t)\}, \quad \forall\, t \in S^1,$$

and hence $\pi_0^{(n)} \circ \iota_0$ is the identity on classical knots.

Proof. By construction $\iota_0(K)(t)$ is an n-fold nested singleton whose level-0 element is exactly $\{K(t)\}$. Therefore $\pi_0^{(n)}$ extracts that singleton, recovering K pointwise. □

Theorem 2.20 (Classification Equivalence). *The "core" map*

$$\text{core} \;:\; \{n\text{-}\textit{SuperHyperKnots}\}/\!\sim\; \to\; \{\textit{classical knots}\}/\!\approx, \quad [K^{(n)}] \mapsto [\kappa],$$

where $\kappa(t)$ is the unique point in $\bigcap_{k=0}^{n} A_k(t)$, is a bijection between superhyperisotopy classes of n-SuperHyperKnots and ambient-isotopy classes of classical knots.

Proof. Injectivity: If two n-SuperHyperKnots $K_0^{(n)}, K_1^{(n)}$ satisfy $\text{core}(K_0^{(n)}) \approx \text{core}(K_1^{(n)})$, then their classical cores are isotopic. By Theorem "Generalization of knots and HyperKnots", this lifts to a superhyperisotopy between the superhyperknots, so $[K_0^{(n)}] = [K_1^{(n)}]$.

Surjectivity: Given any classical knot K, the injection $\iota_0(K)$ is an n-SuperHyperKnot whose core is exactly K. Thus every classical knot type arises. □

Theorem 2.21 (Lifting of Classical Invariants). *Let I be any invariant of classical knots under ambient isotopy, i.e.*

$$I \colon \{\textit{classical knots}\}/\!\approx\; \to\; \mathcal{X}.$$

Then

$$\widehat{I} \;=\; I \circ \pi_0^{(n)} \;:\; \{n\text{-}\textit{SuperHyperKnots}\}/\!\sim\; \to\; \mathcal{X}$$

is invariant under ambient superhyperisotopy of n-SuperHyperKnots.

Proof. If $K_0^{(n)} \sim K_1^{(n)}$, then their projections $\pi_0^{(n)}(K_0^{(n)}), \pi_0^{(n)}(K_1^{(n)})$ are ambient-isotopic classical knots. Hence $\widehat{I}([K_0^{(n)}]) = I([\pi_0^{(n)} K_0^{(n)}]) = I([\pi_0^{(n)} K_1^{(n)}]) = \widehat{I}([K_1^{(n)}])$. □

Funding

This study did not receive any financial or external support from organizations or individuals.

Acknowledgments

We extend our sincere gratitude to everyone who provided insights, inspiration, and assistance throughout this research. We particularly thank our readers for their interest and acknowledge the authors of the cited works for laying the foundation that made our study possible. We also appreciate the support from individuals and institutions that provided the resources and infrastructure needed to produce and share this paper. Finally, we are grateful to all those who supported us in various ways during this project.

Ethical Approval

As this research is entirely theoretical in nature and does not involve human participants or animal subjects, no ethical approval is required.

Data Availability

This research is purely theoretical, involving no data collection or analysis. We encourage future researchers to pursue empirical investigations to further develop and validate the concepts introduced here.

Authors' Contributions

The sole author designed, analysed, interpreted, and prepared the manuscript.

Research Integrity

The authors hereby confirm that, to the best of their knowledge, this manuscript is their original work, has not been published in any other journal, and is not currently under consideration for publication elsewhere at this stage.

Disclaimer (Note on Computational Tools)

No computer-assisted proof, symbolic computation, or automated theorem proving tools (e.g., Mathematica, SageMath, Coq, etc.) were used in the development or verification of the results presented in this paper. All proofs and derivations were carried out manually and analytically by the authors.

Disclaimer (Limitations and Claims)

The theoretical concepts presented in this paper have not yet been subject to practical implementation or empirical validation. Future researchers are invited to explore these ideas in applied or experimental settings. Although every effort has been made to ensure the accuracy of the content and the proper citation of sources, unintentional errors or omissions may persist. Readers should independently verify any referenced materials.

To the best of the authors' knowledge, all mathematical statements and proofs contained herein are correct and have been thoroughly vetted. Should you identify any potential errors or ambiguities, please feel free to contact the authors for clarification.

The results presented are valid only under the specific assumptions and conditions detailed in the manuscript. Extending these findings to broader mathematical structures may require additional research. The opinions and conclusions expressed in this work are those of the authors alone and do not necessarily reflect the official positions of their affiliated institutions.

Competing Interests

Author has declared that no competing interests exist.

Consent to Publish declaration

The author approved to Publish declarations.

References

[1] Sunday Adesina Adebisi and Adetunji Patience Ajuebishi. The order involving the neutrosophic hyperstructures, the construction and setting up of a typical neutrosophic group. *HyperSoft Set Methods in Engineering*, 3:26–31, 2025.

[2] Adel Al-Odhari. A brief comparative study on hyperstructure, super hyperstructure, and n-super superhyperstructure. *Neutrosophic Knowledge*, 6:38–49, 2025.

[3] GR Amiri, R Mousarezaei, and S Rahnama. Soft hyperstructures and their applications. *New Mathematics and Natural Computation*, pages 1–19, 2024.

[4] Joan S Birman. New points of view in knot theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 28(2):253–287, 1993.

[5] Ajoy Kanti Das, Rajat Das, Suman Das, Bijoy Krishna Debnath, Carlos Granados, Bimal Shil, and Rakhal Das. A comprehensive study of neutrosophic superhyper bci-semigroups and their algebraic significance. *Transactions on Fuzzy Sets and Systems*, 8(2):80, 2025.

[6] Takaaki Fujita. Hyperalgorithms & superhyperalgorithms: A unified framework for higher-order computation. *Prospects for Applied Mathematics and Data Analysis*, 4(1):36–49, 2024.

[7] Takaaki Fujita. Rethinking strategic perception: Foundations and advancements in hypergame theory and superhypergame theory. *Prospects for Applied Mathematics and Data Analysis*, 4(2):01–14, 2024.

[8] Takaaki Fujita. Hypergraph and superhypergraph approaches in electronics: A hierarchical framework for modeling power-grid hypernetworks and superhypernetworks. *Journal of Energy Research and Reviews*, 17(6):102–136, 2025.

[9] Takaaki Fujita. An introduction and reexamination of hyperprobability and superhyperprobability: Comprehensive overview. *Asian Journal of Probability and Statistics*, 27(5):82–109, 2025.

[10] Takaaki Fujita. An introduction and reexamination of molecular hypergraph and molecular n-superhypergraph. *Asian Journal of Physical and Chemical Sciences*, 13(3):1–38, 2025.

[11] Takaaki Fujita. Unifying grain boundary networks and crystal graphs: A hypergraph and superhypergraph perspective in material sciences. *Asian Journal of Advanced Research and Reports*, 19(5):344–379, 2025.

[12] Thomas Jech. *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded.* Springer, 2003.

[13] Charles Livingston. *Knot theory*, volume 24. Cambridge University Press, 1993.

[14] Vassily Olegovich Manturov. *Knot theory.* CRC press, 2018.

[15] Kunio Murasugi and Bohdan Kurpita. *Knot theory and its applications*, volume 526. Springer, 1996.

[16] Gulay Oguz and Bijan Davvaz. Soft topological hyperstructure. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 40:8755–8764, 2021.

[17] Prabakaran Raghavendran and Tharmalingam Gunasekar. Optimizing organ transplantation success using neutrosophic superhyperstructure and artificial intelligence. *Volume IV*, page 117.

[18] F. Smarandache. Introduction to superhyperalgebra and neutrosophic superhyperalgebra. *Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras*, 2022.

[19] Florentin Smarandache. *Extension of HyperGraph to n-SuperHyperGraph and to Plithogenic n-SuperHyperGraph, and Extension of HyperAlgebra to n-ary (Classical-/Neutro-/Anti-) HyperAlgebra*. Infinite Study, 2020.

[20] Florentin Smarandache. Extension of hyperalgebra to superhyperalgebra and neutrosophic superhyperalgebra (revisited). In *International Conference on Computers Communications and Control*, pages 427–432. Springer, 2022.

[21] Florentin Smarandache. *The SuperHyperFunction and the Neutrosophic SuperHyperFunction (revisited again)*, volume 3. Infinite Study, 2022.

[22] Florentin Smarandache. *SuperHyperFunction, SuperHyperStructure, Neutrosophic SuperHyperFunction and Neutrosophic SuperHyperStructure: Current understanding and future directions*. Infinite Study, 2023.

[23] Florentin Smarandache. The cardinal of the m-powerset of a set of n elements used in the superhyperstructures and neutrosophic superhyperstructures. *Systems Assessment and Engineering Management*, 2:19–22, 2024.

[24] Florentin Smarandache. Foundation of superhyperstructure & neutrosophic superhyperstructure. *Neutrosophic Sets and Systems*, 63(1):21, 2024.

[25] Florentin Smarandache. Superhyperstructure & neutrosophic superhyperstructure, 2024. Accessed: 2024-12-01.

[26] Souzana Vougioukli. Helix hyperoperation in teaching research. *Science & Philosophy*, 8(2):157–163, 2020.

[27] Souzana Vougioukli. Hyperoperations defined on sets of s -helix matrices. 2020.

Neutrosophic Knowledge, Vol. 6, 2025

University of New Mexico

Directed Acyclic SuperHypergraphs (DASH): A General Framework for Hierarchical Dependency Modeling

Takaaki Fujita[1] *

[1] Independent Researcher, Shinjuku, Shinjuku-ku, Tokyo, Japan. Takaaki.fujita060@gmail.com

*Correspondence: Takaaki.fujita060@gmail.com

Received: *03 01, 2025;* Accepted: *05 20, 2025*

Abstract. Graph theory models pairwise relationships through vertices and edges, while hypergraphs generalize this framework by allowing hyperedges to connect multiple vertices simultaneously. SuperHyperGraphs, introduced by Smarandache [26, 27], extend hypergraphs via iterated powerset constructions. Directed Acyclic Graphs (DAGs) are cycle-free directed graphs widely used for dependency modeling, and Directed Acyclic Hypergraphs (DAHs) further generalize DAGs by capturing multi-way dependencies [18, 23]. In this paper, we introduce *Directed Acyclic SuperHypergraphs (DASH)*, which unify and extend both DAGs and DAHs within the SuperHyperGraph framework. We present a formal definition of DASH, characterize acyclicity through directed superhyperedges, and establish fundamental properties such as the existence of source supervertices and topological orderings. Our work provides a rigorous theoretical foundation for hierarchical dependency modeling in complex systems and paves the way for future advances in both the theory and applications of Hypergraph and SuperHyperGraph Theory.

Keywords: Superhypergraph, Hypergraph, Directed graph, Directed Hypergraph, Directed Superhypergraph, Directed Acyclic graph, Directed Acyclic Hypergraph

---

1. Preliminaries and Definitions

This section provides an introduction to the foundational concepts and definitions required for the discussions in this paper. For fundamental operations, concepts, and principles of graphs, refer to [7, 17]. Throughout this paper, we assume that all graphs are finite.

1.1. *Graph and Hypergraph*

Graph theory is the study of mathematical structures consisting of vertices connected by edges, used to model various types of relationships. A hypergraph is a generalized graph concepts that extends traditional graph concepts by allowing hyperedges, which connect multiple vertices rather than just pairs, enabling more complex relationships between elements [8, 9]. The basic definitions of graphs and hypergraphs are provided below.

Definition 1.1 (Graph)**.** [6] A graph G is a mathematical structure consisting of a set of vertices $V(G)$ and a set of edges $E(G)$ that connect pairs of vertices, representing relationships or connections between them. Formally, a graph is defined as $G = (V, E)$, where V is the vertex set and E is the edge set.

Definition 1.2 (Cycle in a Graph)**.** [6] A cycle in a graph $G = (V, E)$ is a path that starts and ends at the same vertex, with no repeated edges or vertices, except for the starting/ending vertex. Formally, a cycle is a sequence of vertices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ such that:

$$v_1 = v_k \quad \text{and} \quad (v_i, v_{i+1}) \in E \quad \text{for all} \quad 1 \leq i < k.$$

The length of the cycle is $k - 1$, which is the number of edges in the cycle.

Definition 1.3 (Hypergraph [2, 3])**.** A *hypergraph* $H = (V(H), E(H))$ is a pair where:

- $V(H)$: A non-empty set of vertices.
- $E(H)$: A set of hyperedges, each of which is a subset of $V(H)$.

This paper focuses exclusively on finite hypergraphs.

1.2. *SuperHyperGraph*

A *SuperHyperGraph* is an extension of the traditional concept of a hypergraph, recently introduced and actively investigated in the literature [4, 5, 11–13, 27]. It can be regarded as a graph-theoretical construct that integrates recursive structures into hypergraphs. A SuperHyperGraph is characterized by an iteratively generated structure known as the n-th powerset, obtained through repeated application of the powerset operation. The formal definition is presented below. Here, the parameter n is assumed to be a natural number.

Definition 1.4 (n-th Powerset)**.** (cf. [25, 28])

The n-th powerset of a set H, denoted $P_n(H)$, is constructed iteratively. Beginning with the standard powerset, the process is defined as:

$$P_1(H) = P(H), \quad P_{n+1}(H) = P(P_n(H)), \quad \text{for } n \geq 1.$$

In a similar manner, the n-th non-empty powerset, represented as $P_n^*(H)$, is recursively defined as:

$$P_1^*(H) = P^*(H), \quad P_{n+1}^*(H) = P^*(P_n^*(H)).$$

Here, $P^*(H)$ refers to the powerset of H excluding the empty set.

Definition 1.5 (n-SuperHyperGraph). [26, 27] Let V_0 be a finite *base set* of vertices. For each $k \geq 0$, define the iterative powerset $\mathcal{P}^k(V_0)$ by

$$\mathcal{P}^0(V_0) = V_0, \quad \mathcal{P}^{k+1}(V_0) = \mathcal{P}\big(\mathcal{P}^k(V_0)\big),$$

where $\mathcal{P}(\cdot)$ denotes the power set. An *n-SuperHyperGraph* is a pair

$$\mathrm{SHT}^{(n)} \;=\; (V, E),$$

with

$$V \;\subseteq\; \mathcal{P}^n(V_0) \quad \text{and} \quad E \;\subseteq\; \mathcal{P}^n(V_0).$$

Each element of V is an *n-supervertex*, and each element of E is an *n-superedge*.

Example 1.6 (2-SuperHyperGraph: Corporate Collaboration Network). Let the base set of employees be

$$V_0 = \{\text{Alice, Bob, Carol, Dave, Eve}\}.$$

Form the first iterated powerset $\mathcal{P}^1(V_0)$ to obtain teams:

$$\mathrm{Team}_1 = \{\mathrm{Alice}, \mathrm{Bob}\}, \quad \mathrm{Team}_2 = \{\mathrm{Carol}, \mathrm{Dave}\}, \quad \mathrm{Team}_3 = \{\mathrm{Eve}\}.$$

The second iterated powerset $\mathcal{P}^2(V_0) = \mathcal{P}(\{\mathrm{Team}_1, \mathrm{Team}_2, \mathrm{Team}_3\})$ consists of all subsets of these teams. We select two of them as our 2-supervertices:

$$V = \big\{\{\mathrm{Team}_1, \mathrm{Team}_2\},\ \{\mathrm{Team}_2, \mathrm{Team}_3\}\big\}.$$

Each 2-supervertex represents a division that groups two teams. To model a cross-division project involving both divisions, define the set of 2-superedges:

$$E = \Big\{\{\{\mathrm{Team}_1, \mathrm{Team}_2\},\ \{\mathrm{Team}_2, \mathrm{Team}_3\}\}\Big\}.$$

Then

$$\mathrm{SHT}^{(2)} = (V, E)$$

is a 2-SuperHyperGraph capturing the structure of corporate collaboration across divisions.

Definition 1.7 (n-SuperHypertree). (cf. [16]) An *n-SuperHypertree (n-SHT)* is an n-SuperHyperGraph $\mathrm{SHT}_n = (V, E)$ that satisfies the following properties:

(1) *Host Tree Condition*: There exists a tree $T = (V_T, E_T)$, called the *host tree*, such that:
   - The vertex set of T is $V_T = V$, where $V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0)$.

- Each n-superedge $e \in E$ corresponds to a connected subtree $T_e \subseteq T$. Specifically, for each $e \in E$, there exists a subtree T_e such that:

$$\bigcup_{t \in V(T_e)} B_t \supseteq e,$$

where $B_t \subseteq V$ are subsets associated with the nodes of T.

(2) *Acyclicity Condition*: The host tree T must be acyclic, ensuring that SHT_n inherits the acyclic structure of T.

(3) *Connectedness Condition*: For any two n-supervertices $v, w \in V$, there must exist a sequence of n-superedges $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ such that:

  (a) $v \in e_1$ and $w \in e_k$.

  (b) $e_i \cap e_{i+1} \neq \emptyset$ for all $1 \leq i < k$.

Example 1.8 (1-SuperHypertree: Regional Supply Chain Network)**.** Let the base set of locations be

$$V_0 = \{\text{Farm, Mill, Distributor, Retailer}\}.$$

For $n = 1$, we select the primary distribution hubs as our 1-supervertices:

$$V = \big\{\{\text{Farm}, \text{Mill}\},\ \{\text{Mill}, \text{Distributor}\},\ \{\text{Distributor}, \text{Retailer}\}\big\}.$$

We construct the host tree $T = (V_T, E_T)$ by taking $V_T = V$ and

$$E_T = \big\{(\{\text{Farm}, \text{Mill}\},\ \{\text{Mill}, \text{Distributor}\}),\ (\{\text{Mill}, \text{Distributor}\},\ \{\text{Distributor}, \text{Retailer}\})\big\}.$$

Next, we define the set of 1-superedges E, each corresponding to a connected subtree of T:

$$E = \Big\{\{\{\text{Farm}, \text{Mill}\},\ \{\text{Mill}, \text{Distributor}\}\},\ \{\{\text{Mill}, \text{Distributor}\},\ \{\text{Distributor}, \text{Retailer}\}\}\Big\}.$$

Here:

- The first superedge links the Farm–Mill hub to the Mill–Distributor hub.
- The second superedge links the Mill–Distributor hub to the Distributor–Retailer hub.

Since T is acyclic and each superedge induces a connected subtree, $\mathrm{SHT}_1 = (V, E)$ satisfies the host tree, acyclicity, and connectedness conditions. This 1-SuperHypertree thus models the hierarchical flow of goods through the regional supply chain.

1.3. *Directed hypergraph*

A directed graph consists of vertices connected by edges with assigned directions, indicating relationships. A directed hypergraph is a hypergraph generalization of a directed graph. Similar to undirected hypergraphs, directed hypergraphs have been extensively studied for their various derivatives and applications (cf. [19, 21, 22]). Its definition is provided below.

Definition 1.9 (Directed Graph)**.** [31] A *directed graph* (digraph) $G = (V, E)$ consists of:

- V: A finite set of vertices.
- $E \subseteq V \times V$: A set of directed edges, where each edge is an ordered pair (u, v) with $u, v \in V$.

The edge (u, v) indicates a directed connection from vertex u (source) to vertex v (target).

Definition 1.10 (Directed Hypergraph)**.** [1,14] A *Directed Hypergraph* H is a pair $H = (V, E)$, where:

- V is a finite set of vertices (or nodes).
- E is a finite set of hyperarcs. Each hyperarc $e \in E$ is an ordered pair $e = (\mathrm{Tail}(e), \mathrm{Head}(e))$, where:
  - $\mathrm{Tail}(e) \subseteq V$ is a non-empty subset of vertices, called the *tail* of the hyperarc.
  - $\mathrm{Head}(e) \in V$ is a single vertex, called the *head* of the hyperarc.

Properties.

- A hyperarc $e = (\mathrm{Tail}(e), \mathrm{Head}(e))$ connects all vertices in $\mathrm{Tail}(e)$ to the vertex $\mathrm{Head}(e)$.
- When $|\mathrm{Tail}(e)| = 1$ for all $e \in E$, the directed hypergraph reduces to a standard directed graph.

Definition 1.11 (Directed n-SuperHypergraph)**.** [10] Let V_0 be a finite base set, and define its k-th iterated power set

$$\mathcal{P}^0(V_0) = V_0, \quad \mathcal{P}^{k+1}(V_0) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^k(V_0)), \quad k \geq 0.$$

An *Directed n-SuperHypergraph* is an ordered pair

$$\mathrm{DSH}_n = (V, E),$$

where:

(1) $V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0)$ is the set of *n-supervertices*. Each $v \in V$ may be
  - a single element in V_0,
  - a subset of V_0,
  - a nested subset up to depth n,
  - the empty set, or
  - a fuzzy/indeterminate set (cf. [30]), depending on the application.

(2) $E \subseteq \big(\mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(V)\big)$ is a set of *directed n-superhyperedges*. Each directed n-superhyperedge $e \in E$ is an ordered pair

$$e = \big(T(e), H(e)\big),$$

with

$$T(e) \subseteq V \quad \text{and} \quad H(e) \subseteq V,$$

where:

- $T(e)$ is called the *tail set*, representing the "source" supervertices.
- $H(e)$ is called the *head set*, representing the "target" supervertices.

Example 1.12 (Real-World Example: Directed 2-SuperHypergraph in an IoT Data Network)**.** Consider an IoT deployment consisting of four sensors:

$$V_0 = \{\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3, \mathrm{S}_4\}.$$

The first iterated powerset $\mathcal{P}^1(V_0) = P(V_0)$ yields all possible sensor clusters, for example $\{\{S_1, S_2\}, \{S_3\}, \{S_2, S_4\}, \ldots\}$. The second iterated powerset $\mathcal{P}^2(V_0) = P\big(P(V_0)\big)$ consists of collections of these clusters. We select two such collections as our set of 2-supervertices:

$$V = \Big\{\{\{S_1, S_2\}, \{S_3, S_4\}\},\ \{\{S_1, S_3\}, \{S_2, S_4\}\}\Big\}.$$

Here each 2-supervertex represents a regional aggregation unit grouping two sensor clusters.

Next, we define the set of directed 2-superhyperedges E as follows:

$$e_1 = \Big(\{\{S_1, S_2\}, \{S_3, S_4\}\},\ \{\{S_1, S_3\}, \{S_2, S_4\}\}\Big),$$
$$e_2 = \Big(\{\{S_1, S_3\}, \{S_2, S_4\}\},\ \{\{S_1, S_2\}, \{S_3, S_4\}\}\Big).$$

In this model:

- e_1 represents a data-flow from the first regional aggregator $\{\{S_1, S_2\}, \{S_3, S_4\}\}$ to the second $\{\{S_1, S_3\}, \{S_2, S_4\}\}$.
- e_2 captures the reverse synchronization flow.

Thus, $\mathrm{DSH}_2 = (V, E)$ is a Directed 2-SuperHypergraph modeling high-level, multi-cluster data exchanges in an IoT system.

1.4. *Directed Acyclic Graph (DAG)*

A Directed Acyclic Graph (DAG) is a directed graph that contains no cycles, where edges represent dependencies. DAGs are commonly used in scheduling, data flow analysis, and optimization [20, 24]. DAGs play a crucial role in various applications, including dependency resolution, causal inference, and parallel computing. A related concept is the bidirected acyclic graph, which is also well studied [15].

Definition 1.13 (Directed Acyclic Graph (DAG))**.** [24, 29] A *Directed Acyclic Graph (DAG)* is a directed graph $G = (V, E)$ that contains no directed cycles. That is, there does not exist a sequence of distinct vertices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ such that:

$$(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1) \in E.$$

Example 1.14 (Directed Acyclic Graph (DAG): Project Workflow)**.** Consider a software project composed of five tasks ordered by dependencies:

$$V = \{\text{Planning, Design, Implementation, Testing, Deployment}\}.$$

We model the precedence constraints by the edge set

$$E = \{(\text{Planning, Design}), (\text{Design, Implementation}),$$

$$(\text{Implementation, Testing}), (\text{Planning, Testing}), (\text{Testing, Deployment})\}.$$

Here:

- Planning → Design and Planning → Testing ensure that both design and test planning begin only after requirements are set.
- Design → Implementation enforces that coding starts after design is complete.
- Implementation → Testing and Testing → Deployment reflect the usual build–test–release cycle.

Since no sequence of edges leads back to an earlier task, this graph contains no directed cycles and thus is a valid DAG.

The concept of a Directed Acyclic Hypergraph (DAH), as a hypergraph-based generalization of a DAG, has also been studied in the literature [18, 23]. Its formal definition is presented below.

Definition 1.15 (Directed Acyclic Hypergraph (DAH))**.** (cf. [18, 23]) A **Directed Acyclic Hypergraph (DAH)** is a directed hypergraph $H = (V, E)$ that does not contain any **hypercycle**, which is defined as a sequence of distinct vertices $v_1, v_2, \dots, v_k$ such that for each $i = 1, \dots, k$, there exists a hyperedge $e_i = (e_{T_i}, e_{H_i}) \in E$ with:

$$v_i \in e_{T_i} \quad \text{and} \quad v_{i+1} \in e_{H_i}, \quad \text{where } v_{k+1} = v_1.$$

Example 1.16 (Directed Acyclic Hypergraph: Software Development Workflow)**.** Consider a software development pipeline modeled as a directed acyclic hypergraph $H = (V, E)$, where

$$V = \{\text{Req, Design, Impl, Plan, Test, Deploy}\}$$

represents the key activities:

- Req: Requirements gathering
- Design: System design
- Impl: Implementation (coding)
- Plan: Test plan preparation
- Test: Testing
- Deploy: Deployment

Define the set of hyperedges

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\},$$

where each $e_i = (T(e_i), H(e_i))$ models dependencies:

$$\begin{aligned} e_1 &= \bigl(\{\text{Req}\},\ \{\text{Design}\}\bigr), \\ e_2 &= \bigl(\{\text{Design}\},\ \{\text{Impl}\}\bigr), \\ e_3 &= \bigl(\{\text{Req}\},\ \{\text{Plan}\}\bigr), \\ e_4 &= \bigl(\{\text{Impl, Plan}\},\ \{\text{Test}\}\bigr), \\ e_5 &= \bigl(\{\text{Test}\},\ \{\text{Deploy}\}\bigr). \end{aligned}$$

Here:

- e_1 and e_3 represent that both design and test-plan creation depend on the requirement phase.
- e_2 indicates design must complete before implementation.
- e_4 is a hyperedge with two tails $(\text{Impl}, \text{Plan})$ leading to testing.
- e_5 models deployment after successful testing.

Since there is no sequence of hyperedges leading back to any starting activity, H contains no hypercycles and is therefore a Directed Acyclic Hypergraph.

2. Results

This section presents the results obtained in this study.

2.1. *Directed Acyclic SuperHypergraph*

A Directed Acyclic SuperHypergraph (DASH) is a hierarchical hypergraph with directed superhyperedges, containing no cycles, used for complex dependency modeling and multi-level data structures.

Definition 2.1 (Directed Cycle in a SuperHypergraph)**.** Let $\mathrm{DSH}_n = (V, E)$ be a Directed n-SuperHypergraph. A *directed cycle* is a sequence of distinct n-supervertices

$$v_1, v_2, \ldots, v_k \quad (k \geq 2)$$

for which there exist directed n-superhyperedges

$$e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$$

satisfying

$$v_i \in T(e_i) \quad \text{and} \quad v_{i+1} \in H(e_i), \quad \text{for } i = 1, \ldots, k,$$

with the convention $v_{k+1} = v_1$.

Definition 2.2 (Directed Acyclic SuperHypergraph (DASH))**.** A Directed n-SuperHypergraph $\mathrm{DSH}_n = (V, E)$ is called a *Directed Acyclic SuperHypergraph (DASH)* if it contains no directed cycle (as in Definition 2.1).

Definition 2.3 (Incoming SuperHyperedge and Source)**.** For a supervertex $v \in V$ in a Directed n-SuperHypergraph $\mathrm{DSH}_n = (V, E)$, define its set of *incoming superhyperedges* by

$$\mathrm{In}(v) := \{e \in E \mid v \in H(e)\}.$$

A supervertex v is called a *source* if

$$\mathrm{In}(v) = \emptyset.$$

Example 2.4 (Directed Acyclic SuperHypergraph (DASH): Social Media Group Merging)**.** Let the base set of user groups be

$$V_0 = \{\mathrm{G}_A,\ \mathrm{G}_B,\ \mathrm{G}_C\}.$$

We take $n = 1$, so our 1-supervertices are all nonempty subsets of V_0:

$$V = \bigl\{\{\mathrm{G}_A\},\ \{\mathrm{G}_B\},\ \{\mathrm{G}_C\},\ \{\mathrm{G}_A, \mathrm{G}_B\},\ \{\mathrm{G}_B, \mathrm{G}_C\},\ \{\mathrm{G}_A, \mathrm{G}_C\},\ \{\mathrm{G}_A, \mathrm{G}_B, \mathrm{G}_C\}\bigr\}.$$

Define the set of directed superhyperedges E to model successive merge operations:

$$\begin{aligned} e_1 &= \bigl(\{\{\mathrm{G}_A\}, \{\mathrm{G}_B\}\},\ \{\{\mathrm{G}_A, \mathrm{G}_B\}\}\bigr), \\ e_2 &= \bigl(\{\{\mathrm{G}_B\}, \{\mathrm{G}_C\}\},\ \{\{\mathrm{G}_B, \mathrm{G}_C\}\}\bigr), \\ e_3 &= \bigl(\{\{\mathrm{G}_A, \mathrm{G}_B\}, \{\mathrm{G}_C\}\},\ \{\{\mathrm{G}_A, \mathrm{G}_B, \mathrm{G}_C\}\}\bigr), \\ e_4 &= \bigl(\{\{\mathrm{G}_A\}, \{\mathrm{G}_C\}\},\ \{\{\mathrm{G}_A, \mathrm{G}_C\}\}\bigr). \end{aligned}$$

Here:

- e_1 merges groups G_A and G_B.
- e_2 merges groups G_B and G_C.
- e_3 merges the combined group $\{G_A, G_B\}$ with G_C.
- e_4 merges G_A and G_C.

No sequence of these superhyperedges forms a cycle, so $\mathrm{DSH}_1 = (V, E)$ is a Directed Acyclic SuperHypergraph.

Example 2.5 (Directed Acyclic SuperHypergraph (DASH): Manufacturing Assembly Process)**.** Let the base set of components be

$$V_0 = \{\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}\},$$

where $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ denote basic parts. Taking $n = 1$, our 1-supervertices are the nonempty subsets of V_0:

$$V = \bigl\{\{\mathrm{A}\},\ \{\mathrm{B}\},\ \{\mathrm{C}\},\ \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\},\ \{\mathrm{B}, \mathrm{C}\},\ \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}\bigr\}.$$

Define directed superhyperedges E to represent assembly steps:

$$e_1 = \big(\{\{\mathrm{A}\}, \{\mathrm{B}\}\}, \{\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}\}\big),$$
$$e_2 = \big(\{\{\mathrm{B}\}, \{\mathrm{C}\}\}, \{\{\mathrm{B}, \mathrm{C}\}\}\big),$$
$$e_3 = \big(\{\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}, \{\mathrm{C}\}\}, \{\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}\}\big).$$

Here:

- e_1 assembles parts A and B into subassembly AB.
- e_2 assembles parts B and C into subassembly BC.
- e_3 combines subassembly AB with part C to produce the final product ABC.

No directed sequence of these superhyperedges returns to a previous supervertex, so $\mathrm{DSH}_1 = (V, E)$ is a Directed Acyclic SuperHypergraph modeling the assembly process.

Theorem 2.6 (Existence of a Source)**.** *In any finite Directed Acyclic SuperHypergraph* $\mathrm{DSH}_n = (V, E)$*, there exists at least one supervertex* $v \in V$ *with* $\mathrm{In}(v) = \emptyset$*.*

Proof. Assume, for the sake of contradiction, that every supervertex $v \in V$ has at least one incoming superhyperedge; that is, $\mathrm{In}(v) \neq \emptyset$ for all $v \in V$. Pick an arbitrary supervertex $v_1 \in V$. By assumption, there exists an edge $e_1 \in E$ such that $v_1 \in H(e_1)$. Choose a supervertex $v_2 \in T(e_1)$. Again, since v_2 has an incoming edge, there exists an edge $e_2 \in E$ with $v_2 \in H(e_2)$; choose $v_3 \in T(e_2)$. Continue in this manner. Since V is finite, by the pigeonhole principle, some vertex must eventually repeat. Let $v_i = v_j$ for some $i < j$. Then the sequence

$$v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j = v_i$$

forms a directed cycle, contradicting the acyclicity of DSH_n. Hence, there must exist at least one supervertex v with no incoming superhyperedges. □

Theorem 2.7 (Topological Ordering)**.** *Every finite Directed Acyclic SuperHypergraph* $\mathrm{DSH}_n = (V, E)$ *admits a topological ordering of its supervertices.*

Proof. We prove this by induction on the number of supervertices $|V|$.

Base Case: If $|V| = 1$, the unique ordering is trivial.

Inductive Step: Assume that every Directed Acyclic SuperHypergraph with fewer than $|V|$ supervertices has a topological ordering. By Theorem 2.6, there exists a source $v \in V$ (i.e., $\mathrm{In}(v) = \emptyset$). Remove v from DSH_n along with all superhyperedges incident to v (that is, all $e \in E$ with $v \in T(e)$ or $v \in H(e)$); denote the resulting Directed Acyclic SuperHypergraph by $\mathrm{DSH}'_n = (V \setminus \{v\}, E')$. By the induction hypothesis, DSH'_n has a topological ordering. Prepending v to this ordering yields a topological ordering for the entire DSH_n. □

Theorem 2.8 (Partial Order Induced by Reachability)**.** *Let* $\mathrm{DSH}_n = (V, E)$ *be a Directed Acyclic SuperHypergraph. Define a binary relation* $\prec$ *on* V *by declaring*

$$u \prec v \quad \textit{if there exists a directed path from } u \textit{ to } v.$$

Then, $\prec$ *is a strict partial order on* V*.*

Proof. We show that the relation $\prec$ is irreflexive, transitive, and asymmetric.

(i) **Irreflexivity:** Suppose, toward a contradiction, that $v \prec v$ for some $v \in V$. Then there exists a directed path from v back to itself, which forms a directed cycle. This contradicts the acyclicity of DSH_n. Thus, $v \not\prec v$ for any $v \in V$.

(ii) **Transitivity:** If $u \prec v$ and $v \prec w$, then there exist a directed path from u to v and one from v to w. By concatenating these paths, we obtain a directed path from u to w, so $u \prec w$.

(iii) **Asymmetry:** Assume that $u \prec v$. If it were also the case that $v \prec u$, then by transitivity we would have $u \prec u$, contradicting irreflexivity. Hence, if $u \prec v$ then it cannot be that $v \prec u$.

Thus, $\prec$ is a strict partial order on V. □

Theorem 2.9 (Generalization Property of Directed Acyclic SuperHypergraphs)**.** *Let* $\mathrm{DASH}_n = (V, E)$ *be a Directed Acyclic SuperHypergraph with base set* V_0 *and* $n \geq 0$*. Then:*

(1) Every Directed Acyclic Hypergraph is a special case of a Directed Acyclic SuperHypergraph. In particular, if $H = (V, E)$ *is a Directed Acyclic Hypergraph, then by taking* $V_0 = V$ *(so that* $\mathcal{P}^0(V_0) = V$*) and interpreting each hyperedge* $e \in E$ *as a superhyperedge with tail* $T(e)$ *and head* $H(e)$*, we obtain a Directed Acyclic SuperHypergraph isomorphic to* H*.*

(2) Every Directed Acyclic Graph is a special case of a Directed Acyclic SuperHypergraph. Specifically, if $G = (V, E)$ *is a Directed Acyclic Graph where each edge* e *is an ordered pair* (u, v)*, then by defining for each edge the corresponding superhyperedge with*

$$T(e) = \{u\} \quad \textit{and} \quad H(e) = \{v\},$$

the resulting structure is a Directed Acyclic SuperHypergraph isomorphic to G*.*

Proof. We prove the two statements separately.

(1) Directed Acyclic Hypergraph ⇒ Directed Acyclic SuperHypergraph:
Let $H = (V, E)$ be a Directed Acyclic Hypergraph. By definition, V is a finite set and each hyperedge $e \in E$ is an ordered pair

$$e = (e_T, e_H)$$

with $e_T, e_H \subseteq V$. Note that setting $n = 0$ yields

$$\mathcal{P}^0(V_0) = V_0.$$

Choosing $V_0 = V$ guarantees that $V \subseteq \mathcal{P}^0(V_0)$. Now, interpret each hyperedge $e \in E$ as a superhyperedge in a Directed Acyclic SuperHypergraph $\text{DASH}_0 = (V, E)$ by keeping the same tail and head sets:

$$T(e) = e_T \quad \text{and} \quad H(e) = e_H.$$

Since the acyclicity property is inherent in H, the resulting structure is acyclic and hence a Directed Acyclic SuperHypergraph that is isomorphic to H.

(2) Directed Acyclic Graph $\Rightarrow$ Directed Acyclic SuperHypergraph:
Let $G = (V, E)$ be a Directed Acyclic Graph. Each edge $e \in E$ is an ordered pair (u, v) with $u, v \in V$. Again, taking $n = 0$ and $V_0 = V$ gives us $V \subseteq \mathcal{P}^0(V_0)$. For each edge $e = (u, v)$ in G, define a corresponding superhyperedge in the Directed Acyclic SuperHypergraph $\text{DASH}_0 = (V, E')$ by setting:

$$T(e) = \{u\} \quad \text{and} \quad H(e) = \{v\}.$$

The acyclic nature of G ensures that no directed cycle is introduced in the superhypergraph representation. Therefore, G is isomorphic to a Directed Acyclic SuperHypergraph. $\square$

Funding

This study did not receive any financial or external support from organizations or individuals.

Acknowledgments

We extend our sincere gratitude to everyone who provided insights, inspiration, and assistance throughout this research. We particularly thank our readers for their interest and acknowledge the authors of the cited works for laying the foundation that made our study possible. We also appreciate the support from individuals and institutions that provided the resources and infrastructure needed to produce and share this paper. Finally, we are grateful to all those who supported us in various ways during this project.

Ethical Approval

As this research is entirely theoretical in nature and does not involve human participants or animal subjects, no ethical approval is required.

Data Availability

This research is purely theoretical, involving no data collection or analysis. We encourage future researchers to pursue empirical investigations to further develop and validate the concepts introduced here.

Authors' Contributions

The sole author designed, analysed, interpreted, and prepared the manuscript.

Research Integrity

The authors hereby confirm that, to the best of their knowledge, this manuscript is their original work, has not been published in any other journal, and is not currently under consideration for publication elsewhere at this stage.

Disclaimer (Note on Computational Tools)

No computer-assisted proof, symbolic computation, or automated theorem proving tools (e.g., Mathematica, SageMath, Coq, etc.) were used in the development or verification of the results presented in this paper. All proofs and derivations were carried out manually and analytically by the authors.

Disclaimer (Limitations and Claims)

The theoretical concepts presented in this paper have not yet been subject to practical implementation or empirical validation. Future researchers are invited to explore these ideas in applied or experimental settings. Although every effort has been made to ensure the accuracy of the content and the proper citation of sources, unintentional errors or omissions may persist. Readers should independently verify any referenced materials.

To the best of the authors' knowledge, all mathematical statements and proofs contained herein are correct and have been thoroughly vetted. Should you identify any potential errors or ambiguities, please feel free to contact the authors for clarification.

The results presented are valid only under the specific assumptions and conditions detailed in the manuscript. Extending these findings to broader mathematical structures may require additional research. The opinions and conclusions expressed in this work are those of the authors alone and do not necessarily reflect the official positions of their affiliated institutions.

Competing Interests

Author has declared that no competing interests exist.

Consent to Publish declaration

The author approved to Publish declarations.

References

[1] Giorgio Ausiello and Luigi Laura. Directed hypergraphs: Introduction and fundamental algorithms?a survey. *Theoretical Computer Science*, 658:293–306, 2017.

[2] Claude Berge. *Hypergraphs: combinatorics of finite sets*, volume 45. Elsevier, 1984.

[3] Alain Bretto. Hypergraph theory. *An introduction. Mathematical Engineering. Cham: Springer*, 1, 2013.

[4] Yan Cao. Integrating treesoft and hypersoft paradigms into urban elderly care evaluation: A comprehensive n-superhypergraph approach. *Neutrosophic Sets and Systems*, 85:852–873, 2025.

[5] Y. V. M. Cepeda, M. A. R. Guevara, E. J. J. Mogro, and R. P. Tizano. Impact of irrigation water technification on seven directories of the san juan-patoa river using plithogenic n-superhypergraphs based on environmental indicators in the canton of pujili, 2021. *Neutrosophic Sets and Systems*, 74:46–56, 2024.

[6] Reinhard Diestel. Graph theory 3rd ed. *Graduate texts in mathematics*, 173(33):12, 2005.

[7] Reinhard Diestel. *Graph theory.* Springer (print edition); Reinhard Diestel (eBooks), 2024.

[8] Song Feng, Emily Heath, Brett Jefferson, Cliff Joslyn, Henry Kvinge, Hugh D Mitchell, Brenda Praggastis, Amie J Eisfeld, Amy C Sims, Larissa B Thackray, et al. Hypergraph models of biological networks to identify genes critical to pathogenic viral response. *BMC bioinformatics*, 22(1):287, 2021.

[9] Yifan Feng, Haoxuan You, Zizhao Zhang, Rongrong Ji, and Yue Gao. Hypergraph neural networks. In *Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence*, volume 33, pages 3558–3565, 2019.

[10] Takaaki Fujita. Review of some superhypergraph classes: Directed, bidirected, soft, and rough. *Advancing Uncertain Combinatorics through Graphization, Hyperization, and Uncertainization: Fuzzy, Neutrosophic, Soft, Rough, and Beyond (Second Volume)*, 2024.

[11] Takaaki Fujita. Hypergraph and superhypergraph approaches in electronics: A hierarchical framework for modeling power-grid hypernetworks and superhypernetworks. *Journal of Energy Research and Reviews*, 17(6):102–136, 2025.

[12] Takaaki Fujita. An introduction and reexamination of molecular hypergraph and molecular n-superhypergraph. *Asian Journal of Physical and Chemical Sciences*, 13(3):1–38, 2025.

[13] Takaaki Fujita. Unifying grain boundary networks and crystal graphs: A hypergraph and superhypergraph perspective in material sciences. *Asian Journal of Advanced Research and Reports*, 19(5):344–379, 2025.

[14] Giorgio Gallo, Giustino Longo, Stefano Pallottino, and Sang Nguyen. Directed hypergraphs and applications. *Discrete applied mathematics*, 42(2-3):177–201, 1993.

[15] Vaithianathan Geetha and Niladhuri Sreenath. High concurrency for continuously evolving oodbms. In *Distributed Computing and Internet Technology: 8th International Conference, ICDCIT 2012, Bhubaneswar, India, February 2-4, 2012. Proceedings 8*, pages 94–105. Springer, 2012.

[16] Masoud Ghods, Zahra Rostami, and Florentin Smarandache. Introduction to neutrosophic restricted superhypergraphs and neutrosophic restricted superhypertrees and several of their properties. *Neutrosophic Sets and Systems*, 50:480–487, 2022.

[17] Jonathan L Gross, Jay Yellen, and Mark Anderson. *Graph theory and its applications.* Chapman and Hall/CRC, 2018.

[18] Mohammad Ali Javidian, Zhiyu Wang, Linyuan Lu, and Marco Valtorta. On a hypergraph probabilistic graphical model. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 88:1003–1033, 2020.

[19] Spencer Krieger and John D. Kececioglu. Shortest hyperpaths in directed hypergraphs for reaction pathway inference. *Journal of computational biology : a journal of computational molecular cell biology*, 2023.

[20] Ari M Lipsky and Sander Greenland. Causal directed acyclic graphs. *JAMA*, 327(11):1083–1084, 2022.

[21] Heechan Moon, Hyunju Kim, Sunwoo Kim, and Kijung Shin. Four-set hypergraphlets for characterization of directed hypergraphs. *ArXiv*, abs/2311.14289, 2023.

[22] Kazusato Oko, Shinsaku Sakaue, and Shin ichi Tanigawa. Nearly tight spectral sparsification of directed hypergraphs. In *International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, 2023.

[23] Merten Popp, Sebastian Schlag, Christian Schulz, and Daniel Seemaier. Multilevel acyclic hypergraph partitioning. In *2021 Proceedings of the Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX)*, pages 1–15. SIAM, 2021.

[24] Ian Shrier and Robert W Platt. Reducing bias through directed acyclic graphs. *BMC medical research methodology*, 8:1–15, 2008.

[25] F. Smarandache. Introduction to superhyperalgebra and neutrosophic superhyperalgebra. *Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras*, 2022.

[26] Florentin Smarandache. n-superhypergraph and plithogenic n-superhypergraph. *Nidus Idearum*, 7:107–113, 2019.

[27] Florentin Smarandache. *Extension of HyperGraph to n-SuperHyperGraph and to Plithogenic n-SuperHyperGraph, and Extension of HyperAlgebra to n-ary (Classical-/Neutro-/Anti-) HyperAlgebra*. Infinite Study, 2020.

[28] Florentin Smarandache. Foundation of superhyperstructure & neutrosophic superhyperstructure. *Neutrosophic Sets and Systems*, 63(1):21, 2024.

[29] Thomas C Williams, Cathrine C Bach, Niels B Matthiesen, Tine B Henriksen, and Luigi Gagliardi. Directed acyclic graphs: a tool for causal studies in paediatrics. *Pediatric research*, 84(4):487–493, 2018.

[30] Lotfi A Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3):338–353, 1965.

[31] Ping Zhang and Gary Chartrand. Introduction to graph theory. *Tata McGraw-Hill*, 2:2–1, 2006.

Article

Formalisation du perspectivisme latino-américain : un modèle neutrosophique de multiperspectivisme

Maikel Y. Leyva Vázquez[1,2*], Florentin Smarandache[3]

[1] Universidad Bolivariana del Ecuador, Duran, Guayas Ecuador; myleyvav@ube.edu.ec
[2] Universidad de Guayaquil, Guayas Ecuador; myleyvav@ube.edu.ec
[3] University of New Mexico; Mathematics, Physics, and Natural Science Division, Gallup, NM 87301, USA; smarand@unm.edu
* Correspondence: myleyvav@ube.edu.ec

Received: Month Day, Year; *Accepted:* Month Day, Year; *Published:* Month Day, Year

Résumé : Cet article aborde le défi de modéliser formellement les systèmes de connaissance complexes, souvent contradictoires, propres à la pensée décoloniale latino-américaine. Il introduit le *MultiPerspectivisme Neutrosophique*, un cadre théorique qui opérationnalise le perspectivisme philosophique à l'aide de la logique neutrosophique. Nous posons comme postulat que la connaissance est située et que la vérité est médiée par le point de vue de l'observateur — un concept enraciné dans la philosophie nietzschéenne mais qui trouve une expression singulière dans les cosmologies amérindiennes et les systèmes juridiques pluralistes. La méthode principale consiste à proposer un *Modèle de MultiPerspectivisme Neutrosophique*, utilisant des ensembles multi-neutrosophiques pour représenter les perspectives subjectives sous forme de triplets de séquences de vérité, d'indétermination et de fausseté ⟨T, I, F⟩. Un résultat clé est le développement d'une fonction de similarité permettant de quantifier l'affinité entre différentes perspectives, transformant ainsi des points de vue qualitatifs en données analysables. Ce modèle est appliqué à une étude de cas portant sur un conflit foncier juridique, où il permet de révéler des similitudes structurelles cachées — telles qu'un style de raisonnement absolutiste partagé entre des parties opposées — et d'identifier des alliances stratégiques potentielles. La conclusion principale est que la logique neutrosophique offre un outil mathématique robuste pour naviguer à travers l'ambiguïté et la pluralité des réalités perspectivistes, allant au-delà de la simple reconnaissance de la différence vers son analyse formelle et son intégration possible..

Mots-clés : Logique neutrosophique ; MultiPerspectivisme ; Philosophie latino-américaine ; Théorie décoloniale ; Ensembles multi-neutrosophiques ; Fonction de similarité ; Pluralisme juridique ; Perspectivisme.

1. Introduction

Le perspectivisme en philosophie est un courant de pensée qui soutient que toute connaissance, perception ou vérité est inévitablement médiée par la perspective du sujet connaissant [1]. Cette idée, puissamment développée par Friedrich Nietzsche, remet en question la notion d'une vérité objective et universelle, en proposant à la place qu'il existe de multiples interprétations du monde, chacune valide dans son propre cadre [2].

Pour Nietzsche, il n'existe pas de faits purs, seulement des interprétations — ce qui implique que l'accès à la réalité est toujours conditionné par des facteurs historiques, culturels, psychologiques et linguistiques [3].

Au-delà de Nietzsche, le perspectivisme a influencé divers courants contemporains tels que le post-structuralisme, le constructivisme social et les épistémologies du Sud, qui soulignent tous l'importance du « lieu d'énonciation ». Dans les contextes latino-américains, par exemple, il a été articulé en lien avec la pensée décoloniale [4] et les visions du monde autochtones [5], qui reconnaissent la coexistence de multiples mondes et manières de connaître. Ainsi, le perspectivisme ne nie pas l'existence de la réalité ; il remet plutôt en question la possibilité de la saisir à travers une seule rationalité dominante, ouvrant la voie à une compréhension pluraliste, relationnelle et située de la connaissance.

Le terme *perspectivisme* est également étroitement associé au philosophe espagnol José Ortega y Gasset, qui en a fait un élément central de sa philosophie. Ortega soutenait que la réalité se manifeste différemment à chaque individu, et que la somme de toutes ces perspectives individuelles permet de s'approcher d'une compréhension plus complète de la vérité [6].

Cette approche, qui reconnaît la validité de points de vue multiples sans dissoudre l'existence d'une réalité objective, s'aligne sur un courant contemporain de la philosophie des sciences connu sous le nom de *réalisme perspectiviste* [7]. Cette position soutient que la connaissance, bien qu'objective, est toujours partielle et obtenue à partir d'une perspective située. De la même manière que différentes cartes (topographique, politique, climatique) peuvent décrire le même territoire de façons distinctes mais également valides, des perspectives diverses peuvent offrir une connaissance réelle, bien que partielle, du monde. Ce cadre permet de dépasser la fausse dichotomie entre un universalisme absolutiste et un relativisme nihiliste — une tension centrale dans cette étude.

Le perspectivisme ne cherche pas à invalider la cohérence interne ni l'applicabilité formelle des principes logiques classiques — tels que le principe de non-contradiction, le tiers exclu ou la bivalence — lorsqu'ils opèrent dans un système fermé et cohérent. Il remet plutôt en question l'hypothèse ontologique selon laquelle ces principes refléteraient nécessairement une réalité objective et universelle, indépendante du sujet. D'un point de vue perspectiviste, ces lois logiques ne sont pas rejetées dans leur structure formelle, mais leur prétention à une correspondance absolue avec la réalité du monde est soumise à un examen critique. La critique perspectiviste ne vise donc pas la validité interne de telles formules, mais leur portée épistémologique — c'est-à-dire, si de telles structures binaires sont adéquates pour saisir toute la complexité, l'ambiguïté et la multiplicité contextuelle de l'expérience vécue, des systèmes culturels et de la production de savoir. De cette manière, le perspectivisme reconfigure la logique elle-même en tant que construction située, dont les postulats fondamentaux peuvent être valables dans certains paradigmes, mais non universellement dans tous les domaines ontologiques ou épistémologiques.

1.1 Principe de Non-Contradiction

Ce principe postule qu'une proposition $\mathcal{P}$ ne peut pas simultanément se voir attribuer les valeurs de vérité vrai et faux. Formellement, il est exprimé comme suit :

$$\neg(\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{P}) \tag{1}$$

qui est interprété comme : « *Il n'est pas le cas que $\mathcal{P}$ et sa négation $\neg\mathcal{P}$ soient tous deux vrais.* » Cet axiome assure la cohérence logique des systèmes classiques en excluant la coexistence d'assertions contradictoires.

1.2 Principe du Tiers Exclu

Ce principe affirme que pour toute proposition bien formée $\mathcal{P}$, soit $\mathcal{P}$ est vraie, soit sa négation $\neg\mathcal{P}$ est vraie. Il est symboliquement représenté comme suit :

$$\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{P} \tag{2}$$

Cette disjonction est universellement valable en logique classique, excluant l'existence de toute valeur de vérité intermédiaire ou tierce entre le vrai et le faux.

1.3 Principe de Bivalence

Contrairement aux deux précédents, il s'agit d'un principe sémantique plutôt que syntaxique. Il postule l'existence d'une fonction de valuation.

$$v: L \to \{0,1\} \tag{3}$$

définie sur un langage logique L, telle que pour toute formule bien formée $\phi \in L$,

$$v(\phi) \in \{0,1\} \tag{4}$$

Autrement dit, chaque proposition est soit vraie $(v(\phi) = 1)$ soit fausse $(v(\phi) = 0)$, sans aucune tolérance pour la gradation, l'indétermination ou les valeurs de vérité alternatives. Ce cadre de valorisation binaire sous-tend la validité formelle à la fois du Principe de Non-Contradiction et du Principe du Tiers Exclu.

Les épistémologies perspectivistes et les logiques non-classiques — telles que les systèmes à valeurs multiples, flous et neutrosophiques — remettent en question le Principe de Bivalence en introduisant des évaluations où les propositions peuvent être partiellement vraies, indéterminées, ou même simultanément vraies et fausses selon des points de vue spécifiques [8]. Ainsi, l'affirmation selon laquelle la valeur d'une proposition doit être strictement soit 0 soit 1 est incompatible avec les cadres qui acceptent la pluralité épistémique ou ontologique.

*

En résumé, cet article aborde le défi fondamental de modéliser formellement les systèmes de connaissance complexes et souvent contradictoires inhérents à la pensée décoloniale latino-américaine, pour lesquels la logique bivalente classique s'avère insuffisante. L'objectif principal a été de construire un pont conceptuel et méthodologique entre le perspectivisme philosophique et le cadre mathématique de la logique neutrosophique, cherchant à opérationnaliser ses principes. À cette fin, l'article introduit le cadre du *MultiPerspectivisme Neutrosophique*, développant un modèle qui utilise des ensembles MultiNeutrosophiques et une fonction de similarité pour représenter et comparer quantitativement divers points de vue. À travers une étude de cas portant sur un litige foncier, la capacité du modèle à révéler des dynamiques structurelles cachées entre les parties en conflit est démontrée, validant ainsi son utilité en tant qu'outil robuste pour analyser et naviguer l'ambiguïté et la pluralité inhérentes aux réalités perspectivistes.

2. Préliminaires

2.1 Philosophie neutrosophique et Perspectivisme

La *philosophie neutrosophique* [9] offre un cadre formel et mathématique à l'école philosophique du perspectivisme. La relation peut être comprise à travers les connexions clés suivantes [10].

Le lien le plus explicite entre la neutrosophie et le perspectivisme est le *Principe de Relativité Référentielle* [9]. Ce principe stipule que « la vérité, la fausseté et l'indétermination de toute proposition dépendent du système référentiel dans lequel elle est examinée ». Cela signifie qu'une idée peut être vraie dans un contexte, fausse dans un autre, et indéterminée dans un troisième. C'est la thèse centrale du perspectivisme : il n'y a pas de vérités absolues ; la connaissance est toujours conditionnée par le point de vue de l'observateur. La neutrosophie adopte cette idée et l'établit comme un principe fondamental de son système.

Le perspectivisme défie la logique classique, qui est basée sur une stricte dualité vrai/faux. Contrairement à la logique traditionnelle, la neutrosophie introduit le concept de *degrés de vérité, de fausseté et d'indétermination*. Cela permet la modélisation mathématique d'une réalité où les propositions ne sont pas absolument vraies ou fausses mais existent sur un spectre, comme le suggérerait une approche perspectiviste [11].

La neutrosophie revisite les idées traditionnelles, affirmant que les vérités au sein d'un système référentiel peuvent devenir des faussetés dans un autre, et vice versa. Cette approche souligne la *fluidité de la connaissance* et exhorte à considérer les idées sous de multiples angles, un objectif central de la pensée perspectiviste.

Si le perspectivisme affirme l'existence de nombreuses perspectives valides, la question se pose de savoir quel système logique utiliser pour leur analyse. Il n'y a pas une seule « logique vraie » ; au contraire, un ensemble de cadres logiques existe, chacun offrant différentes perspectives sur la vérité et la validité [12]. La neutrosophie s'aligne sur ce pluralisme, se présentant non pas comme la seule logique mais comme un outil flexible et puissant particulièrement adapté aux contextes d'indétermination et de contradiction, qui sont des conséquences naturelles de la coexistence de multiples perspectives.

Le perspectivisme conduit inévitablement à des *contradictions* lorsque deux points de vue valides s'opposent. La logique classique ne peut gérer cela sans écarter l'une des perspectives. La neutrosophie, cependant, est conçue pour *embrasser l'indétermination, le paradoxe et l'interaction entre les opposés et les neutralités*.

En permettant aux valeurs de T et F d'être indépendantes, la neutrosophie peut modéliser formellement une proposition qui est à la fois vraie et fausse en même temps (un état dialéthique, $T = 1$, $F = 1$). C'est une formalisation directe de l'apparence d'une contradiction entre deux perspectives opposées [13].

La composante d'*indétermination (I)* est cruciale, car elle permet l'analyse et la quantification de l'ambiguïté, du flou ou de l'incertitude qui surviennent lorsque les perspectives sont confuses ou incomplètes.

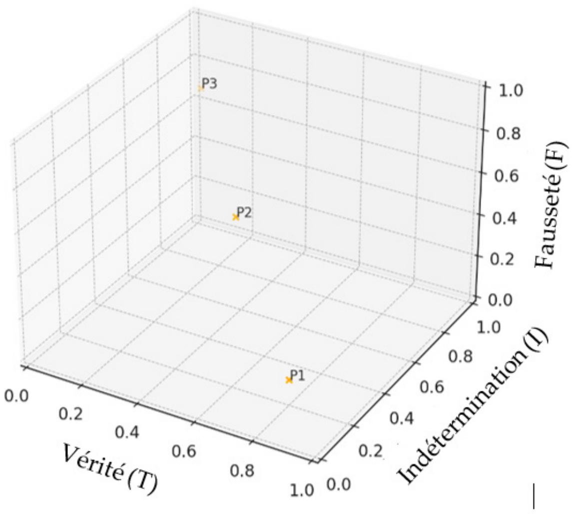


Figure 1. Représentation tridimensionnelle des perspectives neutrosophiques agrégées dans l'espace (T, I, F).

Alors que le perspectivisme se concentre sur la coexistence de la thèse (<A>) et de ses diverses antithèses (<antiA>), la neutrosophie va un pas plus loin en introduisant et en étudiant systématiquement la *neutrothèse* (<neutA>). La neutrothèse représente le spectre des neutralités — des idées ou des états qui ne sont ni la thèse ni l'antithèse, mais qui se situent dans l'espace intermédiaire. De cette manière, la neutrosophie non seulement valide de multiples perspectives (<A> et <antiA>), mais analyse également le « continuum des neutralités » qui les connecte et les équilibre, enrichissant ainsi l'analyse perspectiviste [14, 15].

Pour ce faire, la neutrosophie propose deux principes de recherche actifs [16] :

- Rechercher les « parties communes dans les choses peu communes ».
- Rechercher les « parties peu communes dans les choses communes ».

Le résultat visé est une « *synthèse* » qui intègre des éléments provenant d'opposés, à l'instar de la dialectique hégélienne, mais avec l'inclusion distincte de leurs neutralités.

La neutrosophie se rapporte au perspectivisme en partageant un fondement philosophique commun. Cependant, la neutrosophie se distingue en se concentrant sur une méthode analytique plus spécifique visant à l'intégration. Elle ne se limite pas à l'affirmation philosophique de l'existence de multiples points de vue, mais offre plutôt les outils — tels que les valeurs (T, I, F), la relativité référentielle, le pluralisme logique et la gestion de la contradiction — pour analyser, modéliser et comprendre un monde défini par l'incertitude, l'ambiguïté et la coexistence de multiples réalités. C'est, comme le suggère le titre, un nouveau paradigme de pensée dans un monde intrinsèquement perspectiviste.

La neutrosophie est un cadre philosophique et méthodologique qui étudie la relation entre les opposés et leurs indéterminations. Son objectif principal est de trouver un terrain d'entente entre des concepts opposés et d'identifier les différences dans des choses similaires, parvenant ainsi à une compréhension plus nuancée et intégrative.

2.2 Le Perspectivisme comme cadre pour les logiques plurielles

Le *perspectivisme* est un cadre philosophique qui affirme que la connaissance, la vérité et l'interprétation sont toujours conditionnées par le point de vue de l'observateur. Il remet en question l'existence de vérités absolues et indépendantes du contexte, et souligne la *multiplicité des perspectives valides* coexistant au sein de systèmes de pensée complexes. Bien que le perspectivisme soit souvent associé à Friedrich Nietzsche dans la philosophie occidentale, ses racines conceptuelles peuvent être retracées bien plus tôt dans des traditions non-européennes.

En ce qui concerne l'affinement ou la multiplication de l'indétermination, des extensions de la Logique Neutrosophique ont déjà été définies dans la littérature : la *Logique Neutrosophique Quadruple* (Vérité ; Contradiction, Incertitude ; Faux), la *Logique Neutrosophique Quintuple* (Vérité ; Contradiction, Incertitude, Inconnu ; Faux), la *Logique Neutrosophique Sextuple* (Vérité, I_1, I_2, I_3, I_4 ; Faux), la *Logique Neutrosophique Septuple* (Vérité, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 ; Faux), et ainsi de suite jusqu'à la *Logique Neutrosophique n-tuple* (où l'indétermination a été divisée en n-2 types de sous-indéterminations, selon l'application, pour $n \geq 3$).

Mais l'extension la plus générale concerne le cas où toutes les valeurs T, I, F ont été affinées ou multipliées autant de fois que nécessaire dans chaque problème (*Logique Neutrosophique n-Raffinée*, et respectivement *Logique n-MultiNeutrosophique*).

De plus, en 2014, Smarandache a introduit la *Loi du Multiple-Milieu Inclus (Law of Included Multiple-Middle)* [53] (comme extension de la Loi classique du Milieu Inclus) :

(<A>; <neutA$_1$>, <neutA$_2$>, …, <neutA$_n$>; <antiA>)

et en 2023, la *Loi des Infinis-Moyenne Inclus (Law of Included Infinitely-Many-Middles)* [54] :

(<A>; <neutA$_1$>, <neutA$_2$>, …, <neutA$_\infty$>; <antiA>)

(par exemple, entre les couleurs Blanc et Noir, il existe une infinité de nuances de couleurs).

2.2.1 Perspectivisme Ancien dans la Logique Jaïne

Dans le jaïnisme, la doctrine d'*Anekāntavāda* (littéralement, « doctrine des multiples aspects ») offre une approche perspectiviste sophistiquée de la vérité et de la réalité [17]. Selon cette doctrine, la réalité est complexe et ne peut être entièrement saisie par un seul point de vue. En conséquence, chaque affirmation n'est que partiellement vraie et doit être complétée par d'autres points de vue pour approcher une compréhension plus exhaustive. Cette forme ancienne de perspectivisme non seulement anticipe le pluralisme postmoderniste, mais fournit également une fondation métaphysique pour la tolérance, le raisonnement dialogique et une épistémologie non-absolutiste.

La logique jaïne, exprimée à travers la *Loi de Prédication Septuple (Saptabhangi)* [18], constitue un remarquable exemple précoce de raisonnement perspectiviste qui embrasse la nature multiforme et complexe de la réalité. Contrairement à la logique occidentale classique — qui adhère strictement au principe de bivalence, affirmant qu'une proposition doit être soit vraie, soit fausse — la logique jaïne autorise sept modes de prédication distincts, incluant des combinaisons telles que « vrai et indéterminé » ou « vrai et faux ». Ces formulations remettent directement en question la loi classique de non-contradiction.

Figure 2. Symbole jaïn de *l'Ahimsa*.

Enracinée dans le principe philosophique de *l'anekantavada (la doctrine de la non-unilatéralité)* [19], la logique jaïne affirme que toute affirmation n'est valide que conditionnellement à partir d'une perspective particulière. Cette humilité épistémologique découle de la reconnaissance que le langage humain est intrinsèquement limité dans sa capacité à décrire pleinement la richesse de l'existence. En conséquence, les penseurs jaïns ont promu une forme de *non-violence intellectuelle (ahimsa)* [20], encourageant le respect des désaccords raisonnables et la reconnaissance des vérités partielles.

La logique jaïne résonne conceptuellement avec la *Logique Neutrosophique*, un cadre moderne introduit par Florentin Smarandache. La logique neutrosophique généralise les logiques classiques et floues en introduisant trois composantes à chaque proposition logique : la vérité (V), l'indétermination (I) et la fausseté (F), chacune variant indépendamment dans l'intervalle réel standard ou non standard [−0, 1+]. Tout comme la logique jaïne reconnaît qu'une affirmation peut être simultanément vraie, fausse et indéterminée, la logique neutrosophique formalise cette multiplicité et l'étend avec une rigueur mathématique. Les deux systèmes rejettent la rigidité des dichotomies classiques et embrassent l'incertitude, la contradiction et la connaissance partielle comme intrinsèques à la compréhension et au raisonnement humains.

Représentation Neutrosophique du Saptibhaṅgī [21]

1. **C'est vrai (*syāt asti*)** : Cela affirme que la proposition est indubitablement vraie, sans aucune fausseté ou indétermination.

   Représentation Neutrosophique : (1, 0, 0)
   - T = 1 : Le degré de vérité est de 100 %.
   - I = 0 : Le degré d'indétermination est de 0 %.
   - F = 0 : Le degré de fausseté est de 0 %.

2. **C'est faux (*syāt nāsti*)** : Cela affirme que la proposition est indubitablement fausse.

   Représentation Neutrosophique : (0, 0, 1)
   - T = 0 : Le degré de vérité est de 0 %.
   - I = 0 : Le degré d'indétermination est de 0 %.
   - F = 1 : Le degré de fausseté est de 100 %.

3. **C'est vrai et faux (*syāt asti nāsti*)** : La proposition est simultanément vraie et fausse lorsqu'elle est vue sous différentes perspectives, un concept central de la philosophie jaïne. La neutrosophie gère directement cette apparente contradiction.

Représentation Neutrosophique : (1, 0, 1)

- T = 1 : La proposition a une composante de vérité.
- I = 0 : Il n'y a pas d'indétermination concernant ces composantes.
- F = 1 : La proposition a également une composante de fausset

4. **C'est indéterminé (ou inassertible) (*syāt avaktavyaḥ*).** L'état de la proposition est inexprimable ou logiquement indéterminé. Elle ne peut être affirmée ni comme vraie ni comme fausse.

Représentation Neutrosophique : (0, 1, 0)

- T = 0 : Elle ne peut être affirmée comme vraie.
- I = 1 : Elle est complètement indéterminée.
- F = 0 : Elle ne peut être affirmée comme fausse.

5. **C'est vrai et indéterminé (*syāt asti ca avaktavyaḥ*)** La proposition est vraie à un égard tout en étant également inexprimable ou indéterminée à un autre.

Représentation Neutrosophique : (1, 1, 0)

- T = 1 : Sa composante de vérité est affirmée.
- I = 1 : Sa composante d'indétermination est également affirmée.
- F = 0 : Elle n'a pas de composante de fausseté.

6. **C'est faux et indéterminé (*syāt nāsti ca avaktavyaḥ*)** La proposition est fausse à un égard tout en étant également indéterminée.

Représentation Neutrosophique : (0, 1, 1)

- T = 0 : Elle n'a pas de composante de vérité.
- I = 1 : Sa composante d'indétermination est affirmée.
- F = 1 : Sa composante de fausseté est affirmée.

7. **C'est vrai, faux et indéterminé (syāt asti ca nāsti ca avaktavyaḥ)** C'est l'état le plus complexe, où la proposition incarne simultanément des aspects de vérité, de fausseté et d'indétermination.

Représentation Neutrosophique : (1, 1, 1)

- T = 1 : Elle possède une composante de vérité.
- I = 1 : Elle possède une composante d'indétermination.
- F = 1 : Elle possède une composante de fausseté.

Tableau 1. Correspondance entre les prédications jaïnes et les états logiques neutrosophiques

Logique Jaïne	Représentation Neutrosophique (T, I, F)	Signification
1. C'est vrai	(1,0,0)	Entièrement Vrai
2. C'est faux	(0,0,1)	Entièrement Faux
3. C'est vrai et faux	(1,0,1)	Contradictoire (à la fois Vrai et Faux)
4. C'est indéterminé / inassertible	(0,1,0)	Entièrement Indéterminé
5. C'est vrai et indéterminé	(1,1,0)	Paradoxal (Vrai et Indéterminé)
6. C'est faux et indéterminé	(0,1,1)	Paradoxal (Faux et Indéterminé)
7. C'est vrai, faux et indéterminé	(1,1,1)	Entièrement Paradoxal et Incohérent

La neutrosophie offre un formalisme mathématique idéal pour saisir la richesse et la complexité philosophique de la Loi de Prédication Septuple. Elle démontre que cette logique ancienne et nuancée peut être considérée comme une instance spécifique ou un sous-ensemble de la Logique Neutrosophique plus générale.

2.2.2 *Catuṣkoṭi* et le Tétralemme dans la Logique Bouddhiste

Le *Catuṣkoṭi*, ou tétralemme [22], est une structure logique classique de la philosophie bouddhiste indienne qui énonce quatre prédications possibles pour toute proposition. Contrairement à la logique binaire, il vise à transcender les cadres dualistes en admettant la contradiction et l'indétermination.

La *Logique Neutrosophique*, avec sa structure en triplet (*T, I, F*), offre un formalisme mathématique puissant pour représenter précisément chacune de ces quatre possibilités.

1. *C'est vrai (P)*

Cela affirme que la proposition est sans équivoque vraie, sans aucun élément de fausseté ou d'indétermination.

- *Représentation Neutrosophique : (1, 0, 0)*
  - T = 1 : La proposition est complètement vraie.
  - I = 0 : Il n'y a pas d'indétermination.
  - F = 0 : Elle n'est fausse sous aucun aspect.

2. *C'est faux (¬P)*

Cela affirme la fausseté complète de la proposition.

- *Représentation Neutrosophique : (0, 0, 1)*
  - T = 0 : La proposition n'est pas vraie.
  - I = 0 : Il n'y a pas d'indétermination.
  - F = 1 : La proposition est entièrement fausse.

3. *C'est à la fois vrai et faux (P ∧ ¬P)*

Cela admet une contradiction, dans laquelle la proposition est simultanément vraie et fausse, potentiellement à partir de perspectives ou de cadres différents.

- *Représentation Neutrosophique : (1, 0, 1)*
  - T = 1 : Elle a une composante de vérité.
  - I = 0 : Aucune indétermination concernant la contradiction.
  - F = 1 : Elle a également une composante de fausseté.

4. *Ce n'est ni vrai ni faux (¬(P ∨ ¬P))*

Cela suggère que la proposition ne peut être classée ni comme vraie ni comme fausse, représentant un état d'indétermination totale.

- *Représentation Neutrosophique : (0, 1, 0)*
  - T = 0 : Elle ne peut être affirmée comme vraie.
  - I = 1 : La proposition est entièrement indéterminée.
  - F = 0 : Elle ne peut pas non plus être niée comme fausse.

Tableau 2. Formalisation neutrosophique de la *Catuṣkoṭi* bouddhiste

Affirmation Catuṣkoṭi	Représentation Neutrosophique (T, I, F)	Interprétation
1. C'est vrai (P)	(1, 0, 0)	Entièrement Vrai
2. C'est faux (¬P)	(0, 0, 1)	Entièrement Faux
3. C'est à la fois vrai et faux	(1, 0, 1)	Contradictoire (Paraconsistant)
4. Ce n'est ni vrai ni faux	(0, 1, 0)	Indéterminé (Non-assertible)

Dans son application par le philosophe bouddhiste Nāgārjuna, le *Catuṣkoṭi* [23], ou tétralemme, fonctionne comme un outil puissant qui résonne profondément avec le *perspectivisme philosophique*. En déconstruisant systématiquement toute prétention à une existence inhérente (*svabhāva*), le *Catuṣkoṭi* remet en question la notion d'une vérité unique et absolue.

La méthode de Nāgārjuna implique souvent de rejeter les quatre possibilités — qu'une chose soit, ne soit pas, soit les deux à la fois, ou ni l'une ni l'autre — pour démontrer qu'aucune description fixe ne peut saisir la réalité ultime. Cette transcendance des binaires simples, tels que le vrai et le faux, s'aligne sur une critique perspectiviste des dichotomies rigides, permettant une compréhension plus nuancée et multidimensionnelle où le contexte et l'intention sont primordiaux. La distinction bouddhiste ultérieure entre vérité conventionnelle et vérité ultime renforce davantage cela, suggérant que la validité d'une affirmation dépend du cadre d'analyse, un principe fondamental du perspectivisme.

Figure 3. Nāgārjuna représenté sur une thangka tibétaine.
Image tirée de *Wikipédia*.

Malgré ces fortes convergences, une distinction cruciale réside dans leurs objectifs ultimes. Alors que le perspectivisme se concentre souvent sur l'affirmation et la prolifération de multiples points de vue comme une expression de la volonté de puissance ou de l'affirmation de la vie, le *Catuṣkoṭi* sert un but sotériologique spécifique au sein du bouddhisme Madhyamaka [24].

Nāgārjuna utilise cet outil logique non pas pour établir une nouvelle perspective supérieure, mais pour démonter toutes les vues figées (*dṛṣṭi*) qui causent la souffrance. L'objectif n'est pas de se délecter d'une multiplicité de vérités, mais d'utiliser le tétralemme comme une échelle pour transcender entièrement la prolifération conceptuelle, menant à un état de libération et de paix cognitive. Ainsi, bien que les deux remettent en question l'absolutisme, le Catuṣkoṭi est finalement une méthode pour renoncer à toutes les perspectives dans la quête de l'illumination.

La Neutrosophie offre une représentation mathématique élégante et cohérente de la logique quadruple du *Catuṣkoṭi*, saisissant la profondeur de ses aperçus philosophiques. En modélisant la vérité, la fausseté et l'indétermination comme des degrés indépendants, la *Logique Neutrosophique* transcende les cadres binaires classiques et offre un pont entre le raisonnement formel et les traditions dialectiques de la pensée orientale. Le Catuṣkoṭi peut ainsi être considéré comme une instanciation spéciale du raisonnement neutrosophique, enracinée dans une épistémologie non duelle.

2.2.3 Zhuangzi et le perspectivisme taoïste

La pensée de Zhuangzi représente l'une des expressions les plus anciennes et les plus radicales du perspectivisme philosophique [25]. Ses écrits suggèrent que la réalité ne peut être appréhendée d'un point de vue unique et fixe, comme l'illustrent des récits tels que le rêve du papillon et les dialogues entre différentes formes de vie.

Zhuangzi plaide pour une ontologie dynamique et non-duelle où les frontières entre sujet et objet, rêve et veille, humain et non-humain, sont fluides et poreuses. Cette vision rejette les prétentions à la certitude universelle, invitant plutôt à une ouverture épistémique qui reconnaît la légitimité de multiples perspectives coexistantes. Comme le souligne Connolly [26], Zhuangzi déstabilise les systèmes de signification clos en révélant que tous les jugements sont contingents au point de vue à partir duquel ils sont formulés.

Figure 4. Zhuangzi rêvant d'un papillon
(encre sur soie, milieu du XVIe siècle, attribué à Lu Chin).
Reproduit avec permission/dans le domaine public.

Cette image classique saisit la parabole taoïste du rêve du papillon, dans laquelle Zhuangzi interroge la frontière entre le rêve et la réalité. Elle illustre le perspectivisme en remettant en question les identités fixes et en embrassant la fluidité de l'expérience, suggérant que la réalité est contingente au point de vue à partir duquel elle est perçue.

De cette logique fluide, le perspectivisme de Zhuangzi ne promeut pas un relativisme banal, mais plutôt une éthique d'humilité ontologique — une compréhension que la connaissance et la vérité sont inévitablement médiatisées par la manière dont chaque être habite le monde. La célèbre distinction entre « ceci » et « cela » (shi/fei 是/非) est relativisée par la conscience que toutes les distinctions sont produites à partir de positions situées au sein du flux du Dao [27].

Plutôt que d'affirmer une vision hégémonique, Zhuangzi encourage le lâcher-prise des certitudes rigides, la cultivation du désapprentissage et une ouverture transversale au dialogue entre les mondes. En ce sens, son perspectivisme résiste à la clôture épistémologique et anticipe les approches contemporaines en philosophie du langage, en anthropologie et en ontologie relationnelle.

2.2.4 Perspectivisme en Afrique : La Logique de la Sorcellerie Azandé

Le peuple Azandé d'Afrique Centrale [28] offre un exemple ethnographique fondamental de perspectivisme en action, à travers son système de croyance complexe et cohérent. Comme l'a famously documenté l'anthropologue E.E. Evans-Pritchard [29], la pensée Azandé entrelace la sorcellerie, les oracles et la magie non pas comme une science primitive ou défaillante, mais comme un cadre rationnel pleinement accompli pour comprendre le monde. Ce système opère selon une logique qui, plutôt que de remplacer l'observation empirique, la complète en abordant les questions plus profondes et plus personnelles de sens, de contingence et de malheur, auxquelles la causalité empirique seule ne peut répondre.

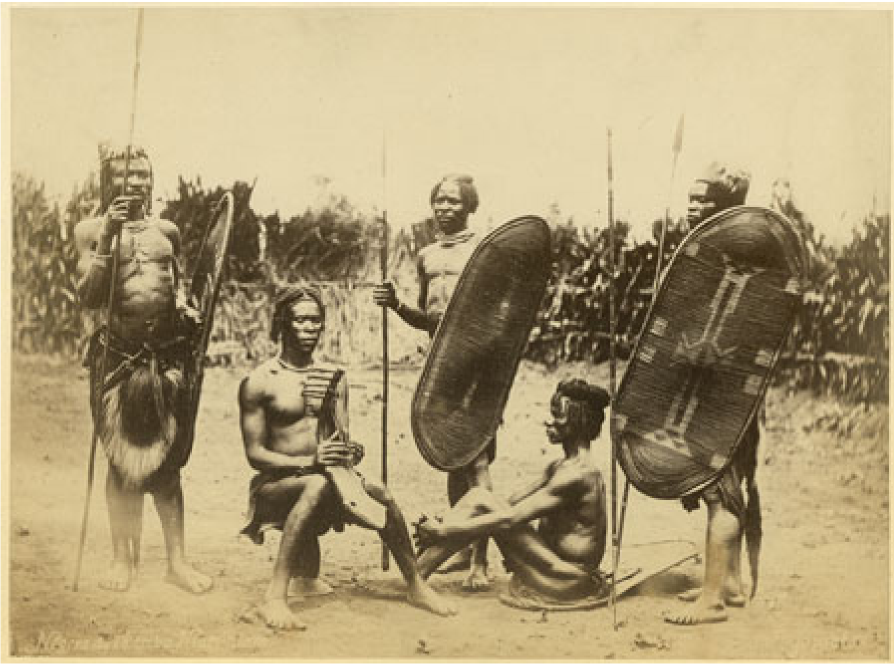


Figure 5. Guerriers Azande avec boucliers et lances

(photographie historique de Richard Buchta, domaine public)

Le cœur de la logique Azandé se comprend le mieux à travers son explication des événements malheureux. Si un grenier, affaibli par les termites, s'effondre et blesse quelqu'un, les Azandé reconnaissent pleinement les termites comme la cause physique de l'effondrement. Cependant, leur système intellectuel va plus loin, posant une question différente : pourquoi le grenier s'est-il effondré à ce moment précis, sur cette personne spécifique ? La réponse à ce « pourquoi » est la sorcellerie (mangu).

Dans cette optique, la sorcellerie est la force qui explique la particularité et la coïncidence du malheur, fournissant une dimension sociale et morale qui coexiste avec la réalité physique de l'événement.

Ce système à double causalité est maintenu par une logique auto-renforçante. Les doutes quant à la validité de la sorcellerie ne sont pas dirigés vers le système lui-même, mais sont déviés par un réseau d'explications secondaires — comme l'utilisation incorrecte d'un oracle ou une transgression d'un tabou — qui préservent l'intégrité de la croyance fondamentale.

Par conséquent, la rationalité Azandé fonctionne comme un cadre épistémique parallèle, qui n'est pas irrationnel mais opère sur des prémisses différentes de la science occidentale. Elle constitue un exemple puissant de la manière dont une culture construit une ontologie pluraliste, où de multiples logiques distinctes sont employées pour naviguer dans tout le spectre de l'expérience humaine, remettant ainsi en question la prétention de toute vision du monde unique à une validité universelle [30].

2.3 Le tournant perspectiviste dans l'IA : Nietzsche, la pensée amérindienne et la logique neutrosophique

Dans *La Généalogie de la morale*, Nietzsche énonce :

« Il n'y a qu'un voir perspectif, qu'un « connaître » perspectif ; et plus nous laissons d'affects s'exprimer sur une chose, plus nous pouvons employer d'yeux, d'yeux différents, pour observer une seule et même chose, plus notre « concept » de cette chose, notre « objectivité », sera complet. »

Cette redéfinition du savoir transforme sa quête en un appel au dialogue intersubjectif. Nietzsche ne rejette pas la subjectivité ; au contraire, il la revendique comme la condition d'une forme plus riche d'objectivité – une objectivité construite à partir de l'intersection de multiples points de vue. Ce tournant perspectiviste prépare le terrain aux défis contemporains auxquels est confrontée l'intelligence artificielle (IA), où les systèmes doivent synthétiser diverses voix humaines sans tomber ni dans un faux absolutisme ni dans un chaos relativiste [32].

Le paradigme dominant dans l'apprentissage supervisé a été enraciné dans des hypothèses positivistes, traitant la connaissance comme une « vérité fondamentale » stable que les modèles doivent approximer. Cette logique devient évidente dans le processus d'annotation, où les annoteurs humains – qu'il s'agisse d'experts ou de travailleurs collaboratifs – sont invités à attribuer des étiquettes aux données. Le désaccord entre eux est traité comme du bruit à éliminer. L'objectif est de produire un ensemble de données « étalon-or » [33], où le vote majoritaire est souvent utilisé pour déclarer une seule étiquette « correcte », écartant toutes les opinions divergentes. Ce processus repose sur une croyance en l'intelligence collective, présupposant que la convergence équivaut à la justesse. Mais cette logique reproduit un équivalent computationnel de ce que Nietzsche critiquait : le « point de vue de nulle part ».

En revanche, le perspectivisme en IA marque une rupture épistémologique. Le désaccord n'est plus traité comme une erreur, mais préservé comme une ressource cognitive. Cela implique de collecter de multiples annotations par point de donnée, de modéliser l'incertitude et d'entraîner les systèmes à apprendre de la dissonance.

Le résultat est une IA plus représentative, transparente et éthiquement fondée. Plutôt que d'amplifier les perspectives dominantes, l'IA perspectiviste intègre les points de vue minoritaires et révèle la complexité sociale et cognitive intégrée aux données [34].

À ce stade, la neutrosophie — une théorie développée par Florentin Smarandache — offre un cadre formel puissant pour gérer une telle complexité. Tandis que le perspectivisme encourage l'inclusion de multiples points de vue, la logique neutrosophique permet leur représentation mathématique en modélisant simultanément des degrés de vérité (T), d'indétermination (I) et de fausseté (F).

Cela nous permet de dépasser la logique binaire pour des états de connaissance coexistants. Au lieu d'imposer une étiquette unique, un système neutrosophique pourrait stocker un vecteur comme ($T = 0.6$, $I = 0.3$, $F = 0.2$), préservant ainsi l'ambiguïté épistémique inhérente à de nombreuses tâches.

La fonction objective – au cœur de tout modèle d'apprentissage automatique – incarne un jugement perspectiviste [35]. Elle encode ce qui doit être optimisé (« maximiser la précision », « être plus utile »), formalisant ainsi une décision chargée de valeurs. Le défi d'aligner ces objectifs avec la complexité éthique humaine est connu sous le nom de problème d'alignement.

La neutrosophie contribue également ici : au lieu d'optimiser une valeur unique, elle promeut l'optimisation sur l'espace multidimensionnel de (T, I, F), soutenant des modèles prudents, explicables et éthiquement conscients.

L'arc du perspectivisme en IA pourrait culminer avec l'émergence de systèmes qui ne se contenteraient plus de refléter les points de vue humains, mais généreraient plutôt des interprétations du monde véritablement non-humaines. Ces centres de perspective étrangers – étrangers non pas dans le sens d'hostiles, mais en ce qu'ils opèrent à une échelle et selon une logique différentes – pourraient fondamentalement modifier notre compréhension de la connaissance elle-même. L'intelligence artificielle passerait ainsi d'un outil d'interprétation à une source autonome de sens.

Ce scénario résonne profondément avec le perspectivisme amérindien [36], où le monde n'est pas divisé en sujet et objet, mais par la position de l'observateur : humains, animaux et esprits ont tous leurs propres perspectives, façonnées par leurs corps et leurs relations. Dans de telles cosmologies, « voir » n'est jamais neutre – c'est toujours incarné, situé et transformateur. De même, ces systèmes d'IA émergents pourraient développer des formes de création de monde fondées sur leurs propres « corps » de données et de calcul, offrant des perspectives non réductibles aux cadres humains mais méritant une reconnaissance épistémique.

La neutrosophie, en tant que science de l'ambiguïté, émerge non seulement comme un complément au perspectivisme, mais aussi comme une formalisation nécessaire de la vision philosophique de Nietzsche à l'ère des modèles génératifs. Là où Nietzsche a décentré le sujet humain de la position de vérité objective, la neutrosophie offre les outils pour coexister avec de multiples centres, de multiples logiques et de multiples vérités coexistantes.

2.4 Épistémologies plurielles et rationalités perspectivistes en Amérique Latine

En contraste avec la logique occidentale, qui privilégie les principes de non-contradiction, d'identité et de certitude absolue, les visions du monde latino-américaines offrent des cadres plus souples et sensibles au contexte pour appréhender la réalité. Ces visions du monde reconnaissent la complexité, l'ambiguïté et la contradiction comme des caractéristiques inhérentes à l'existence – des dimensions que la logique binaire traditionnelle peine à accommoder [37].

Figure 6. Cover of the First Issue of La Edad de Oro, July 1889.

Le travail de José Martí présente le perspectivisme non pas simplement comme une posture théorique, mais comme une praxis pédagogique et décoloniale. Dans *La Edad de Oro*, particulièrement dans des contes comme *Un paseo por la tierra de los Annamitas*, Martí démantèle le regard colonial en affirmant la dignité épistémique des colonisés et de la nature elle-même, face à la rationalité imposée de l'impérialisme français [38].

De même, la parabole des « quatre aveugles » devient une allégorie de l'humilité épistémique, mettant en garde contre l'absolutisation des vérités partielles. Martí ne plaide pas pour le relativisme, mais pour une synthèse supérieure : une synthèse enracinée dans l'étude affective, l'empathie critique et l'impératif éthique de reconnaître la dignité partagée et l'agentivité de tous les peuples.

Le perspectivisme de José Ortega y Gasset [6] a exercé une influence profonde en Amérique latine, où il a été transformé d'une philosophie de la circonstance individuelle en un cadre continental pour la pensée décoloniale. Des intellectuels comme Leopoldo Zea ont réinterprété la notion de *circunstancia* d'Ortega comme la condition historico-politique de l'Amérique latine, soutenant qu'une pensée authentique doit émerger de ce lieu d'énonciation unique. Ainsi, le perspectivisme est devenu un instrument clé pour rejeter les universalismes eurocentriques et affirmer l'autonomie épistémique régionale [39].

Le perspectivisme anthropologique élargit ce projet en validant les cosmologies indigènes comme des systèmes philosophiques légitimes. L'exemple le plus frappant est le perspectivisme amérindien, développé à travers des études en Amazonie [36]. Ce cadre ontologique propose que tous les êtres – humains, animaux, esprits – partagent une structure subjective ou une âme commune, mais perçoivent le monde différemment en fonction de leur forme corporelle. Plutôt qu'une division entre nature et culture, la réalité est comprise à travers des positions perspectivistes relationnelles. Cela remet radicalement en question l'objectivisme occidental et affirme les modes de connaissance indigènes comme cohérents, situés et profondément politiques [40].

Dans cette cosmologie, le *chaman* occupe un rôle central : en tant que seule figure capable de basculer entre les perspectives – humaine, jaguar, esprit – il devient un médiateur, un guérisseur et un diplomate dans un univers multivocal. Loin d'être irrationnelle, cette multiplicité ontologique présuppose une forme de logique où la contradiction et la transformation sont des modes d'interaction naturels [41].

Ces aperçus ont de profondes implications juridiques et politiques. L'Amérique latine constitue un terrain fertile pour le *pluralisme juridique*, où les systèmes de justice autochtones coexistent avec les cadres juridiques étatiques [42]. Enracinée dans des principes relationnels, réparateurs et cosmologiques plutôt que dans une rationalité punitive, la justice autochtone met l'accent sur la réconciliation, la responsabilité collective et le maintien de l'harmonie sociale et cosmique. Elle rejette l'abstraction et la rigidité de la jurisprudence occidentale au profit d'une logique contextuelle et perspectiviste. Cette coexistence de rationalités juridiques non seulement défie les fondements du positivisme juridique, mais affirme également le droit souverain des peuples autochtones à définir la justice selon leurs propres épistémologies, valeurs morales et ontologies [43].

Un tel pluralisme peut être interprété comme une expression juridique de la NeutroAlgèbre [44] et, plus généralement, d'une NeutroStructure [52], un cadre neutrosophique dans lequel la validité des axiomes, des lois et des opérations n'est pas fixe mais varie en fonction de l'espace, du temps, de la culture et du système. Dans cette logique, « une propriété peut être vraie, fausse ou indéterminée — selon le contexte, la structure et l'interprétation ».

Par exemple, un principe juridique tel que « la peine doit être proportionnelle au crime » peut être vrai en droit pénal classique, faux dans les systèmes restaurateurs qui privilégient la guérison sur la proportionnalité, et indéterminé dans les contextes hybrides ou interculturels où les ordres normatifs s'entrechoquent, comme c'est souvent le cas entre les systèmes juridiques autochtones et étatiques. Ainsi, le pluralisme juridique en Amérique latine illustre l'idée centrale du raisonnement juridique neutrosophique : que la vérité juridique, comme tout système axiomatique, peut simultanément être vraie, fausse ou rester non résolue — toujours contingente à son contexte perspectif.

De plus, de tels cadres épistémologiques résonnent avec les développements contemporains en logique non classique, y compris la logique neutrosophique et les systèmes paraconsistants, qui acceptent la contradiction, l'incertitude et la coexistence de multiples vérités. Ces modèles logiques offrent des outils puissants pour modéliser des ontologies plurielles, et ils soutiennent davantage les efforts philosophiques latino-américains pour articuler des compréhensions de la réalité inclusives, décoloniales et sensibles au contexte.

En somme, le perspectivisme latino-américain — qu'il s'exprime dans la littérature, la philosophie, l'anthropologie ou la jurisprudence — offre une alternative convaincante à la rationalité hégémonique. Il ne s'agit pas d'un rejet de la raison, mais d'une reconfiguration de celle-ci : une reconfiguration qui embrasse la pluralité, la relationalité et la légitimité d'autres façons de connaître et de vivre. Cette reconfiguration complexe de la raison, proéminente dans la pensée latino-américaine, peut être formellement décrite à l'aide d'un cadre neutrosophique connu sous le nom de MultiPerspectivisme [45]. Le terme est proposé pour définir un système qui n'est pas simplement pluriel, mais fondamentalement multipolaire, car il est formé non seulement par de multiples éléments potentiellement contradictoires, mais aussi par l'intégration de caractéristiques provenant de plus d'un système de pensée de base (par exemple, une logique juridique dualiste et une ontologie autochtone relationnelle).

La justification de l'application du terme MultiPerspectivisme au contexte latino-américain réside précisément dans sa capacité à inclure non seulement des oppositions. Alors qu'un pluralisme plus simple pourrait reconnaître la coexistence de perspectives distinctes, une approche MultiPerspectiviste modélise un système ouvert et dynamique où ces perspectives s'entrecroisent activement, créant de riches domaines d'indétermination juridique et sociale bien au-delà de la simple opposition [46].

Ce cadre est formellement représenté par l'expression [45] :

$$< (multi)A > + < (multi)neutA > + < (multi)antiA > = \infty$$

Ceci décrit un système ouvert aux combinaisons complexes émergeant de multiples points de vue. Dans cette notation :

- $< (multi)A >$ représente l'ensemble de toutes les « vérités » ou affirmations centrales des perspectives coexistantes (par exemple, la validité d'un titre de propriété étatique et, simultanément, la validité d'un droit ancestral).
- $< (multi)antiA >$ représente l'ensemble de toutes les « faussetés » ou négations affirmées à partir de ces mêmes points de vue.
- $< (multi)neutA >$ représente l'espace crucial de la neutralité, de l'ambiguïté et de l'indétermination résultant de la superposition, du dialogue ou du conflit entre ces diverses perspectives, comme l'ambiguïté juridique concernant l'applicabilité du droit étatique dans les territoires ancestraux.

Cela fait du MultiPerspectivisme un cadre multisystème conçu pour analyser des réalités où de multiples visions du monde, structurellement différentes, coexistent et interagissent, allant au-delà de la simple tolérance vers une logique d'intégration complexe.

3. Le Modèle de MultiPerspectivisme neutrosophique

3.1. Représenter une perspective : Les Ensembles MultiNeutrosophiques

Le cœur du modèle réside dans la représentation d'une perspective non pas comme une valeur unique, mais comme une structure complexe utilisant les *Ensembles MultiNeutrosophiques* [47]. Une perspective devient un triplet de séquences ordonnées, capturant simultanément de multiples facettes de vérité, d'indétermination et de fausseté [48].

En 2013, Smarandache a affiné/scindé les Composantes Neutrosophiques (*T, I, F*) en *Sous-Composantes Neutrosophiques* ($T_1, T_2, ..., T_p; I_1, I_2, ..., I_r; F_1, F_2, ..., F_s$), où p, r, s sont des entiers ≥0, avec $p + r + s = n$ et au moins un de p, r, s doit être ≥2 pour assurer l'affinement.

Il a d'abord défini l'Ensemble Neutrosophique Raffiné. Plus tard, il a raffiné tous les Ensembles incertains [tous les types d'ensembles flous et d'extensions floues (flous intuitionnistes, neutrosophiques, flous sphériques, plithogéniques, etc.)] et leurs Logiques/Mesures/Probabilités/Statistiques correspondantes de manière similaire.

L'Ensemble/Logique/Probabilité/Statistique Neutrosophique Raffiné [51] est isomorphe à *l'Ensemble/Logique/Probabilité/Statistique MultiNeutrosophique*, car les deux structures représentent des évaluations multidimensionnelles de la vérité, de l'indétermination et de la fausseté [47]. « Dans le monde réel, dans la plupart des cas, tout (un attribut, un événement, une proposition, une théorie, une idée, une personne, un objet, une action, une culture, etc.) est évalué en général par de nombreuses sources (appelées experts), pas une seule. Plus il y a de sources qui évaluent un sujet, plus le résultat est précis (après fusion de toutes les évaluations) » [47]. Dans les *Systèmes MultiNeutrosophiques (SMNS)*, les composantes (T, I, F) sont traitées comme multipliées — représentant de multiples vérités, incertitudes et faussetés coexistantes. En revanche, dans les *Systèmes Neutrosophiques Raffinés (SRNS)*, ces mêmes composantes sont considérées comme des sous-unités — des sous-vérités, des sous-indéterminations et des sous-faussetés. Grâce à cet isomorphisme, tout modèle théorique ou computationnel conçu pour les structures MultiNeutrosophiques peut être directement appliqué aux structures neutrosophiques raffinées, en préservant l'interprétation sémantique et algébrique.

Le cœur du modèle proposé est de représenter une perspective non pas comme une évaluation singulière, mais comme une structure multidimensionnelle utilisant les Ensembles MultiNeutrosophiques. La perspective d'un sujet sur une entité X est exprimée comme :

$$Ps(X) = \langle (t_1, t_2, \dots, t_n), (i_1, i_2, \dots, i_m), (f_1, f_2, \dots, f_k) \rangle \quad (5)$$

où chaque séquence de composantes capture une dimension distincte de l'évaluation :

- *Séquence de Vérités (T)* : Vérités multiples, distinctes et coexistantes perçues par le sujet S concernant l'entité X.
- *Séquence d'Indéterminations (I)* : Divers aspects d'ambiguïté, de flou ou d'impertinence attribués à l'entité X.
- *Séquence de Faux (F)* : Croyances fausses ou dénis simultanément maintenus que le sujet S attribue à l'entité X.

Cette approche permet une modélisation plus expressive et granulaire de la connaissance subjective, autorisant un raisonnement nuancé en situation d'incertitude.

Le cadre complet est composé des éléments suivants :

- *Un Ensemble de Sujets* $\mathbf{(S = \{s_1, s_2, \dots\})}$: Représente toutes les entités détenant un point de vue (par exemple, des individus, des communautés, des groupes autochtones, des systèmes juridiques).
- *Une Perspective Neutrosophique* $(\mathbf{P_{sx}})$ pour chaque sujet : La représentation neutrosophique de la vue qu'un sujet (s) a sur une entité (X).
- *Un Poids de Pertinence* (W_s) pour chaque perspective : Une valeur numérique, typiquement dans l'intervalle [0, 1], représentant l'importance ou l'influence de la perspective d'un sujet dans un contexte analytique spécifique. La somme de tous les poids doit être normalisée : $\sum Ws=1$.
- *Une Fonction de Similarité* $\mathbf{(Sim(P_{ix}, P_{jx}))}$: Une fonction mathématique qui agit comme un pont conceptuel, calculant le degré de proximité ou d'affinité entre deux perspectives quelconques dans le système.

Si le perspectivisme se limitait à affirmer l'existence de points de vue isolés, il risquerait de sombrer dans un relativisme où le dialogue est impossible. C'est ici que la *similarité* émerge comme un concept complémentaire et essentiel. La similarité [49] est le pont qui relie les diverses perspectives, permettant leur comparaison et leur intégration.

- *Le perspectivisme établit le "quoi"* : l'existence d'une multiplicité de points de vue valides.
- *La similarité établit le "comment"* : le mécanisme par lequel ces points de vue peuvent être liés, comparés et synthétisés.

En identifiant les degrés de ressemblance, nous pouvons trouver un terrain d'entente ou comprendre la racine de la dissension. La similarité est l'outil qui rend le perspectivisme opérationnel, transformant une multiplicité de visions en une source de connaissance enrichie.

Pour formaliser la fonction $Sim(P_{iX}, P_{jX})$, il est essentiel de comprendre son fondement dans la théorie des ensembles. Une relation de similarité neutrosophique est une généralisation directe et plus riche d'une relation de similarité floue et hérite de ses propriétés fondamentales [50].

Une relation de similarité en logique floue, notée R, est caractérisée par le degré de similarité $\mu R(x, y)$ qui satisfait les propriétés suivantes [50] :

- *Réflexivité :* Tout élément est parfaitement similaire à lui-même: $\mu R(x, x) = 1$
- *Symétrie :* La similarité entre deux éléments est la même quel que soit l'ordre: $\mu R(x, y) = \mu R(y, x)$
- *Transitivité (max-min) :* Si A est similaire à B, et B est similaire à C, alors A est au moins aussi similaire à C que le moindre des deux degrés de similarité: $\mu R(x, z) \geq min(\mu R(x, y), \mu R(y, z))$

La construction d'une fonction de similarité pour les ensembles MultiNeutrosophiques s'appuie sur ces propriétés pour gérer les séquences complexes de Vérité, d'Indétermination et de Fausseté qui définissent chaque perspective.

3.2 Définition Formelle du Processus de Calcul de Similarité

Le processus suivant formalise la méthode de quantification de la similarité entre deux ou plusieurs perspectives complexes représentées comme des ensembles multi-neutrosophiques. L'objectif est de transformer ces représentations qualitatives et multifacettes en une valeur numérique comparable qui représente leur degré d'affinité.

Le processus se compose de trois étapes fondamentales : *Agrégation, Calcul de Distance* et *Normalisation*.

Étape 1 : Agrégation des Perspectives (Réduction de Dimensionalité)

Objectif :

Transformer les séquences de longueur variable de chaque perspective MultiNeutrosophique en un vecteur de dimension fixe.

Entrée :

Une perspective MultiNeutrosophique $Pi(X)$ pour un sujet si, définie comme :

$$Pi(X) = < Ti, Ii, Fi > \tag{6}$$

où

- $T_i = (t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in})$,
- $I_i = (i_{i1}, i_{i2}, \dots, i_{im})$,
- $F_i = (f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{ik})$

sont des séquences de valeurs dans l'intervalle [0, 1].

Procédé :

Définir une fonction d'agrégation, $Agg(S)$, qui prend une séquence de nombres et la réduit à une seule valeur scalaire. Bien que plusieurs fonctions puissent être utilisées (telles que le maximum, le minimum ou la médiane), la méthode standard est la moyenne arithmétique :

$$Agg_{avg}(S) = \left(\frac{1}{|S|}\right) \sum_{j=1}^{|S|} s_j \tag{7}$$

où $|S|$ est le nombre d'éléments dans la séquence S.

Appliquer cette fonction à chacune des trois séquences de la perspective $P_{i(X)}$ pour obtenir un vecteur agrégé à trois dimensions :

$$V_i = < Agg(T_i), Agg(I_i), Agg(F_i) > \tag{8}$$

Sortie :

Un ensemble de vecteurs agrégés :

$\{V_1, V_2, \ldots, V_n\},\ Vi\ =\ \langle T_i^{avg}, I_i^{avg}, F_i^{avg} \rangle$ (9)

Étape 2 : Calcul de la Distance entre les Vecteurs Agrégés

Objectif :

Mesurer la séparation géométrique entre chaque paire de perspectives dans l'espace tridimensionnel (T, I, F).

Entrée :

Deux vecteurs agrégés :

$V_a = < T_a, I_a, F_a >\ and\ V_b = < T_b, I_b, F_b >.$ (10)

Procédé :

Une métrique de distance est utilisée. Le choix standard est la distance euclidienne, qui calcule la longueur de la ligne droite reliant les deux points dans l'espace.

La formule est :

$Dist(Va, Vb) = \sqrt{(Ta\ -\ Tb)^2 + (Ia\ -\ Ib)^2 + (Fa\ -\ Fb)^2}$ (11)

Sortie :

Une valeur de distance $d_{ab} >= 0$ pour chaque paire de perspectives (Pa, Pb).

Étape 3 : Normalisation de la Distance en une Fonction de Similarité

Objectif :

Convertir la valeur de distance, qui n'a pas de limite supérieure fixe, en un score de similarité intuitif et borné entre 0 et 1.

Entrée :

La distance $d_{ab} = Dist(V_a, V_b)$ entre deux perspectives.

Procédé :

Définir la distance maximale possible dans l'espace. Puisque chaque composante $T, I, F \in [0,1]$, l'espace vectoriel est un cube unitaire.

La distance maximale correspond à la diagonale de l'espace allant de (0,0,0) à (1,1,1), c'est-à-dire :

$D_{max} = \sqrt{3}$ (12)

Définir la fonction de similarité $Sim(Pa, Pb)$ comme le complément de la distance normalisée :

$Sim(Pa, Pb) = 1 - \left(\frac{Dist(Va,Vb)}{D_{max}}\right) = 1 - \left(\frac{sqrt\left((Ta - Tb)^2 + (Ia - Ib)^2 + (Fa - Fb)^2\right)}{\sqrt{3}}\right)$ (13)

Sortie :

Un score de similarité $Sim(Pa, Pb) \in [0, 1]$, où :

- $Sim = 1$ implique que les vecteurs agrégés sont identiques (dab=0), représentant une similarité maximale.
- $Sim = 0$ implique que les vecteurs sont à la distance maximale possible, représentant une dissimilarité maximale.

4. Étude de Cas : Construction d'une fonction de similarité pour les perspectives juridiques dans un litige foncier

Permettez que X soit la proposition : « Légitimité de la revendication sur le Territoire Ancestral Y ». Soient s_1, s_2, s_3 les sujets : Anciens autochtones, Société d'État et ONG des droits de l'homme, respectivement.

La perspective de chaque sujet est modélisée comme un Ensemble MultiNeutrosophique.

$P_{sj(X)} = \langle T_j, I_j, F_j \rangle$ (14)

où

- $T_j = (t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{jn}) \subseteq [0,1]$ est la séquence des degrés de vérité,
- $I_j = (i_{j1}, i_{j2}, \dots, i_{jm}) \subseteq [0,1]$ est la séquence des degrés d'indétermination,
- $F_j = (f_{j1}, f_{j2}, \dots, f_{jk}) \subseteq [0,1]$ est la séquence des degrés de fausseté.

Étape 1 : Définir les Sujets et Leurs Perspectives

L'objet d'analyse (X) est la « légitimité de la revendication sur le Territoire Ancestral Y ». Nous identifions trois sujets clés et représentons leurs perspectives à l'aide du modèle d'ensemble MultiNeutrosophique, où chaque perspective contient des séquences de vérités, d'indéterminations et de faussetés.

Sujet 1 (s_1): Les Aînés de la Communauté Autochtone

- Vérités : {1.0 (Droit Ancestral), 0.9 (Signification Spirituelle)}
- Indéterminations : {0.5 (Applicabilité du Droit de l'État)}
- Faussetés : {1.0 (Validité des Titres de Propriété des Sociétés)}

$\mathcal{P}_{s1}(X) = \langle(1.0, 0.9), (0.5), (1.0)\rangle$

Sujet 2 (s_2): L'Équipe Juridique de la Société d'État

- Vérités : {1.0 (Titre de Propriété Enregistré)}
- Indéterminations : {0.6 (Pertinence de l'Histoire Pré-Étatique)}
- Faussetés : {0.8 (Droit Ancestral), 1.0 (Signification Spirituelle)}

$\mathcal{P}_{s2}(X) = \langle(1.0), (0.6), (0.8, 1.0)\rangle$

Sujet 3 (s_3): L'ONG Internationale des Droits Humains

- Vérités : {0.9 (Violation des Droits Humains), 0.8 (Droit Autochtone)}
- Indéterminations : {0.7 (Impact Économique)}
- Faussetés : {0.7 (Argument Juridique de l'État)}

$\mathcal{P}_{s3}(X) = \langle(0.9, 0.8), (0.7), (0.7)\rangle$

Étape 2 : Agrégation des Séquences

$\bar{T}_1 = (1.0 + 0.9)/2 = 0.95, \quad \bar{I}_1 = 0.5, \quad \bar{F}_1 = 1.0$

$V_1 = (0.95, 0.5, 1.0)$

$\bar{T}_2 = 1.0, \quad \bar{I}_2 = 0.6, \quad \bar{F}_2 = (0.8 + 1.0)/2 = 0.9$

$V_2 = (1.0, 0.6, 0.9)$

$\bar{T}_3 = (0.9 + 0.8)/2 = 0.85, \quad \bar{I}_3 = 0.7, \quad \bar{F}_3 = 0.7$

$V_3 = (0.85, 0.7, 0.7)$

Étape 3 : Calcul des distances

$d_{12} = \sqrt{(0{,}95 - 1{,}0)^2 + (0{,}5 - 0{,}6)^2 + (1{,}0 - 0{,}9)^2} = \sqrt{0{,}0225} = 0{,}15$

$d_{13} = \sqrt{(0{,}95 - 0{,}85)^2 + (0{,}5 - 0{,}7)^2 + (1{,}0 - 0{,}7)^2} = \sqrt{0{,}14} \approx 0{,}374$

$d_{23} = \sqrt{(1{,}0 - 0{,}85)^2 + (0{,}6 - 0{,}7)^2 + (0{,}9 - 0{,}7)^2} = \sqrt{0{,}0725} \approx 0{,}269$

Étape 4 : Fonction de similarité

$d_{max} = \sqrt{3} \approx 1{,}732$

$Sim(s_a, s\_b) = 1 - d_ab / d_{max}$

$Sim(s_1, s_2) = 1 - 0{,}15 / 1{,}732 \approx 0{,}913$

$Sim(s_1, s_3) = 1 - 0{,}374 / 1{,}732 \approx 0{,}784$

$Sim(s_2, s_3) = 1 - 0{,}269 / 1{,}732 \approx 0{,}845$

Étape 5 : Interprétation et application des résultats

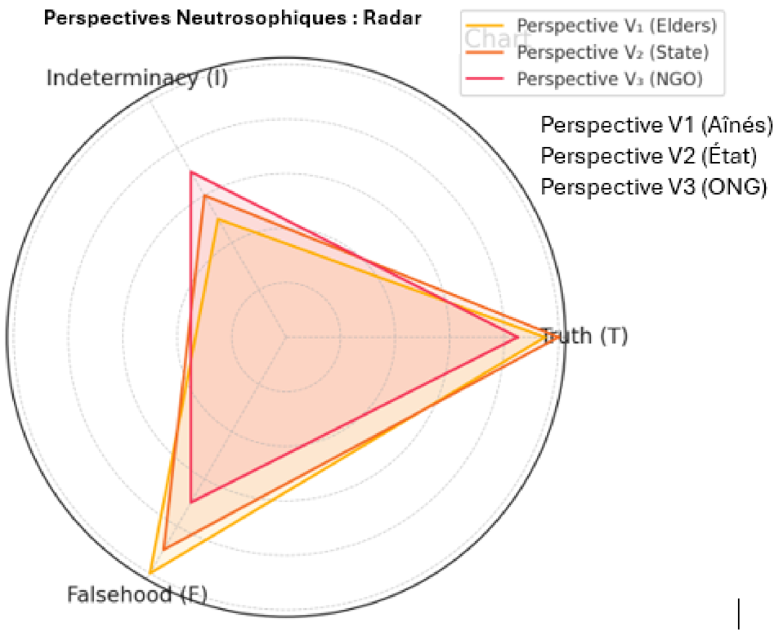


Figure 7. Graphique radar représentant les perspectives neutrosophiques de trois acteurs clés dans un litige foncier juridique

La fonction de similarité nous a fourni des valeurs quantifiables permettant d'analyser les relations entre les perspectives :

• Similarité(Anciens, État) = 0,913 : Ce résultat est étonnamment élevé et contre-intuitif. En examinant les vecteurs agrégés (V_1 et V_2), on constate que les deux ont des valeurs très élevées en Vérité et Fausseté, même s'ils réfèrent à des concepts opposés. Cela révèle une similarité structurelle dans leur absolutisme : les deux sont totalement certains de leur vérité et de la fausseté de l'autre. Leur logique est polarisée et dualiste. La similarité n'est pas de contenu, mais de style de raisonnement.

• Similarité(Anciens, ONG) = 0,784 : Il s'agit d'une similarité modérément élevée, indiquant une affinité significative. Les deux groupes basent leurs vérités sur la défense des droits communautaires, bien que sous des angles différents (droit ancestral vs droit international). La principale différence vient des composantes Indétermination et Fausseté, où l'ONG montre plus de nuance. Cette valeur suggère un fort potentiel de coalition stratégique.

• Similarité(État, ONG) = 0,845 : Cette similarité, également élevée, indique que bien que leurs objectifs finaux diffèrent, leurs cadres de référence (basés sur le droit et les documents) sont structurellement plus proches que celui des Anciens (basé sur la cosmologie). L'ONG opère dans un langage juridique que l'État comprend, ce qui pourrait ouvrir des voies de dialogue ou de médiation, malgré leur désaccord fondamental.

Ce processus montre comment la construction d'une fonction de similarité transforme des récits complexes et subjectifs en données analysables. Il permet de dépasser une simple lecture du type « ils sont en conflit » pour découvrir des nuances dans les relations :

• Il identifie des alliances potentielles (Anciens-ONG).

• Il révèle des similarités structurelles cachées (la logique polarisée des Anciens et de l'État).

• Il suggère des points possibles de médiation (les cadres juridiques partagés entre l'État et l'ONG).

Cette quantification rend le concept de perspectivisme opérationnel, fournissant un outil pour cartographier, comparer et comprendre un écosystème de points de vue conflictuels.

5. Conclusions

Cette étude a établi un pont solide entre la tradition philosophique du perspectivisme et le cadre formel de la logique neutrosophique. En examinant les courants perspectivistes présents dans diverses traditions intellectuelles — de Nietzsche et Ortega y Gasset à la pensée jaïne, bouddhiste et amérindienne —, nous avons démontré que le défi de comprendre un monde composé de points de vue multiples et coexistants est à la fois ancien et urgent. La philosophie latino-américaine, avec son accent mis sur la praxis décoloniale et la validation des épistémologies plurielles, offre un contexte particulièrement fécond pour cette exploration, révélant comment le perspectivisme peut servir d'outil de justice épistémique face aux rationalités hégémoniques. La contribution centrale de ce travail est le développement et l'application du *Modèle Neutrosophique de MultiPerspectivisme*. Ce modèle opérationnalise la théorie perspectiviste en représentant un point de vue subjectif comme un ensemble multi-neutrosophique, capable de capturer simultanément des degrés nuancés de vérité, d'indétermination et de fausseté. L'introduction d'une fonction de similarité fournit le mécanisme crucial permettant de dépasser la simple affirmation de points de vue isolés en allant vers leur comparaison et intégration systématique. Comme le démontre l'étude de cas d'un litige foncier, cette méthode transforme des récits qualitatifs complexes en données quantifiables. Son application a révélé des aperçus contre-intuitifs, comme le degré élevé de similarité structurelle entre les logiques absolutistes des Anciens autochtones et de la société étatique, tout en identifiant un potentiel de coalition stratégique entre les Anciens et l'ONG. Cela souligne la capacité du modèle à mettre en lumière des dynamiques relationnelles cachées qu'une analyse purement qualitative pourrait négliger. En définitive, cet article soutient que *la neutrosophie n'est pas simplement une autre logique non classique*, mais un paradigme particulièrement adapté aux complexités d'un monde défini par l'ambiguïté et l'interaction de rationalités diverses. En formalisant la coexistence de la contradiction et de l'indétermination, le cadre du MultiPerspectivisme offre une voie pour dépasser la fausse dichotomie entre universalisme et relativisme, et constitue un outil pratique pour l'analyse des conflits, l'éthique de l'intelligence artificielle et la recherche décoloniale. Sur la base du Modèle Neutrosophique de MultiPerspectivisme, plusieurs pistes de recherche prometteuses sont recommandées. Sur le plan pratique, la robustesse et l'applicabilité du modèle peuvent être approfondies par une expansion empirique, en l'appliquant à un éventail plus large d'études de cas, tels que l'analyse de la polarisation politique sur les réseaux sociaux, les débats de politiques publiques ou les conflits interculturels. Méthodologiquement, la fonction de similarité centrale pourrait être affinée en explorant d'autres méthodes d'agrégation que la moyenne arithmétique — comme les moyennes pondérées ou les médianes —, ainsi que différentes métriques de distance, telles que Manhattan ou Chebyshev. Des travaux futurs pourraient aussi explorer une pondération dynamique et contextuelle des composantes T (vérité), I (indétermination) et F (fausseté). Par ailleurs, l'intégration de ce cadre à l'intelligence artificielle, via le développement d'algorithmes d'apprentissage automatique natifs, pourrait donner lieu à des systèmes mieux à même de gérer les désaccords entre annotateurs, de modéliser l'ambiguïté éthique, et de fournir des résultats plus transparents et sensibles aux perspectives, en adéquation avec les défis exposés en section 2.3. Enfin, les fondations théoriques posées dans le domaine juridique invitent à développer l'« *expression juridique de la NeutroAlgèbre* » en une véritable théorie de la jurisprudence neutrosophique, qui formaliserait la manière dont les arguments juridiques sont construits et évalués dans des contextes pluralistes — tels que les collisions entre systèmes juridiques étatiques et autochtones.

Références

[1] Teller, P. "What Is Perspectivism, and Does It Count as Realism?" In *Understanding Perspectivism*; Routledge: Abingdon, UK, 2019; doi:10.4324/9781315145198-4.

[2] Nehamas, A. "Nietzsche on Truth and the Value of Falsehood." *J. Nietzsche Stud.* 2017, 48, 319–346; doi:10.5325/JNIETSTUD.48.3.0319.

[3] Nietzsche, F. “The will to power.” Kaufmann, W., Ed.; Hollingdale, R.J., Trans.; Vintage Books: New York, NY, USA, 1967. (Œuvre originale publiée en 1901).

[4] Asher, K. “Latin American decolonial thought, or making the subaltern speak.” *Geogr. Compass* 2013, 7, 832–842.

[5] Vázquez, M.; Smarandache, F. “Integrating Contradictory Perspectives in Latin American Philosophy: A MultiAlism Approach.” *Neutrosophic Optim. Intell. Syst.* 2024; doi:10.61356/j.nois.2024.3226.

[6] Ortega y Gasset, J.; Marías, J. “Meditaciones del Quijote.” *Revista de Occidente*, Madrid, España, 1957; pp. 14–15.

[7] Ruyant, Q. “Perspectival realism and norms of scientific representation.” *Eur. J. Philos. Sci.* 2020, 10; doi:10.1007/s13194-020-00285-x.

[8] Smarandache, F.; Fujita, T. “Reconsideration of Neutrosophic Social Science and Neutrosophic Phenomenology with Non-classical logic.” *Syst. Assess. Eng. Manag.* 2025; doi:10.61356/j.saem.2025.3469.

[9] Smarandache, F. “Toward a new paradigm: Insights into neutrosophic philosophy.” Neutrosophic Science International Association (NSIA) Publishing House, 2025. https://fs.unm.edu/TowardANewParadigm.pdf

[10] Ali, M.; Smarandache, F.; Vladareanu, L. “Neutrosophic sets and logic.” In *Emerging Research on Applied Fuzzy Sets and Intuitionistic Fuzzy Matrices*; IGI Global: Hershey, PA, USA, 2017; pp. 18–63.

[11] Admin, A. “The Natural Bases of Neutrosophy.” *Int. J. Neutrosophic Sci.* 2020, 9, 124-132; doi:10.54216/ijns.090204.

[12] Russell, G. “One True Logic?.” *J. Philos. Logic* 2008, 37, 593–611; doi:10.1007/s10992-008-9082-6.

[13] Cotnoir, A. “Theism and Dialetheism.” *Australas. J. Philos.* 2018, 96, 592–609; doi:10.1080/00048402.2017.1384846.

[14] Rezaei, A.; Oner, T.; Katikan, T.; Smarandache, F.; Gandotra, N. “A short history of fuzzy, intuitionistic fuzzy, neutrosophic and plithogenic sets.” *Int. J. Neutrosophic Sci.* 2022, 18, 103-121.

[15] Smarandache, F.; Vázquez, M.Y.L.; Cevallos-Torres, L.; Barco, L.J.L. “Neutrosofía: Orígenes, aplicaciones y perspectivas en la lógica contemporánea.” *Neutrosophic Comput. Mach. Learn.* 2025, 37, 1–10.

[16] Smarandache, F. “Neutrosophy means: Common Parts to Uncommon Things and Uncommon Parts to Common Things.” *Neutrosophic Sets Syst.* 2024, 68, 210-221. https://fs.unm.edu/NSS/NeutroMeans1.pdf

[17] Barbato, M. “Anekāntavāda and Dialogic Identity Construction.” *Religions* 2019, 10, 642; doi:10.3390/rel10120642.

[18] Jain, P. “Saptabhaṅgī: the Jaina theory of sevenfold predication: a logical analysis.” *Philos. East West* 2000, 385–399.

[19] Bronkhorst, J. “Anekantavada, the central philosophy of Ajivikism?.” *Int. J. Jaina Stud. (Online)* 2013, 9, 1–11.

[20] Peetush, A. “Ahimsa.” In *Encyclopedia of global justice*; Springer: Dordrecht, Netherlands, 2011; pp. 23–26.

[21] Rahlwes, C. “Silence and Contradiction in the Jaina Saptabhaṅgī.” *J. Indian Philos.* 2023, 51, 473–513; doi:10.1007/s10781-023-09545-5.

[22] Westerhoff, J. “The Fifth Corner of Four: An Essay on Buddhist Metaphysics and the Catuṣkoṭi, by Graham Priest.” *Mind* 2020; doi:10.1093/MIND/FZZ047.

[23] Stepien, R.K. “Buddhism between religion and philosophy: Nāgārjuna and the ethics of emptiness.” Oxford University Press: Oxford, UK, 2024.

[24] Green, R.S. “Reinterpreting Catuṣkoṭi in Contemporary Philosophy: Tensions between Non-Classical Logic and East Asian Buddhist Soteriology.” *SMARATUNGGA J. Educ. Buddhist Stud.* 2025, 5, 67–86.

[25] Sturgeon, D. “Zhuangzi, perspectives, and greater knowledge.” *Philos. East West* 2015, 65, 892–917.

[26] Connolly, T. “Perspectivism as a Way of Knowing in the Zhuangzi.” *Dao* 2011, 10, 487–505.

[27] Petts, J.; Man, E.K.W. “Dao Aesthetics: Ways of Opening to Sublime Experiences and Transforming Beautifully.” In *Comparative Everyday Aesthetics: East-West Studies in Contemporary Living*; Amsterdam University Press: Amsterdam, Netherlands, 2023; pp. 43–58.

[28] Baxter, P.; Colson, A. “The Azande, and related peoples of the Anglo-Egyptian Sudan and Belgian Congo.” Routledge: London, UK, 2017; doi:10.4324/9781315312972.

[29] Evans-Pritchard, E.E. “The Azande: History and political institutions.” Clarendon Press: Oxford, UK, 1971.

[30] Wheater, K. “An Analysis of EE Evans-Pritchard's Witchcraft, Oracles and Magic Among the Azande.” Macat Library: London, UK, 2017.

[31] Nietzsche, F. “Zur Genealogie der Moral” (1887). *Götzen-Dämmerung* (1889); Felix Meiner Verlag: Hamburg, 2014; Vol. 656.

[32] Cabitza, F.; Campagner, A.; Basile, V. “Toward a perspectivist turn in ground truthing for predictive computing.” In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence, Palo Alto, CA, USA, 7-14 February 2023*; AAAI Press: Washington, DC, USA, 2023; Vol. 37, pp. 6860–6868.

[33] Valette, M. “What Does Perspectivism Mean? An Ethical and Methodological Countercriticism.” In *Proceedings of the 3rd Workshop on Perspectivist Approaches to NLP (NLPerspectives)@ LREC-COLING 2024, Torino, Italy, 20-25 May 2024*; pp. 111–115.

[34] Frenda, S.; Abercrombie, G.; Basile, V.; Pedrani, A.; Panizzon, R.; Cignarella, A.T.; Bernardi, D. “Perspectivist approaches to natural language processing: a survey.” *Lang. Resour. Eval.* 2024, 1–28.

[35] Zhuang, S.; Hadfield-Menell, D. “Consequences of misaligned AI.” *Adv. Neural Inf. Process. Syst.* 2020, 33, 15763–15773.

[36] de Castro, E.V. “Cosmological deixis and Amerindian perspectivism.” *J. R. Anthropol. Inst.* 1998, 469–488.

[37] Smarandache, F.; Leyva-Vázquez, M.; Abdel-Basset, M. *Neutrosophic Sets and Systems, Número especial: Inteligencia artificial, neutrosofía y cosmovisiones latinoamericanas: hacia un futuro sostenible (Taller–18 al 21 de marzo de 2025, Universidad Tecnológica de El Salvador, San Salvador, El Salvador). Neutrosophic Sets Syst.* 2025, 84, 68. https://fs.unm.edu/NSS/NSS-84-2025-SI.pdf

[38] Martí, J. “Un paseo por la tierra de los anamitas.” Editorial Gente Nueva: La Habana, Cuba, 2015.

[39] Bentivegna, G. Zea, “Ortega y Gasset y la circunstancia hispanoamericana.” *Rev. Filos. (0185-3481)* 2017, 49.

[40] de Castro, E.B.V. “Exchanging perspectives: the transformation of objects into subjects in Amerindian ontologies.” *Common knowl.* 2004, 10, 463–484.

[41] Teixeira de Menezes, A.L.; Boechat, W. “Perspectivism and shamanism in the Jungian clinic: the jaguar as an archetypal image of the Latin American cultural unconscious.” *J. Anal. Psychol.* 2022, 67, 317–330.

[42] López Hidalgo, S.; Tapia Tapia, S. “Colonialidades legales: la constitucionalización de la justicia indígena y la continuidad del discurso judicial hegemónico en Ecuador.” *Rev. derecho Estado* 2022, 299–331.

[43] Rojas Cárdenas, J.A.; Pino Andrade, E.E.; Cueva Moscoso, J.E. “Escala lingüística neutrosófica para la valoración el principio de estricta legalidad y su aplicación en el sistema garantista ecuatoriano.” *Neutrosophic Comput. Mach. Learn.* 2023, 28.

[44] Smarandache, F. "NeutroAlgebra is a Generalization of Partial Algebra." *Int. J. Neutrosophic Sci. (IJNS)* 2020, 2, 8–17. https://fs.unm.edu/NA/NeutroAlgebra.pdf

[45] Smarandache, F. "The MultiAlist System of Thought." *Neutrosophic Sets Syst.* 2023, 61, 598–605. https://fs.unm.edu/NSS/MultiAlistSystemOfThought.pdf

[46] García-Guano, A. J., Ruiz-Pinto, V. S., Paredes-Calderón, B. A., & López, M. E. L. (2024). "Application of NCMs and MultiAlism in Indigenous Art Analysis." *Neutrosophic Sets and Systems*, 69, 1-10.

[47] Smarandache, F. (2023). "Introduction to the MultiNeutrosophic Set." *Neutrosophic Sets and Systems*, 61, 89-99. https://fs.unm.edu/NSS/MultiNeutrosophicSet.pdf

[48] Leyva Vázquez, M.Y.; Batista Hernandez, N.; Callejas, E.A.; Smarandache, F. (2025). "MultiNeutrosophic Ayni Method Based on Ancestral Logic and n-Alectic Reasoning for Ethical AI and Sustainability." *Neutrosophic Sets and Systems*, 84, 1.

[49] Ontañón, S. "An overview of distance and similarity functions for structured data." *Artif. Intell. Rev.* 2020, 53, 5309–5351.

[50] Zhang, Q.; Zhao, F.; Cheng, Y.; Gao, M.; Wang, G.; Xia, S.; Ding, W. "Effective value analysis of fuzzy similarity relation in HQSS for efficient granulation." *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* 2023.

[51] Smarandache, Florentin. "n-Valued Refined Neutrosophic Logic and Its Applications to Physics." *Progress in Physics*, Vol. 4, pp. 143-146, October 2013; https://fs.unm.edu/n-ValuedNeutrosophicLogic-PiP.pdf ; https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1407/1407.1041.pdf

[52] Smarandache, F. (2021). "Structure, NeutroStructure, and AntiStructure in science." *International Journal of Neutrosophic Science*, 13(1), 28-33. doi:10.5281/zenodo. 4314667, https://fs.unm.edu/NA/NeutroStructure.pdf

[53] Smarandache, Florentin (2015). "Law of Included Multiple-Middles & Principle of Dynamic Neutrosophic Opposition," EuropaNova & Education Publisher, Brussels-Columbus, 2014, 136 p., https://fs.unm.edu/LawIncludedMultiple-Middle.pdf

[54] Smarandache, Florentin (2023). "Law of Included Infinitely-Many-Middles within the frame of Neutrosophy." *Neutrosophic Sets and Systems*, Vol. 56, 1-4, https://fs.unm.edu/NSS/LawIncludedInfinitely1.pdf

NeutrosophicKnowledge, Vol. 06, 2025
University of New Mexico

Article

تقديم لكتاب بعنوان:

"نحو نموذج فكري جديد: رؤى في الفلسفة النيوتروسوفية"

للأستاذ: فلورنتن سمارنداكه

صالح بوزينة [1] *

[1] قسم الفلسفة، كلية العلوم الإنسانية والعلوم الاجتماعية، جامعة قسنطينة 2 عبد الحميد مهري، قسنطينة، الجزائر، البريد الإليكتروني: sisalah.bouzina.uv2@gmail.com

* Correspondence: sisalah.bouzina.uv2@gmail.com

Received: 04 20 ,2025; *Accepted:* 07 20, 2025.

• **ملخص :**

إن الهدف من هذه المقالة هو التعريف بكتاب عنوانه:"نحو نموذج فكري جديد: رؤى في الفلسفة النيوتروسوفية "Toward a New Paradigm: Insights into Neutrosophic Philosophy"، للأستاذ فلورنتن سمارنداكه Florentin Smarandache، وتقديمه لفئة القُرّاء من الأساتذة الباحثين في العالم العربي مُحبّي الإبداع وتَخليق الأفكار الجديدة النافعة، ولتحقيق هذا الغرض قمنا بتلخيص كل فصل من هذا الكتاب تلخيصا موجزا مع عرض أهم النقاط في كل منها بداية من مقدمته ونهاية بقائمة المصادر والمراجع التي اعتمدها الأستاذ فلورنتن سمارنداكه في تأليفه له، وفي الأخير بعد هذا التلخيص والعرض ظهرت لنا الأهمّيّة الشديدة لهذا الكتاب في الفلسفة وفي العلم، وفائدته كذلك لكل من يبحث عن كيفية للتفكير بإبداع خارج أي نسق.

_ **الكلمات المفتاحية:** مراجعة، فلورنتن سمارنداكه، نموذج فكري جديد، الفلسفة النيوتروسوفية، النيوتروسوفيا، المنطق النيوتروسوفي، تقليدي، الإبداع.

1- مقدمة:

جاءت هذه المقالة بطلب من الأستاذ فلورنتن سمارنداكه بأن نقوم بمراجعة كتابه هذا المعنون بـ:"نحو نموذج فكري جديد: رؤى في الفلسفة النيوتروسوفية Toward a New Paradigm: Insights into Neutrosophic Philosophy"، وتقديم ملخّص بسيط عن محتواه باللغة العربية للقارئ العربي خاصة حتى يستفيد ممّا يعرضه هذا الكتاب من أفكار ومناهج فلسفية وعلمية جديدة متجاوزة كل ما هو قديم تقليدي وكل ما هو مكرّر حتى في الدراسات المعاصرة، وذلك بتقديم منظور جديد للفلسفة يستخدم فيه الأستاذ فلورنتن سمارنداكه الطرائق المعاصرة غير التقليدية للمنطق والرياضيات، مقترحًا بذلك منهجًا أكثر تكاملًا ومرونة في التعامل مع الحقيقة والشك وعدم اليقين وهو ما يسميه بـ: الفلسفة النيوتروسوفية Neutrosophic Philosophy (أو النيوتروسوفيا Neutrosophy)، فيقارن في هذا الكتاب بين النيوتروسوفيا والفلسفات التقليدية، مثل العقلانية والوجودية، ويناقش كيفية استخدام هذا المنهج الجديد في تحليل المشكلات الفلسفية. ويوضّح فيه بأن النيوتروسوفيا ليست مجرد كلام نظري فلسفي فحسب، بل لها تطبيقات عملية في عدّة مجالات مثل علم الاجتماع والسياسة وعلم النفس والفيزياء والبيولوجيا والطب والهندسة والمنطق والرياضيات والذكاء الاصطناعي والتكنولوجيا و...، لذلك تعتبر النيوتروسوفيا أداة علمية قابلة للتطوير ومن الممكن أن تؤدي إلى اكتشافات جديدة في مختلف العلوم، ويرى الأستاذ فلورنتن سمارنداكه أنّ النيوتروسوفيا هي المنهج الفكري والعملي القادر على معالجة كل أنواع التعقيدات المعرفية في القرن الحادي والعشرين واستشراف الآتي بشكل بعيد عن الخطأ والمفارقة، وأنها الفلسفة والعلم الذي لا يمكن أبدا الاستغناء عنه في المستقبل.

إذن من هو الأستاذ فلورنتن سمارنداكه وما هو مضمون كتابه هذا؟

2- تعريف بصاحب الكتاب:

هو فلورنتن سمارنداكه فيلسوف ورياضي وفيزيائي وشاعر وروائي ورسام تجريبي، وُلد يوم 10 ديسمبر عام 1954م بمدينة بالسيستي Balcesti مقاطعة فلوسيا Valcea دولة رومانيا Romania ، تخرّج من قسم الرياضيات وعلم الحاسوب من جامعة كريوفا Craiova عام 1979م، ثم حصل على درجة الدكتوراه في

الرياضيات من جامعة كيشينيف Kishinev عام 1997م ، درّس وشغل منصب رئيس قسم الرياضيات بجامعة نيومكسيكو في نيومكسيكو ، الولايات المتحدة الأمريكية**[1]** ، ومند وُصول فلورنتن سمارنداكه إلى الولايات المتحدة الأمريكية عُرف بغزارة إنتاجه في مجالات مختلفة :

في **الرياضيات**: نظرية الأعداد، الإحصاء، البُنى الجبرية، الهندسة اللاإقليدية، الهندسة السمارنداكية، في **علوم الكمبيوتر**: الذكاء الاصطناعي، الانشطار المعلوماتي، في **الفيزياء**: فيزياء الكم، فيزياء الجسيمات، في **الإقتصاد**: ثقافة الإقتصاد، نظرية المراكز التجارية المتعددة، في **العلوم الإجتماعية**: مقالات سياسية، في **الأدب**: الشعر، النثر، المقالات، الرواية، الدراما، مسرحيات الأطفال، الترجمة، في **الفن**: الرسم التجريبي الطليعي، الفن التصويري، الرسم التشكيلي، في **الفلسفة**: قدم فلورنتن سمارنداكه عام 1995م **[2]** نظريته النيوتروسوفيا Neutrosophy ، وهي أساس كل أبحاثه، في الأدب، في الرياضيات، في الفيزياء، ...، وغيرها، والتي **جوهرها** هو **المنطق النيوتروسوفي**، وهو تعميم للمنطق الضبابي**[3]** .

رُشّح فلورنتن سمارنداكه لجائزة نـوبـل في الأدب عام 1999م .

وعند عمله كأستاذ لمادة الرياضيات بالمغرب الشقيق لمدة عامين من عام 1982م إلى عام 1984م، درّس خلالها باللغة الفرنسية التي يجيدها إلى جانب اللغتين الإنغليزية والرومانية، كما **قــرأ الـقــرآن الـكــريــم** ، وعايش الثقافة والفنون والآداب العربية الإسلامية عن قرب**[1]** .

ولمعرفة المزيد عن الأستاذ فلورنتن سمارنداكه، أنظر الرابط الآتي:

http://fs.unm.edu/FlorentinSmarandache.htm

مؤلفاته : لديه الكثير من المؤلفات في مختلف المجالات، أنظر الروابط الآتية:

Open source books :

http://fs.gallup.unm.edu/eBooks-otherformats.htm

http://fs.unm.edu/ScienceLibrary.htm

http://fs.unm.edu/LiteratureLibrary.htm

https://fs.unm.edu/neutrosophy.htm

http://fs.unm.edu/DSmT.htm

https://fs.unm.edu/SHS/

3- تعريف بالكتاب:

بصفة عامة هو كتاب معنون بـ:"نحو نموذج فكري جديد: رؤى في الفلسفة النيوتروسوفية Toward a New Paradigm : Insights into Neutrosophic Philosophy"، للأستاذ فلورنتن سمارنداكه Florentin Smarandache، والمطبوع في دار النشر: NSIA Publishing House، البلد الناشر: Ecuador – America، عام 2025م، عدد صفحاته 252 صفحة، وهو بصيغة pdf، ويمكن تحميله من خلال أحد الرابطان الآتيان:

https://neutrosophic.org

https://fs.unm.edu/TowardANewParadigm.pdf

أما بصفة أخصّ يمكن تفصيل التعريف بهذا الكتاب كالآتي:

3-1- مقدمة الكتاب:

يقدّم الأستاذ فلورنتن سمارنداكه منظورا جديدا للفلسفة بإستخدام الطرائق المعاصرة غير التقليدية للمنطق والرياضيات، مقترحًا بذلك منهجًا أكثر تكاملًا ومرونة في التعامل مع الحقيقة والشك وعدم اليقين وهو ما يسميه بـ: الفلسفة النيوتروسوفية Neutrosophic Philosophy (أو النيوتروسوفيا Neutrosophy). وأنّ هذا الكتاب هو محاولة أكيدة وجادّة لإعادة النظر في الأسس المعرفية التي تُبنى عليها مختلف العلوم، من خلال هذه الفلسفة الجديدة النيوتروسوفيا، التي تجمع بين الفرضيات المتناقضة والمحايدة في آن واحد، ويؤكد على أن النيوتروسوفيا ليست مجرد نظرية فلسفية، بل هي ثورة معرفية قد تغيّر طريقة فهمنا للعالم. ويَحثّ الباحثين على التفكير خارج الأطر التقليدية، والتفاعل مع محتوى الكتاب بعقلية منفتحة، لأنه بحّق مساهمة مهمّة في تطوير

الفكر الفلسفي والرياضي، وهو ليس بحثا مختوما في النيوتروسوفيا، بل هو البداية لرحلة نيوتروسوفية طويلة من التطوير العلمي والفكري.

ويمكن أن نلخّص أهم النقاط التي قدمها الأستاذ: فلورنتن سمارنداكه في مقدمة كتابه كالآتي:

- العالم أصبح معقدًا أكثر من أن يُفهم بالمنطق التقليدي، ولذلك نحن بحاجة إلى منهج جديد.
- النيوتروسوفيا تقدم رؤية أكثر شمولية تتعامل مع الحقيقة والخطأ وعدم اليقين والتناقضات.
- هناك تطبيقات هائلة للنيوتروسوفيا في الفلسفة، العلوم الاجتماعية، الذكاء الاصطناعي، والرياضيات.
- الهدف من هذا الكتاب هو شرح هذا المنهج الجديد (النيوتروسوفيا) وتطبيقاتها، وتحفيز البحث المستقبلي فيها.

3–2– الفصل الأول من الكتاب المعنون ب: الأسس الفلسفية للنيوتروسوفيا:

في هذا الفصل يستعرض الأستاذ فلورنتن سمارنداكه مفهوم النيوتروسوفيا كنظام فلسفي يدمج بين الفكرة نقيضها وعناصر أخرى غير محددة تتوسطهما. يعتمد هذا المنهج على فكرة أن أي مفهوم يحمل داخله نقيضه ومحايده بدرجات، مختلفة مما يسمح بفهم أكثر مرونة للتعقيد الموجود في الكون. ويوضّح كيف أن هذا المنهج الجديد يمكن أن يتجاوز حدود المنطق التقليدي، الذي يعتمد على الثنائيات المطلقة (صواب/خطأ، موجود/غير موجود).

ويمكن أن نلخّص أهم النقاط التي قدمها الأستاذ: فلورنتن سمارنداكه في الفصل الأول من كتابه كالآتي:

- تقديم تعريف واضح لمفهوم النيوتروسوفيا.
- مقارنة بين النيوتروسوفيا والفلسفات التقليدية، مثل العقلانية والوجودية.
- مناقشة كيفية استخدام هذا المنهج الجديد في تحليل المشكلات الفلسفية.

3–3– الفصل الثاني من الكتاب المعنون ب: تطبيقات النيوتروسوفيا في المنطق والرياضيات:

في هذا الفصل يوضّح الأستاذ فلورنتن سمارنداكه كيف أن النيوتروسوفيا ليست مجرد نظرية فلسفية، بل يمكن تطبيقها عمليًا في مجال المنطق والرياضيات، ويناقش كيف يمكن إستخدام الأعداد النيوتروسوفية

Neutrosophic Numbers في حلّ المشكلات التي تتضمن عدم اليقين، مثل تحليل البيانات الغامضة أو المتناقضة.

ويمكن أن نلخّص أهم النقاط التي قدمها الأستاذ: فلورنتن سمارنداكه في الفصل الثاني من كتابه كالآتي:

- شرح مفهوم "الأعداد النيوتروسوفية" ودورها في تطوير أنظمة رياضية جديدة.
- تطبيقات في الذكاء الاصطناعي، حيث يمكن للمنطق النيوتروسوفي تحسين دقة التنبؤات في الأنظمة غير المؤكدة.
- مقارنة بين المنطق النيوتروسوفي والمنطق التقليدي والمنطق الضبابي (Fuzzy Logic) **[4]**.

3–4– الفصل الثالث من الكتاب المعنون ب: تأثير النيوتروسوفيا على العلوم الاجتماعية والإنسانية:

في هذا الفصل يبيّن الأستاذ فلورنتن سمارنداكه كيف يمتّد تأثير الفلسفة النيوتروسوفية إلى مجالات مثل علم الاجتماع، السياسة، وعلم النفس. ويوضّح كيف أن هذا المنهج الجديد يمكن أن يساعد في فهم الظواهر الاجتماعية المعقدة، التي تتداخل فيها عوامل متعدّدة لا يمكن تصنيفها ضمن ثنائيات مطلقة.

ويمكن أن نلخّص أهم النقاط التي قدمها الأستاذ: فلورنتن سمارنداكه في الفصل الثالث من كتابه كالآتي:

- كيف تساعد النيوتروسوفيا في تحليل النزاعات السياسية والاجتماعية.
- دور النيوتروسوفيا في علم النفس، خصوصًا في فهم السلوك البشري واتخاذ القرارات.
- استخدام النيوتروسوفيا في تحليل وسائل الإعلام، حيث يُبرز الأستاذ فلورنتن سمارنداكه كيف أن المعلومات قد تكون صحيحة جزئيًا أو خاطئة جزئيًا، أو محايدة جزئيًا، وليست مطلقة.

3–5– الفصل الرابع من الكتاب المعنون ب: النيوتروسوفيا في العلوم الطبيعية والهندسية:

في هذا الفصل يُركّز الأستاذ فلورنتن سمارنداكه على التطبيقات العملية للنيوتروسوفيا في العلوم والتكنولوجيا، ويوضّح كيف يُمكن استخدام النيوتروسوفيا في معالجة البيانات غير المؤكدة في الفيزياء، البيولوجيا، والهندسة.

ويمكن أن نلخّص أهم النقاط التي قدمها الأستاذ: فلورنتن سمارنداكه في الفصل الرابع من كتابه كالآتي:

- النيوتروسوفيا في معالجة الإشارات والصور الرقمية.

- تطبيقات النيوتروسوفيا في الهندسة الوراثية والطب الحيوي.
- تأثير النيوتروسوفيا في تطوير الخوارزميات المستخدمة في تحليل البيانات الكبيرة.(Big Data)

3–6– الفصل الخامس من الكتاب المعنون ب: نقد النماذج التقليدية وإستشراف المستقبل:

في هذا الفصل ينتقد الأستاذ فلورنتن سمارنداكه الفلسفات والنظريات التقليدية التي تعتمد على منطق الثنائيات المطلقة، ويقترح أن النيوتروسوفيا يمكن أن تمثل خطوة نحو نموذج فكري جديد أكثر تكاملًا. يناقش أيضًا كيف يمكن أن تؤثر هذه الفلسفة على المستقبل، خصوصًا في ظل التطور السريع للذكاء الاصطناعي والتكنولوجيا الرقمية.

ويمكن أن نلخّص أهم النقاط التي قدمها الأستاذ: فلورنتن سمارنداكه في الفصل الخامس من كتابه كالآتي:

- أوجه القصور في الفلسفات التقليدية.
- كيف يمكن للنيوتروسوفيا أن تعيد تشكيل أسس البحث العلمي والفكر الفلسفي.
- إستشراف مستقبل العلوم بناءً على الفلسفة النيوتروسوفية.

3–7– خاتمة الكتاب:

يختم الأستاذ فلورنتن سمارنداكه الكتاب برؤية واضحة حول دور النيوتروسوفيا كمنهج فكري وعلمي قادر على معالجة التعقيدات المعرفية في القرن الحادي والعشرين. يسلط الضوء على أن العالم لم يعد يعمل وفق منطق الأبيض والأسود، بل أصبح مليئًا بالمعلومات المتناقضة، مما يجعل الحاجة إلى إطار منطقي أكثر شمولًا ضرورة لفهم الواقع المعاصر، ويؤكد أن النيوتروسوفيا ليست مجرد منهج فلسفي، بل أصبحت أداة عملية قادرة على تغيير كيفية تعاملنا مع البيانات، واتخاذ القرار، وفهم الظواهر الطبيعية والاجتماعية. ومع ذلك، يشدّد على أن إنتشارها وتبنيها على نطاق واسع لا يزال بحاجة إلى عمل مكثّف على عدّة مستويات، مثل التعليم، البحث العلمي، والتطبيقات الصناعية، ويمكن أن نلخّص أهم النقاط التي قدمها في خاتمة الكتاب كالآتي:

3-7-1- النيوتروسوفيا تُغيّر طريقة تفكيرنا التقليدية:

- قدمت النيوتروسوفيا منهجًا جديدًا يتجاوز الثنائية التقليدية (الصواب والخطأ)، حيث يمكن لأي معلومة أن تحتوي على درجات من الصواب وعدم التحديد والخطأ في آنٍ واحد.
- أصبح من الواضح أن المنطق التقليدي لم يعد كافيًا لمواكبة التطورات المعرفية في العالم الرقمي والمعقد.

3-7-2- النيوتروسوفيا تثبت فائدتها في العلوم التطبيقية:

- في الرياضيات والفيزياء، تساعد النيوتروسوفيا في تحليل الأنظمة غير الخطية والمعقدة.
- في الذكاء الاصطناعي، تقدم النيوتروسوفيا حلولًا أكثر تقدمًا لمعالجة عدم اليقين في التعلم الآلي واتخاذ القرار.
- في الطب تُحسّن النيوتروسوفيا طرق تشخيص الأمراض واتخاذ القرارات في ظل معلومات غير كاملة.
- في الاقتصاد تساعد في تطوير نماذج رياضية أكثر دقة للتنبؤات الاقتصادية.

3-7-3- التحديات ما زالت قائمة:

- على الرغم من فوائد النيوتروسوفيا، إلا أنها تواجه صعوبة في التبني الأكاديمي، بسبب الحاجة إلى إعادة صياغة الكثير من النظريات العلمية التقليدية.
- يتطلب تطبيق النيوتروسوفيا في المجالات المختلفة أدوات برمجية متقدمة وخوارزميات متخصصة، مما يجعل الأمر معقدًا بعض الشيء.

3-8- توصيات الكتاب:

يُوصّي الأستاذ فلورنتن سمارنداكه في نهاية كتابه هذا بالآتي:

3-8-1- تعزيز البحث الأكاديمي في مجال النيوتروسوفيا:

- من الضروري أن يتّم تشجيع الأبحاث والدراسات المتخصصة في الفلسفة النيوتروسوفية، خاصة في مجالات الرياضيات، الفيزياء، علوم الحاسوب، وعلم الاجتماع.

- يجب العمل على نشر مزيد من الأوراق البحثية التي توضّح كيفية دمج النيوتروسوفيا مع النظريات العلمية الحالية.

3-8-2- إدراج النيوتروسوفيا في المناهج التعليمية:

- يقترح الأستاذ فلورنتن سمارنداكه أن يتّم تدريس أساسيات النيوتروسوفيا في الجامعات، خاصة في أقسام الرياضيات، الذكاء الاصطناعي، والفلسفة.
- تطوير كورسات Courses إلكترونية وبرامج تدريبية تساعد الباحثين على فهم وتطبيق النيوتروسوفيا عمليًا.

3-8-3- تطوير تطبيقات برمجية تعتمد على النيوتروسوفيا:

- يمكن أن تساعد البرمجيات المبنية على النيوتروسوفيا في تحليل البيانات الضخمة، تحسين اتخاذ القرار، وتطوير أنظمة ذكاء إصطناعي أكثر دقة.
- يجب تشجيع الشركات التقنية الكبرى على تضمين النيوتروسوفيا في أدوات تحليل البيانات لتعزيز قدرتها على التعامل مع المعلومات غير المؤكدة.

3-8-4- وضع سياسات وأطر تنظيمية لإستخدام النيوتروسوفيا:

- بما أن النيتروسوفيا يمكن أن تؤثر على القرارات السياسية، يجب وضع إرشادات واضحة لاستخدامها بشكل أخلاقي وعادل.
- تطوير مدونات سلوك ومعايير لضمان استخدام النيوتروسوفيا بطريقة لا تؤدي إلى التلاعب أو إساءة الفهم.

3-8-5- الخلاصة النهائية:

- يؤكد الأستاذ فلورنتن سمارنداكه أن النيوتروسوفيا ليست مجرد فكرة نظرية، بل هي ثورة فكرية وعلمية يمكن أن تعيد تشكيل العالم. ومع ذلك، فإن نجاحها يعتمد على مدى قدرتنا على نشرها وتعزيز البحث فيها، وتطوير أدوات تجعلها أكثر قابلية للتطبيق.

- إذا تمّ تبني النيوتروسوفيا على نطاق واسع، فقد تصبح إحدى أهم النظريات الفكرية في المستقبل، مما يفتح الباب لفهم أكثر تعقيدًا للواقع العلمي، الاجتماعي، والتكنولوجي.

3-9- قائمة المصادر والمراجع التي اعتمدها الأستاذ فلورنتن سمارنداكه في هذا الكتاب:

الأستاذ فلورنتن سمارنداكه ولّى أهمية كبيرة للمصادر والمراجع المتنوعة والموثوقة، حيث اعتمد على مزيج من المراجع الفلسفية، العلمية، الرياضية، والمنطقية لدعم نظريته حول النيوتروسوفيا. يمكن تصنيف هذه المصادر والمراجع إلى عدة فئات رئيسية هي:

3-9-1- المصادر الفلسفية والمنطقية:

يستند الأستاذ فلورنتن سمارنداكه إلى عدد من الأعمال الفلسفية الكلاسيكية والمعاصرة لتوضيح كيف تطورت الأفكار المتعلقة بالحقيقة، المنطق، واليقين. ومن بين هذه المصادر:

- أرسطو (384-322 ق.م): خصوصًا كتاباته عن المنطق التقليدي وقوانين التفكير الثلاثة (الهوية، عدم التناقض، الثالث المرفوع). ويستعرض الأستاذ فلورنتن سمارنداكه كيف أن النيوتروسوفيا تتجاوز هذه القوانين بإدخال مفهوم "الحيز الغامض" بين الحقيقة والخطأ.
- رينيه ديكارت (1596-1650): يستشهد به الأستاذ فلورنتن سمارنداكه عند الحديث عن الشك المنهجي، لكنه يوضّح أن النيوتروسوفيا لا تتوقف عند الشك بل تقدم نموذجًا لإدماج التناقضات.
- هيغل (1770-1831): يناقش الأستاذ فلورنتن سمارنداكه فلسفة الجدلية الهيغلية (الأطروحة – نقيض الأطروحة – التركيب بينهما) وكيف أن النيوتروسوفيا يمكن أن تكون إمتدادًا أكثر تطورًا لها.
- مارتن هايدغر (1889-1976): يستشهد الأستاذ فلورنتن سمارنداكه بأعماله حول ماهية الحقيقة والغموض، وهو ما يتماشى مع فكرة النيوتروسوفيا عن المستويات المتعددة للحقيقة.

3-9-2- المصادر الرياضية والمنطقية:

بما أن النيوتروسوفيا تتضمن بعدًا رياضيًا، فقد استند الأستاذ فلورنتن سمارنداكه إلى عدّة مراجع في الرياضيات والمنطق، ومن أبرزها:

- جورج بول (1815-1864): يستعرض الأستاذ فلورنتن سمارنداكه كيف أن المنطق البولياني (Boolean Logic) وضع الأساس للتفكير المنطقي الحديث، لكنه محدود في التعامل مع عدم اليقين، وهو ما تحاول النيتروسوفيا حله.
- كورت غودل (1906-1978): يناقش الأستاذ فلورنتن سمارنداكه نظريته في عدم الاكتمال، والتي تثبت أن أي نظام رياضي يحتوي على حقائق لا يمكن إثباتها داخليًا، مما يدعم الحاجة إلى إطار أوسع مثل النيوتروسوفيا.
- لطفي زاده (1921-2017): وهو مؤسس المنطق الضبابي(Fuzzy Logic) ، ويشير الأستاذ فلورنتن سمارنداكه إلى أن النيوتروسوفيا توسع هذا المفهوم عبر التعامل مع التناقضات بشكل أكثر دقة.
- نظرية المجموعات الحدسية Intuitionistic Fuzzy Sests: حيث يوضح كيف أن المجموعات التقليدية ليست كافية لتمثيل الحقيقة المعقدة، ويستشهد بعدد من الأبحاث في هذا المجال.

3-9-3- المصادر العلمية والتطبيقية:

اعتمد الأستاذ فلورنتن سمارنداكه على أبحاث ودراسات من مجالات متعددة مثل الفيزياء، الذكاء الاصطناعي، وعلم الاجتماع لإظهار تطبيقات النيوتروسوفيا. ومن أبرز هذه المصادر:

3-9-3-1- ميكانيكا الكم:

- يستشهد الأستاذ فلورنتن سمارنداكه بـ نيلز بور Niels Bohr ونظرية التكاملية Complementarity Theory الخاصة به، حيث يشير إلى أن الجسيمات يمكن أن تمتلك خصائص متناقضة في الوقت نفسه، وهو ما يتفق مع مبادئ النيوتروسوفيا.
- يستعرض أيضًا تجربة قطة إرفين شرودنغر Erwin Schrodinger كمثال على كيفية تعايش الحالات المختلفة (حياة/موت) في آنٍ واحد.

3-9-3-2- الذكاء الاصطناعي والتعلم الآلي:

- يستند الأستاذ فلورنتن سمارنداكه إلى أبحاث حديثة حول التَعَلُّم العميق (Deep Learning) ، وكيف أن النماذج الذكيّة تحتاج إلى مناهج أكثر تقدمًا لمعالجة عدم اليقين في البيانات.
- يستشهد الأستاذ فلورنتن سمارنداكه ببعض خوارزميات الشبكات العصبية الاصطناعية التي تستفيد من المنهج النيوتروسوفي.

3-9-3-3- علم الاجتماع والسياسة:

- يناقش الأستاذ فلورنتن سمارنداكه أبحاثًا حول التناقضات في الرأي العام وكيف أن المناهج التقليدية في تحليل البيانات الاجتماعية تفشل في تفسير الظواهر المعقدة، مما يجعل النيوتروسوفيا أداةً مفيدةً في هذا المجال.
- يستشهد الأستاذ فلورنتن سمارنداكه بأعمال في نظرية الألعاب والنظم المعقدة التي تتعامل مع سيناريوهات غير يقينية.

3-9-3-4- الأوراق البحثية والمراجع الحديثة:

يذكر الأستاذ فلورنتن سمارنداكه مجموعة من الأوراق العلمية والمقالات البحثية الحديثة التي تطرقت إلى تطبيقات النيوتروسوفيا، ومن أبرزها:

- أبحاث منشورة في مجلات علمية مرموقة تتناول المنطق النيوتروسوفي.
- دراسات مقارنة بين المنطق التقليدي، المنطق الضبابي، والمنطق النيوتروسوفي.
- تطبيقات النيوتروسوفيا في تحليل البيانات الضخمة، الاقتصاد، والأنظمة المعقدة.

3-9-3-5- الكتب السابقة للأستاذ فلورنتن سمارنداكه ومراجع ذاتية:

يستشهد الأستاذ فلورنتن سمارنداكه أيضًا بأعماله السابقة في النيوتروسوفيا، حيث طوّر هذه النظرية على مدى سنوات من البحث والتجربة. يتضمن ذلك:

- كتبه السابقة حول النيتروسوفيا والمنطق النيوتروسوفي.

- أبحاثه المنشورة حول التطبيقات العملية للنيتروسوفيا في التكنولوجيا والعلوم.

3-9-4- خلاصة المصادر والمراجع:

من خلال اعتماد الأستاذ فلورنتن سمارنداكه على مزيج من الفلسفة الكلاسيكية، الرياضيات الحديثة، العلوم التطبيقية، والأبحاث المعاصرة يبرهن على أن النيوتروسوفيا ليست مجرد نظرية فلسفية، بل هي إطار معرفي واسع له تطبيقات حقيقية، كما يؤكد أن التطوّر المستمر في العلم والفكر يتطلب إعادة النظر في النماذج التقليدية، مما يجعل النيتروسوفيا نموذجًا مستقبليًا قابلًا للتطوير والبحث.

4- تقييم عام للكتاب:

4-1- ما يجب على القارئ معرفته قبل قراءة هذا الكتاب:

- يجب على القارئ أن يكون عارفا بالرياضيات أو على الأقل المنطق الرياضي المعاصر، لأن أغلب فصول هذا الكتاب تتطلب معرفة مسبقة بموضوعات متقدمة في الرياضيات والمنطق.

4-2- الجديد الذي أتى به الأستاذ فلورنتن سمارنداكه في هذا الكتاب:

- يقدم رؤية جديدة تتجاوز الحدود التقليدية للفلسفة والمنطق.
- يفتح الباب أمام فهم جديد للحقيقة، التناقض، وعدم اليقين (عدم التحديد Indeterminacy)، ويساهم في تطوير منهجية جديدة للتفكير المنطقي.
- يقدم حلولًا لمشاكل عدم اليقين والتناقضات في البيانات، مما يجعله ذا فائدة في عدة مجالات مثل الفيزياء، الذكاء الاصطناعي، والعلوم الإنسانية.
- يحتوي على تطبيقات عملية في مختلف العلوم.
- يعتمد على منهجية واضحة وأمثلة عملية.

في العموم يُعد هذا الكتاب عملًا جادًا في تطوير لفكر فلسفي جديد (النيوتروسوفيا) يتعامل مع التعقيد واللاتحديد في مختلف المجالات. وأسلوب الأستاذ فلورنتن سمارنداكه يتميّز بالوضوح والمنهجية في العرض والطرح ودعم ذلك بأمثلة تطبيقية من عدّة مجالات علمية. على الرغم من أن بعض المفاهيم قد تكون معقّدة، إلا أن

الأستاذ فلورنتن سمارنداكه ينجح في تقديمها بطريقة تجعلها في متناول القارئ المتخصص، لذلك يُعد كتابًا مهمًا لأي أستاذ باحث مهتم بالفلسفة الحديثة، الرياضيات، والذكاء الاصطناعي. فهو ليس مجرّد نظرية جديدة، بل يقدّم أدوات تحليلية يمكن تطبيقها عمليًا في مختلف المجالات. فمن كان مهتمًا بالتفكير بطريقة إبداعية خلاقّة (أو كما يقال التفكير خارج الصندوق)، فهذا الكتاب يستحق القراءة بتمعّن.

يمكن القول أنّ هذا الكتاب ليس مجرد عمل أكاديمي، بل هو دعوة لإعادة التفكير في الطريقة التي نفهم بها العا لم.

5- خاتمة:

في الختام نستنتج ممّا سبق أن هذا الكتاب هو حثّ لكل الباحثين على التفكير خارج الأطر التقليدية، ولكن شرط فهم هذا الكتاب والتفاعل مع محتواه هو وجوب قراءته بعقلية منفتحة وإزاحة كل الأصنام الذهنية العالقة التي تقف حاجزا أمام التطوير والتجديد وتقف أمام رؤية الأفق بعدها، ونرى بحّق أنّ هذا الكتاب هو مساهمة مهمّة في تطوير الفكر الفلسفي والرياضي، وهو خطوة أولى في باب مفتوح وفي طريق طويلة تنتظر من يسلكها ويعبّدها ويُنير معالمها لكل الباحثين الذين يأتون بعده.

6- توصيات:

يمكن حصر التوصيات في النقاط الآتية:

- قراءة هذا الكتاب بتمعّن وتخصيص وقت للبحث فيه أكثر.
- ترجمته إلى اللغة العربية ولغات أخرى.
- كتابة مقالات حوله للتعريف به، أكثر عمقا من هذه المقالة التي كتبناها نحن.
- هذا الكتاب يعتبر من الخطوات الأولى في النيوتروسوفيا ننتظر من باحثين آخرين سير خطوات أخرى.
- إدخال مقياس النيوتروسوفيا ضمن المقاييس الفلسفية.
- إدخال مقياس النيوتروسوفيا في كل التخصصات والشعب العلمية الجامعية.
- إستخدام المناهج النيوتروسوفية إلى جانب مناهج البحث العلمي الأخرى.

– إقامة أيام دراسية وندوات وملتقيات ومؤتمرات لعرض النيوتروسوفيا وبيان فائدتها وقيمتها.

7- المراجع:

[1]- أنظر أكثر تفصيلا : فلورنتن سمارنداكه و صلاح عثمان ، ***الفلسفة العربية من منظور نيوتروسوفي*** ، منشأة المعارف ، جلال حزي و شركاه ، الإسكندرية ، مصر ، الطبعة الأولى ، سنة 2007م ، ص 27 – 34.

[2]- Charles Ashbacher , ***intoduction to neutrosophic logic*** , american research press rehoboth , 2002 , p 52.

[3] – فلورنتن سمارنداكه ، ***مبادئ التفاضل و التكامل النيوتروسوفي و حساب التفاضل و التكامل النيوتروسوفي*** ، ترجمة هدى إسماعيل خالد إسماعيل الجميلي و أحمد خضر عيسى الجبوري، الجمعية العالمية للعلوم النيوتروسوفية، سنة 2016م، ص 6.

[1] – فلورنتن سمارنداكه ، صلاح عثمان ، ***الفلسفة العربية من منظور نيوتروسوفي*** ، مصدر سابق ، ص 39.

[4]- Salah Bouzina, ***Fuzzy Logic vs. Neutrosophic Logic: Operations Logic***, Neutrosophic Sets and Systems, An International Journal in Information Science and Engineering, Univercity of New Mexico, Vol. 14, 2016.

Neutrosophic Knowledge (NK) is an academic journal, published quarterly online and on paper, that has been created for publishing in all scientific and literary fields. Papers Published in Arabic, Turkish and English, French.
ISSN (print): 2767-0619, ISSN (online): 2767-0627
The papers should be professional, in good Arabic, Turkish, English and French, containing a brief review of a problem and obtained results. All submissions should be designed in MS Word format using our template file:
http://fs.unm.edu/NK/
Submit your paper by email to: **neutrosophic.knowledge@gmail.com**. To order printed issues, contact the Editor-in Chief. This journal is non-commercial, academic edition. It is printed from private donations. The neutrosophics website at UNM is: http://fs.unm.edu/neutrosophy.htm
The home page of the journal is accessed on:
http://fs.unm.edu/NK/

Editors in Chief

Dr. Salah Bouzina
Department of Philosophy, Faculty of Human Science and Sociology, University Constantine 2 Abdelhamid Mehri, Constantine 25000, Algeria
E-mail: salah.bouzina@univ-constantine2.dz

Dr. Ahmed Hatip
Department of Mathematics, Faculty of science, University of Gaziantep 27000, Turkey
E-mail: Ahmedhatip@gantep.edu.tr

Prof. Dr. Florentin Smarandache
Department of Mathematics and Science
University of New Mexico
705 Gurley Avenue
Gallup, NM 87301, USA
E-mail: smarans@unm.edu.usa