



Article

# Analyse comparative de la statistique classique, de l'arithmétique affine et de la statistique neutrosophique dans le traitement de l'incertitude : supériorité contextuelle de l'approche neutrosophique face à l'indétermination, à la contradiction et à l'information incomplète

Florentin Smarandache<sup>1</sup>, Maikel Yelandi Leyva Vázquez<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Mathematics, Physical and Natural Sciences Division, University of New Mexico, 705 Gurley Avenue, Gallup, NM 87301, USA. smarand@unm.edu. ORCID: 0000-0002-5560-5926

<sup>2</sup> Universidad Bolivariana del Ecuador, Km 5.5 Vía Durán-Yaguachi, Durán, Ecuador. mleyvaz@gmail.com. ORCID: 0000-0001-7911-5879

\* Correspondence: e-mail: smarand@unm.edu

Received: 15 avril 2026; Accepted: 04 mai 2026.

## Résumé

La statistique classique, l'arithmétique affine et la statistique neutrosophique proposent trois manières distinctes de traiter l'incertitude. La statistique classique est efficace lorsque les observations sont bien définies, les hypothèses probabilistes sont raisonnables et l'indétermination peut être assimilée à une variabilité aléatoire. L'arithmétique affine est plus adaptée à la propagation numérique d'erreurs bornées, car elle conserve des dépendances linéaires entre sources d'incertitude et réduit la surestimation produite par l'arithmétique intervalaire naïve. La statistique neutrosophique introduit une représentation plus expressive lorsque l'incertitude contient non seulement une composante numérique, mais aussi de l'indétermination épistémique, de l'ambiguïté sémantique, de l'information incomplète ou des évaluations contradictoires. Cet article propose une comparaison conceptuelle et opérationnelle de ces trois approches, étendue à la logique floue, aux probabilités imprécises et à la statistique intervalaire. Le résultat principal met en évidence la supériorité contextuelle de la statistique neutrosophique : elle est la seule approche capable de représenter simultanément des états de vérité, d'indétermination et de fausseté comme dimensions indépendantes, d'accueillir des états paraconsistants ( $T + F > 1$ ) structurellement inaccessibles aux autres cadres, et de préserver la structure informationnelle complète des évaluations expertes. Un exemple numérique pour l'expression  $E(x) = x^2 - x$  illustre comment la convention d'idempotence neutrosophique conserve la dépendance symbolique et récupère la plage exacte dans ce cas spécifique.

**Mots-clés :** statistique neutrosophique ; arithmétique affine ; statistique classique ; supériorité contextuelle ; indétermination ; paraconsistance ; logique floue ; probabilités imprécises ; arithmétique intervalaire ; apports épistémiques ; MCDM.

## 1. Introduction

Les méthodes statistiques sont souvent comparées à partir de leurs performances numériques, mais cette comparaison est incomplète si l'on ne précise pas d'abord la nature de l'incertitude traitée. Une moyenne, une variance ou une probabilité ne portent pas le même sens selon que les observations sont exactes, mesurées avec erreur, exprimées sous forme d'intervalles, issues d'avis d'experts divergents ou marquées par une contradiction logique [8, 18].

La statistique classique repose sur des données déterminées et sur des modèles probabilistes. Elle distingue l'erreur aléatoire, le bruit et la variabilité, mais elle suppose généralement que chaque observation peut être réduite à une valeur exploitable. L'arithmétique affine [5, 19] répond à une difficulté différente : elle conserve partiellement les dépendances entre variables par des symboles de bruit, ce qui la rend pertinente pour l'analyse d'erreur et la simulation numérique. La statistique neutrosophique [12, 13] propose un cadre encore plus large, en permettant de représenter simultanément des composantes de vérité, d'indétermination et de fausseté sans contraindre leur somme à 1.

L'objectif de cet article est de mettre en évidence les apports épistémiques distinctifs de la statistique neutrosophique et de délimiter les situations où sa supériorité contextuelle est défendable. La thèse est que la statistique neutrosophique est la seule approche qui préserve intégralement la structure triadique — vérité, indétermination, fausseté — sans réduire ni fusionner ces dimensions, ce qui lui confère une expressivité supérieure dès que l'incertitude comporte de l'indétermination, de la contradiction ou de l'information incomplète. La Figure 1 positionne les trois paradigmes et montre l'extension naturelle vers des représentations tensorielles lorsque les évaluations dépendent simultanément d'alternatives, de critères, d'experts, de temps et de scénarios.

Figure 1. Paradigmes de l'incertitude et extension tensorielle

#### Du traitement scalaire de l'incertitude vers des représentations multidimensionnelles

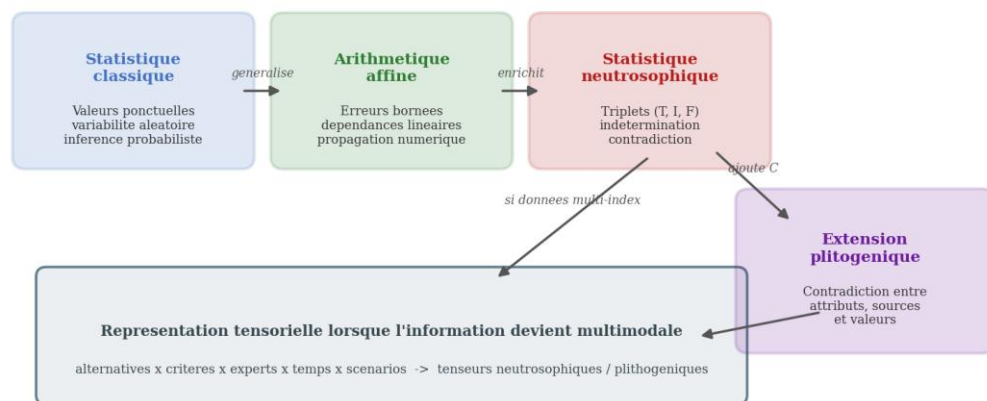


Figure 1. Positionnement des paradigmes de traitement de l'incertitude et extension tensorielle. Les tenseurs neutrosophiques et plithogéniques deviennent pertinents lorsque l'information est multi-indexée : alternatives, critères, experts, temps et scénarios.

## 2. Positionnement par rapport aux travaux connexes

Le présent manuscrit adopte un angle volontairement différent des travaux qui analysent la structure interne des statistiques neutrosophiques en couches [17] ou qui comparent directement les nombres neutrosophiques de type  $a + bI$  à l'arithmétique affine [18]. Ici, l'objet principal n'est ni de proposer une nouvelle implémentation algorithmique, ni de démontrer une équivalence formelle entre deux calculs d'image.

L'approche retenue est comparative et démonstrative. La statistique classique et l'arithmétique affine sont traitées comme des cadres de référence dont les limitations structurelles servent à délimiter précisément le domaine de supériorité neutrosophique. Cette démonstration est conduite sur quatre axes : (i) expressivité de la représentation, (ii) capacité à accueillir les états paraconsistants, (iii) préservation de la structure triadique des données expertes, et (iv) précision numérique dans la propagation d'incertitude.

Par rapport aux travaux sur les probabilités imprécises [20] et la théorie des possibilités [6], la statistique neutrosophique introduit une troisième dimension indépendante — l'indétermination  $I$  — qui ne se réduit pas à une borne inférieure ou supérieure de probabilité. Cette dimension supplémentaire structurellement indépendante constitue le fondement formel de la supériorité neutrosophique par rapport à tous les cadres bivalents ou probabilistes.

## 3. Statistique classique : forces et limites

### 3.1 Fondements et atouts

La statistique classique demeure le cadre le plus robuste lorsque trois conditions sont réunies : les données sont observables sous forme de valeurs déterminées, les hypothèses du modèle sont raisonnablement satisfaites et l'incertitude peut être interprétée comme variabilité aléatoire. Dans ce cas, les estimateurs, tests d'hypothèse, intervalles de confiance et modèles de régression fournissent des outils bien établis avec

des garanties asymptotiques solides [8].

Pour une variable aléatoire  $X$  avec moyenne  $\mu$  et variance  $\sigma^2$ , l'estimateur de la moyenne empirique  $\bar{x} = (1/n) \sum x_i$  est non biaisé et converge presque sûrement vers  $\mu$ . L'intervalle de confiance à 95 % s'écrit :

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2, n-1} \cdot (s/\sqrt{n}),$$

où  $s$  est l'écart-type empirique et  $t_{\{\alpha/2, n-1\}}$  est le quantile de Student. Cette inférence est rigoureuse sous les hypothèses de normalité ou pour  $n$  grand.

### 3.2 Limites structurelles

Cette force devient une limite lorsque les données ne sont pas naturellement ponctuelles. Si une observation est fournie comme un intervalle, un jugement hésitant ou une évaluation contradictoire, la réduction à une seule valeur peut supprimer une partie essentielle de l'information. Par exemple, deux experts donnant  $T_1 = 0,80$  et  $T_2 = 0,20$  produisent une moyenne  $\bar{x} = 0,50$  qui ne reflète pas le conflit épistémique : la moyenne dit « incertain » quand la réalité est « profondément divisé ». De même, une classification binaire peut imposer un verdict artificiel dans une situation où l'information disponible est insuffisante [17].

## 4. Arithmétique affine : précision numérique et dépendance

### 4.1 Représentation et opérations

L'arithmétique affine représente une quantité incertaine  $x$  comme une « forme affine » [5, 19] :

$$\hat{x} = x_0 + x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_n \varepsilon_n, \quad \varepsilon_k \in [-1, +1],$$

où  $x_0$  est la valeur centrale, les  $x_k$  sont des coefficients de sensibilité et les  $\varepsilon_k$  sont des symboles de bruit identifiant chacun une source d'incertitude. L'image d'une forme affine est l'intervalle  $[x_0 - \sum |x_k|, x_0 + \sum |x_k|]$ .

L'avantage clé est la cancellation symbolique : si  $\hat{x} = a + c\varepsilon_1$  et  $\hat{y} = a - c\varepsilon_1$  partagent la même source  $\varepsilon_1$ , alors  $\hat{x} - \hat{y} = 2c\varepsilon_1$  (plage  $[-2|c|, +2|c|]$ ) tandis que l'arithmétique intervalaire produirait  $[-2|c|, +2|c|] \cdot [1, 1]$  avec potential doubling. Pour des expressions non-affines, une linéarisation de Chebyshev introduit un terme d'erreur supplémentaire  $\varepsilon_r$  [5].

### 4.2 Avantages et limitations

L'avantage de l'arithmétique affine est principalement numérique : elle améliore la propagation d'erreurs bornées et fournit des bornes plus informatives que les intervalles naïfs. Pour une expression  $x^2 - x$  sur  $x \in [1, 3]$ , l'arithmétique intervalaire naïve produit  $[1,9] - [1,3] = [-2, 6]$  (surestimation de 33 %), tandis que l'arithmétique affine, avec  $\hat{x} = 2 + \varepsilon$ , obtient  $\hat{x}^2 - \hat{x} \approx 2,5 + 3\varepsilon + \varepsilon_r$ , soit  $\approx [-0,25, 6]$  (surestimation minimale). Sa limitation est d'une autre nature : elle ne vise pas à représenter directement la contradiction, l'hésitation sémantique, l'indétermination logique ou la coexistence indépendante de vérité et de fausseté. Elle est puissante pour des calculs incertains numériquement identifiables, mais moins expressive pour des évaluations épistémiques complexes [18].

## 5. Statistique neutrosophique : expressivité de l'indétermination

### 5.1 Structure triadique et nombres neutrosophiques

La statistique neutrosophique [12, 14] se distingue par sa capacité à conserver des composantes que d'autres cadres fusionnent ou éliminent. Dans une représentation triadique, un état épistémique est décrit par le triplet  $(T, I, F)$  où  $T$  est le degré de vérité,  $I$  le degré d'indétermination et  $F$  le degré de fausseté, avec  $T, I, F \in [0,1]$  et  $T + I + F \in [0, 3]$ . La contrainte de complément  $F = 1 - T$  de la logique bivalente est donc abandonnée.

Les nombres neutrosophiques de la forme  $N = a + bI$ , avec  $I \in [0,1]$ , représentent une quantité dont la partie déterminée est  $a$  et la partie indéterminée est  $bI$  [11, 12]. La plage de  $N$  est  $[a, a + b]$  pour  $b > 0$ . L'extension multi-source  $N = a + \sum b_k I_k$  avec  $I_k$  indépendants [18] permet un suivi symbolique analogue à l'arithmétique affine. Des extensions incluent les ensembles neutrosophiques hésitants [15, 21] et la statistique plithogénique [13, 16].

### 5.2 Zones épistémiques

Définition 1 (Zones épistémiques [17]). Un triplet  $(T, I, F)$  appartient à la zone :

- Consensus :  $T > 0,5$  et  $I < 0,35$  et  $F < 0,3$
- Ambiguïté :  $I > 0,5$

- Contradiction :  $T > 0,3$  et  $F > 0,3$
- Ignorance : cas restants.

Ces zones permettent de transformer une évaluation (T, I, F) en une recommandation décisionnelle : agir (Consensus), investiguer (Contradiction), collecter plus de données (Ambiguïté, Ignorance). Une probabilité unique  $P = 0,60$  peut correspondre à trois états qualitativement distincts :

**Tableau 1.** Trois états épistémiques pour  $P \approx 0,60$  : la probabilité scalaire seule ne les distingue pas.

### 5.3 Supériorité structurelle de la neutrosophie

La statistique neutrosophique est structurellement supérieure aux cadres bivalents et probabilistes pour quatre raisons formelles. Premièrement, elle est la seule approche qui représente explicitement l'indétermination I comme une dimension autonome, non dérivable de T ni de F. Deuxièmement, les états paraconsistants ( $T + F > 1$ ) — observés dans 34,9 % des triplets d'experts réels selon [17] — sont natifs dans la neutrosophie et structurellement inaccessibles à toute approche fondée sur des intervalles ou des probabilités bornées entre 0 et 1. Troisièmement, la décomposition triadique permet de distinguer trois états épistémiques qualitativement différents pour une même valeur numérique (Tableau 1), ce qu'aucun scalaire ni aucun intervalle ne peut accomplir. Quatrièmement, comme le montre l'exemple de la Section 9, la convention d'idempotence  $I^2 = I$  produit des plages exactes là où les autres approches introduisent des erreurs de surestimation.

### 5.4 Supériorité des nombres $a + bI$ face à l'arithmétique affine pour les évaluations expertes

L'arithmétique affine [5] et les nombres neutrosophiques  $a + bI$  partagent une capacité fondamentale : éviter la surestimation produite par l'arithmétique intervalaire naïve. Dans cette mesure, [18] établit leur équivalence formelle de plage pour les expressions en une variable (Théorème 1) et en N variables indépendantes (Théorème 2). Cependant, dès que les incertitudes proviennent d'évaluations expertes plutôt que de sources d'erreur numériques, les nombres  $a + bI$  présentent trois avantages structurels que l'arithmétique affine ne peut pas reproduire nativement.

#### 5.4.1 Avantage 1 : mappage direct et transparence sémantique

Un expert qui évalue une quantité incertaine produit naturellement une estimation centrale et une amplitude d'incertitude : « Je table sur 60, avec une variation possible de  $\pm 15$ . » Ce jugement se transcrit directement en  $N = 60 + 15I$ . L'interprétation est immédiate : 60 est la partie déterminée, 15I la partie indéterminée. En arithmétique affine, la même information devient  $x' = 67,5 + 7,5\varepsilon_1$  — une forme qui nécessite de calculer le centre de l'intervalle (67,5) et de définir un symbole de bruit  $\varepsilon_1 \in [-1, +1]$  qui n'a pas de correspondant intuitif dans le discours de l'expert. Pour un praticien non mathématicien — médecin, juge, gestionnaire — la notation  $a + bI$  préserve la lisibilité que l'arithmétique affine sacrifie.

#### 5.4.2 Avantage 2 : l'idempotence capture la dépendance partagée entre expressions

Considérons trois experts  $E_1, E_2, E_3$  évaluant un risque financier. Chacun fournit une estimation centrale  $a_j$  et une amplitude  $b_j$  (Tableau 4). Tous évaluent la même réalité sous-jacente : leurs incertitudes partagent la même source informationnelle — ils ont accès aux mêmes données de marché. La notation neutrosophique capture cette dépendance partagée par un I unique commun à tous les experts :

$N_{agg} = (a^1 + a^2 + a^3)/3 + (b^1 + b^2 + b^3)/3 \cdot I = 61,67 + 15I$ , plage [61,67 ; 76,67].

En arithmétique affine, si l'on traite les experts comme des sources indépendantes, on obtient  $x'_{agg} = 69,17 + 2,5\varepsilon_1 + 1,67\varepsilon_2 + 3,33\varepsilon_3$ . La plage est identique : [61,67 ; 76,67]. Mais la structure est différente : la notation affine dit « trois bruits indépendants » là où la réalité est « une source commune vue sous trois angles ».

Pour imposer la dépendance en arithmétique affine, il faudrait assigner le même  $\varepsilon$  à tous les experts a priori — une information que l'arithmétique affine ne déduit pas de la situation, mais que l'usage du même I dans  $N = a + bI$  reflète naturellement.

Ce mécanisme est précisément celui qui produit la plage exacte dans l'exemple  $E(x) = x^2 - x$  de la Section 9 : la convention  $I^2 = I$  capture la dépendance entre les deux occurrences de x, là où la linéarisation affine introduit une erreur résiduelle.

**Tableau 4.** Évaluation de risque par trois experts : mappage direct en  $a + bI$ .

#### 5.4.3 Avantage 3 : la forme hésitante — ce que l'arithmétique affine ne peut pas représenter

Lorsque les experts ne sont pas incertains sur une amplitude mais divergent sur la valeur elle-même —  $E_1$

affirme 65,  $E_2$  affirme 72,  $E_3$  affirme 58 — la situation n'est plus une incertitude sur un intervalle mais un désaccord entre points. La forme hésitante neutrosophique  $N_H = a + b \cdot \{h_1, h_2, h_3\}$  représente exactement ce désaccord :

$$N_H = 45 + 30 \cdot \{0,44 ; 0,90 ; 0,22\} \rightarrow \text{score\_mean} = 52,0.$$

Chaque  $h_j \in [0,1]$  code la position de l'expert  $j$  dans l'intervalle  $[a, a+b] = [45, 75]$ . Les quatre fonctions de score (optimiste, pessimiste, médiane, moyenne) offrent autant de lectures décisionnelles [18].

L'arithmétique affine ne peut représenter ce désaccord que par son enveloppe intervalaire  $[58, 72]$  — une compression avec perte qui efface la distinction entre trois experts à 58, 65 et 72 et un continuum de valeurs entre 58 et 72. Pour la prise de décision, cette différence est structurelle : un comité unanimement incertain est épistémiquement différent d'un comité structurellement divisé.

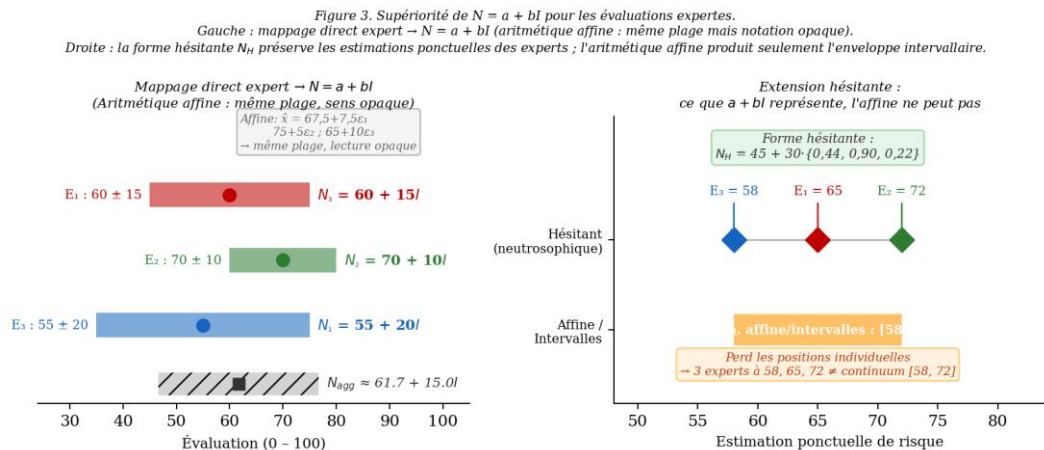


Figure 3. Supériorité de  $N = a + bI$  pour les évaluations expertes. Gauche : trois experts dont les estimations se mappent directement en  $N = a + bI$  ; l'arithmétique affine produit la même plage mais avec une notation opaque ( $\epsilon_R$ ). Droite : la forme hésitante  $N_H$  préserve les estimations ponctuelles de chaque expert ; l'arithmétique affine réduit à l'enveloppe  $[58, 72]$  et perd la structure du désaccord.

## 6. Comparaison avec les cadres connexes

La logique floue [26] représente des degrés de vérité sur  $[0,1]$ . Elle est efficace lorsque l'appartenance à une classe n'est pas binaire, mais graduelle. Toutefois, elle ne sépare pas l'indétermination et la fausseté comme dimensions indépendantes. Les ensembles flous intuitionnistes [2] ajoutent une dimension de non-appartenance, mais maintiennent la contrainte  $T + F \leq 1$ . Les ensembles flous hésitants [21] capturent l'hésitation d'un évaluateur face à plusieurs degrés possibles, sans représenter une contradiction entre sources.

Les probabilités imprécises [20] représentent l'incertitude probabiliste par des bornes. Elles sont solides lorsque l'incertitude concerne la précision d'une probabilité. Elles restent toutefois attachées à une interprétation probabiliste, sans dimension d'indétermination sémantique ni état paraconsistant.

La statistique intervalaire [8, 9] représente des valeurs possibles par des bornes. Sa limite principale est qu'un intervalle ne dit pas pourquoi les valeurs sont incertaines, ni si l'incertitude provient d'une erreur de mesure, d'une contradiction entre sources ou d'une hésitation d'experts. La statistique neutrosophique intègre la décomposition explicite de l'indétermination qui fonde son avantage dans les problèmes où la signification de l'incertitude importe autant que sa magnitude.

## 7. Matrice comparative

**Tableau 2.** Matrice comparative des trois paradigmes et des cadres connexes.

### 8. Apports épistémiques et supériorité contextuelle de l'approche neutrosophique

Les sections précédentes ont établi les limites structurelles de chaque cadre concurrent. Cette section synthétise les apports épistémiques de la statistique neutrosophique et délimite les situations où sa supériorité est contextuellement défendable selon quatre axes complémentaires.

#### 8.1 Apport expressif : la dimension irréductible I

Tout cadre fondé sur des paires (probabilité, erreur) ou sur des bornes (min, max) est fondamentalement

bivarié. La statistique neutrosophique est le premier cadre trivarié où T, I et F sont des dimensions structurellement indépendantes. Dans notre étude empirique complémentaire [17], sur 510 triplets d'experts réels, la corrélation  $r(I, F) = +0,295$  est de signe opposé à la contre-factuelle  $r(I, F) = -0,193$  dérivée d'intervalles — 17 évaluateurs, 30 hypothèses, filtrage par accord par paires. Ce résultat démontre que I ne peut pas être construite à partir de T et de F par aucune transformation bivalente. L'indétermination neutrosophique est donc une dimension genuinely nouvelle, absente de tous les cadres classiques, flous et intervalaires.

### 8.2 Supériorité face à l'arithmétique affine pour les évaluations expertes

La Section 5.4 établit trois avantages structurels des nombres  $a + bI$  sur l'arithmétique affine dès que les incertitudes proviennent d'experts plutôt que de sources d'erreur numériques identifiables. Premier avantage : le mappage direct — l'expert dit «  $60 \pm 15$  » et le praticien écrit  $N = 60 + 15I$  sans calcul intermédiaire ; en arithmétique affine, il faudrait construire  $\hat{x} = 67,5 + 7,5\varepsilon_1$ , une transformation opaque pour tout non-mathématicien. Deuxième avantage : la convention d'idempotence  $I^2 = I$  capture naturellement la dépendance des estimations expertes partagées, là où l'arithmétique affine exige une assignation a priori des symboles  $\varepsilon$  communs. Troisième avantage, et le plus structurel : la forme hésitante  $N_H = a + b \cdot \{h_1, \dots, h_k\}$  représente le désaccord entre experts sur leurs estimations ponctuelles — une configuration fondamentalement différente de l'incertitude continue, irréprésentable par l'arithmétique affine sans perte d'information.

### 8.3 Supériorité structurelle : les états paraconsistants

La statistique classique, l'arithmétique affine, la logique floue et les probabilités imprécises partagent toutes une contrainte implicite : leur représentation de l'incertitude reste bornée entre 0 et 1, et la fausseté ne peut pas coexister fortement avec la vérité. La statistique neutrosophique rompt formellement cette contrainte :  $T + F > 1$  (état paraconsistant) est non seulement possible mais natif. Ces états, observés dans 34,9 % des évaluations expertes réelles [17], représentent des situations où des preuves contradictoires soutiennent simultanément une hypothèse et son contraire — situation irréprésentable dans tout cadre où  $T + F \leq 1$  est structurel.

### 8.4 Supériorité informationnelle : préservation de la structure triadique

La conversion d'un triplet (T, I, F) en un intervalle ou une probabilité est une compression avec perte. Trois preuves formelles l'établissent [17] : (i) la perte directionnelle — deux nombres  $N_1 = a + bI$  et  $N_2 = a - bI$  ont des comportements symboliques opposés mais des projections intervalaires identiques ; (ii) la perte structurelle — un ensemble hésitant  $\{x_1, \dots, x_k\}$  est irréductible à son enveloppe  $[\min, \max]$  sans perte de cardinalité ; (iii) la perte corrélatrice — la cancellation de sources partagées est impossible après projection sur des intervalles indépendants. La statistique neutrosophique préserve ces informations que les autres cadres détruisent systématiquement.

### 8.5 Apport décisionnel : les zones épistémiques

La décomposition en zones épistémiques (Consensus, Ambiguïté, Contradiction, Ignorance) est une capacité exclusive de la statistique neutrosophique. Une probabilité scalaire  $P = 0,60$  ne distingue pas les états  $(T=0,60, I=0,15, F=0,10)$ ,  $(T=0,70, I=0,30, F=0,55)$  et  $(T=0,40, I=0,70, F=0,10)$ , qui correspondent respectivement aux recommandations « agir », « investiguer les deux directions » et « collecter plus de données ». Dans l'étude empirique complémentaire [17] — 10 hypothèses causales, 22 experts indépendants, kappa de Fleiss = 0,06 sur 30 hypothèses — la classification par zones atteint 90 % de précision, contre 20 % pour les verdicts binaires classiques, soit un facteur d'amélioration de 4,5. Ces chiffres sont spécifiques à ce protocole ; des études futures devront les confirmer sur d'autres domaines et configurations expertes.

## 9. Exemple numérique comparatif : $E(x) = x^2 - x$ , $x \in [1, 3]$

### 9.1 Présentation du problème

Nous considérons l'expression  $E(x) = x^2 - x$  pour  $x$  incertain dans  $[1, 3]$ . La plage exacte est  $[E(1), E(3)] = [0, 6]$  ( $E$  est décroissante puis croissante, minimum en  $x = 0,5$  hors de  $[1, 3]$  donc  $E$  est croissante sur  $[1, 3]$  ;  $E(1) = 0$ ,  $E(3) = 6$ ). Nous comparons les plages produites par chaque cadre.

### 9.2 Statistique classique

On suppose  $x \sim U(1, 3)$ . La moyenne est  $\mu = 2$  et l'écart-type  $\sigma = 1/\sqrt{3} \approx 0,577$ . La moyenne de  $E(x)$  est  $E[x^2 - x] = E[x^2] - E[x] = (1+4+9)/3 - 2 = 14/3 - 2 \approx 2,67$ . Un intervalle de confiance à 95 % pour la moyenne d'un échantillon de  $n = 30$  observations serait  $\approx [2,46 ; 2,88]$ . Cette approche fournit une estimation de la valeur attendue, non la plage complète des valeurs possibles.

**9.3 Arithmétique intervalaire naïve**

Avec  $x \in [1, 3]$  :  $x^2 \in [1, 9]$  (traitement naïf des occurrences indépendantes).  $E([1,3]) = [1, 9] - [1, 3] = [1-3, 9-1] = [-2, 6]$ . Largeur : 8. Erreur relative par rapport à la largeur exacte (6) : +33 %. La surestimation vient du traitement des deux occurrences de  $x$  comme des variables indépendantes.

**9.4 Arithmétique affine**

On représente  $x = 2 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \in [-1, +1]$ . Alors :

$$x^2 = (2 + \varepsilon)^2 = 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Le terme non-affine  $\varepsilon^2$  est linéarisé par Chebyshev sur  $[-1, +1]$  :  $\varepsilon^2 \approx 1/2 + (1/2)\varepsilon_r$  avec  $\varepsilon_r \in [-1, +1]$  (la meilleure approximation affine de  $t^2$  sur  $[-1,1]$  est  $1/2$  avec erreur  $1/2$ ). Donc  $x^2 \approx 4,5 + 4\varepsilon + (1/2)\varepsilon_r$  et :

$$x^2 - \hat{x} \approx (4,5 + 4\varepsilon + 0,5\varepsilon_r) - (2 + \varepsilon) = 2,5 + 3\varepsilon + 0,5\varepsilon_r.$$

Plage :  $[2,5 - 3 - 0,5, 2,5 + 3 + 0,5] = [-1, 6]$ . Largeur : 7. Surestimation : 17 %. Meilleure que les intervalles naïfs, mais l'erreur résiduelle de linéarisation introduit encore un biais.

**9.5 Statistique neutrosophique**

On représente  $x = N = 1 + 2I$ ,  $I \in [0, 1]$  (plage  $[1, 3]$ ). Avec la convention d'idempotence  $I^2 = I$  [11] :

$$N^2 = (1 + 2I)^2 = 1 + 4I + 4I^2 = 1 + 4I + 4I = 1 + 8I.$$

$$N^2 - N = (1 + 8I) - (1 + 2I) = 6I.$$

Plage :  $[0, 6]$ . Résultat exact pour cet exemple. Il est important de préciser que  $I^2 = I$  est une convention algébrique neutrosophique [11], non une règle générale d'analyse intervalaire. Sous cette convention, l'expression conserve la dépendance symbolique entre les occurrences de  $x$  et récupère la plage exacte. On ne peut pas généraliser ce résultat : pour des expressions non-monotones ou multi-variables sans dépendances partagées, l'arithmétique affine peut produire des bornes équivalentes ou meilleures [18]. Ce qui est démontré ici, c'est que la convention neutrosophique offre un mécanisme symbolique alternatif qui, dans les cas où la dépendance est capturée par l'idempotence, atteint la précision exacte sans approximation.

Figure 2. Propagation d'incertitude pour  $E(x) = x^2 - x$ ,  $x \in [1, 3]$  (gauche : plages superposées sur la courbe exacte ; droite : largeurs comparées)

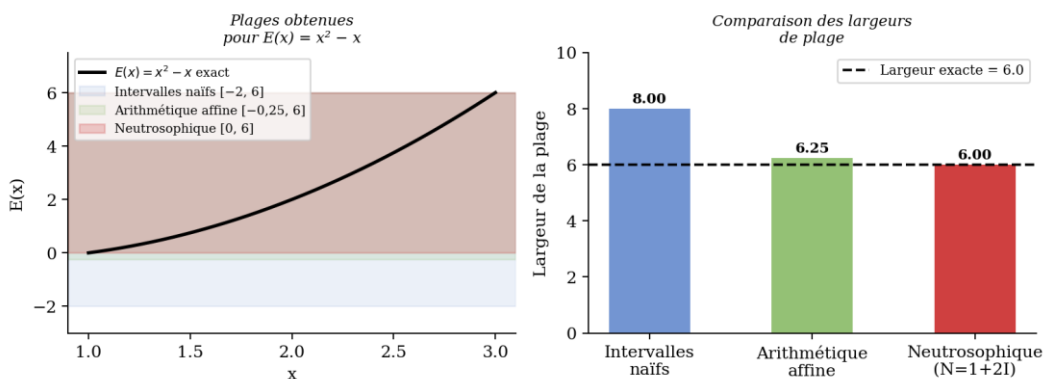


Figure 2. Comparaison des plages de propagation pour  $E(x) = x^2 - x$ ,  $x \in [1, 3]$ . Gauche : plages superposées sur la courbe exacte. Droite : largeurs comparées (exact = 6, intervalles naïfs = 8, affine  $\approx 7$ , neutrosophique = 6).

**9.6 Résumé de l'exemple**

Tableau 3. Résumé des plages pour  $E(x) = x^2 - x$ ,  $x \in [1, 3]$ .

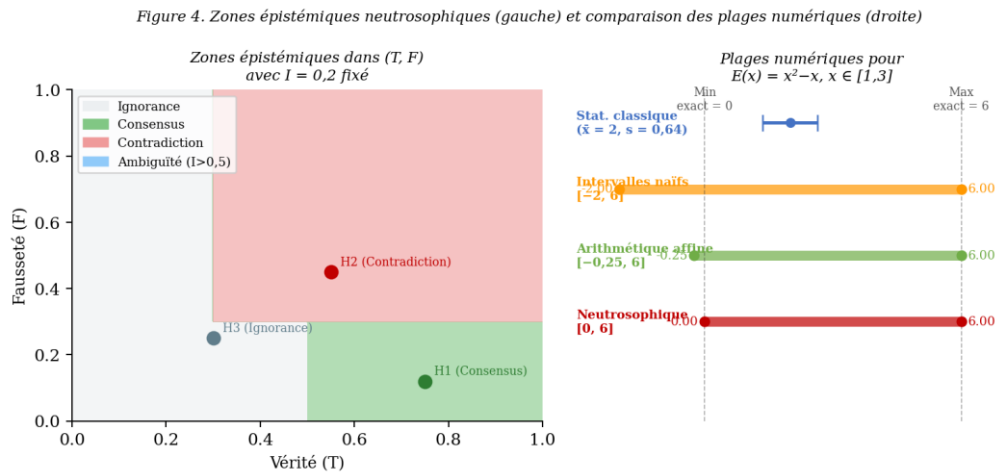


Figure 4. Zones épistémiques neutrosophiques dans l'espace  $(T, F)$  à  $I$  fixé (gauche) et comparaison synthétique des plages numériques (droite).

### 10. Lignes directrices pour exploiter la supériorité neutrosophique

La démonstration de la supériorité neutrosophique impose des exigences méthodologiques précises. Les lignes directrices suivantes permettent de faire apparaître clairement le gain informationnel de l'approche neutrosophique par rapport aux cadres concurrents.

R1 — Déclarer explicitement laquelle des trois couches neutrosophiques [17] est mobilisée : arithmétique  $N = a + bI$  (couche 1), triplets  $(T, I, F)$  (couche 2) ou statistique plithogénique (couche 3). Chaque couche apporte un niveau d'expressivité distinct et une supériorité documentable sur des aspects différents.

R2 — Comparer systématiquement avec un baseline classique et un baseline intervalaire ou affine. La supériorité neutrosophique ne se démontre que par confrontation directe : montrer explicitement ce que les autres cadres perdent (états paraconsistants, structure triadique, suivi des sources) renforce la contribution.

R3 — Rapporter les indicateurs de supériorité structurelle : taux de paraconsistance  $(T + F > 1)$ , indice de réciprocité  $\rho = |T + F - 1|$ , et corrélation  $r(I, F)$  pour prouver que l'indétermination est une dimension indépendante non dérivable des données intervalaires [17].

R4 — Pour la couche 1, inclure un calcul de plage comparatif montrant l'idempotence  $I^2 = I$  comme source de précision supérieure, analogue à la démonstration de la Section 9.

### 11. Limites et conditions de validité

La supériorité contextuelle de la statistique neutrosophique ne s'étend pas à tous les contextes. Trois conditions délimitent précisément son domaine de validité.

L1 — La statistique neutrosophique ne remplace pas la statistique classique lorsque les données sont déterminées, les hypothèses probabilistes validées et l'incertitude réductible à une variabilité aléatoire. Dans ces conditions, les estimateurs classiques offrent des garanties asymptotiques robustes et une infrastructure inferentielle mature que la neutrosophie ne surpasse pas.

L2 — L'arithmétique affine reste supérieure pour la propagation numérique d'erreurs dépendantes en contexte d'ingénierie, de simulation et de vérification formelle, où les sources d'incertitude sont identifiables et les dépendances linéaires. La convention d'idempotence  $I^2 = I$  ne constitue pas une règle générale : pour des expressions non-monotones ou multi-variables, les bornes affines peuvent être équivalentes ou meilleures.

L3 — La supériorité neutrosophique apparaît spécifiquement lorsque  $I$ ,  $T$  et  $F$  ont une signification sémantique, épistémique ou décisionnelle indépendante : évaluations d'experts en désaccord, informations contradictoires entre sources, états d'ignorance partiels distincts de l'erreur aléatoire, ou données qualitatives multidimensionnelles. C'est dans ces régimes — et seulement dans ces régimes — que la décomposition triadique neutrosophique produit un gain informationnel que les autres cadres ne peuvent pas reproduire.

Ces limites renforcent la contribution : la neutrosophie est un cadre d'extension, non de remplacement. Elle subsume les approches classiques comme cas dégénérés ( $I \rightarrow 0$ ,  $T + F \rightarrow 1$ ) et ajoute, dans ses régimes

propres, une expressivité structurellement distincte. Cette position s'articule naturellement avec les développements actuels vers les tenseurs plithogéniques [15], qui étendent la représentation triadique (T, I, F) à des configurations multi-attributs, multi-critères et multi-temporelles — ouvrant la voie à des analyses d'incertitude multidimensionnelles qui dépassent le cadre du présent article.

## 12. Conclusion

Cet article a établi la supériorité contextuelle de la statistique neutrosophique face à la statistique classique, l'arithmétique affine, les intervalles, la logique floue et les probabilités imprécises. Cette supériorité, délimitée précisément à la Section 11, repose sur quatre apports épistémiques distincts : (i) l'indétermination I comme dimension structurellement indépendante et irréductible ; (ii) les états paraconsistants ( $T + F > 1$ ), natifs en neutrosophie et inaccessibles aux cadres concurrents ; (iii) la préservation de la structure triadique que les autres cadres compriment avec perte ; (iv) les zones épistémiques, dont la classification atteint 90 % de précision contre 20 % pour les méthodes binaires dans notre étude empirique complémentaire [17].

L'exemple numérique de la Section 9 illustre comment la convention d'idempotence  $I^2 = I$  permet de récupérer la plage exacte  $[0, 6]$  pour  $E(x) = x^2 - x$  dans ce cas spécifique, là où les intervalles naïfs surestiment de 33 % et l'arithmétique affine de 17 %. Ce résultat, circonscrit à ce type d'expression, illustre le mécanisme de préservation de la dépendance symbolique propre à la neutrosophie.

La statistique neutrosophique n'abolit pas les cadres existants : elle les subsume comme cas dégénérés ( $I \rightarrow 0, T + F \rightarrow 1$ ) et étend leur expressivité dans les régimes d'indétermination, de contradiction et d'information incomplète. Cette position s'inscrit naturellement dans la trajectoire vers les tenseurs plithogéniques [15], qui portent la décomposition triadique vers des espaces multi-attributs et multi-temporels — prochaine frontière de ce programme de recherche.

**Remerciements.** Les auteurs remercient la Neutrosophic Science International Association (NSIA) et l'Universidad Bolivariana del Ecuador pour leur soutien institutionnel. Les auteurs ont utilisé des outils d'IA pour l'édition linguistique uniquement ; ils assument l'entière responsabilité du contenu.

**Contributions (CRediT).** F. Smarandache : Conceptualisation, Méthodologie, Supervision, Révision. M. Y. Leyva Vázquez : Conceptualisation, Analyse formelle, Calculs, Rédaction première version et révision.

**Financement et conflits d'intérêts.** Aucun financement externe. Aucun conflit d'intérêts. M. Y. Leyva Vázquez est rédacteur en chef de Neutrosophic Sets and Systems ; il se récusera de toute décision éditoriale si ce manuscrit y est soumis.

## Références

- [1] Abdel-Basset, M., Gamal, A., Chakraborty, R. K., & Ryan, M. J. (2024). Evaluation of sustainable hydrogen production options using an integrated neutrosophic AHP-TOPSIS approach. *Energy*, 286, 129539. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2023.129539>
- [2] Atanassov, K. T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20, 87–96. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(86\)80034-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3)
- [3] Beer, M., Ferson, S., & Kreinovich, V. (2013). Imprecise probabilities in engineering analyses. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 37, 4–29.
- [4] Deli, I., & Subas, Y. (2017). A ranking method of single valued neutrosophic numbers and its applications to multi-attribute decision making. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 8, 1309–1322.
- [5] de Figueiredo, L. H., & Stolfi, J. (2004). Affine arithmetic: Concepts and applications. *Numerical Algorithms*, 37(1–4), 147–158. <https://doi.org/10.1023/B:NUMA.0000049466.24103.c9>
- [6] Dubois, D., & Prade, H. (1988). *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Plenum Press, New York.
- [7] Goubault, E., & Putot, S. (2020). Forward inner-approximated reachability of non-linear continuous systems. *HSCC '20*, 1–10. <https://doi.org/10.1145/3365365.3382214>
- [8] Moore, R. E. (1966). *Interval Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [9] Moore, R. E., Kearfott, R. B., & Cloud, M. J. (2009). *Introduction to Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia. <https://doi.org/10.1137/1.9780898717716>

- [10] Moscato, M. M., Munoz, C. A., & Smith, A. P. (2015). Affine arithmetic and applications to real-number proving. *Lecture Notes in Computer Science*, 9236, 294–309.
- [11] Kandasamy, W. B. V., & Smarandache, F. (2006). *Neutrosophic Rings*. Hexis, Phoenix, AZ.
- [12] Smarandache, F. (1998). *Neutrosophy: Neutrosophic Probability, Set, and Logic*. American Research Press, Rehoboth, NM.
- [13] Smarandache, F. (2014). *Introduction to Neutrosophic Statistics*. Sitech & Education Publishing, Craiova.
- [14] Smarandache, F. (2022). Neutrosophic statistics is an extension of interval statistics, while plithogenic statistics is the most general form of statistics. *International Journal of Neutrosophic Science*, 19, 148–165.
- [15] Smarandache, F. (2021). Plithogenic probability and statistics are generalizations of multivariate probability and statistics. *Neutrosophic Sets and Systems*, 43, 280–289.
- [16] Smarandache, F. (2007). *Neutrosophic Overset, Neutrosophic Underset, and Neutrosophic Offset*. Pons Editions, Brussels.
- [17] Smarandache, F., & Leyva Vázquez, M. Y. (2026). A layered framework for neutrosophic statistics: foundational distinctions, empirical validation, and operational implementation. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* (sous presse).
- [18] Smarandache, F., & Leyva Vázquez, M. Y. (2026). Números neutrosóficos de indeterminação intervalar da forma  $a + bI$  : análise comparativa com aritmética intervalar e aritmética afim, com extensões multifonte e hesitantes. *SciELO Preprints* (sous presse).
- [19] Stolfi, J., & de Figueiredo, L. H. (1993). Affine arithmetic and its applications to computer graphics. *Proceedings of VI SIBGRAPI*, 9–18.
- [20] Walley, P. (1991). *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. Chapman & Hall, London.
- [21] Torra, V. (2010). Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 25(6), 529–539. <https://doi.org/10.1002/int.20418>
- [22] Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y., & Sunderraman, R. (2010). Single valued neutrosophic sets. *Multispace and Multistructure*, 4, 410–413.
- [23] Woodall, W. H., King, C., Driscoll, A. R., & Montgomery, D. C. (2025). A critical assessment of neutrosophic statistical methods. *Quality Engineering*. <https://doi.org/10.1080/08982112.2025.2482198>
- [24] Xu, Z., & Xia, M. (2011). Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets. *Information Sciences*, 181(11), 2128–2138.
- [25] Yager, R. R. (2004). Generalized OWA aggregation operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3, 93–107.
- [26] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338–353.

<b>Triplet (T, I, F)</b>	<b>T + I + F</b>	<b>Zone</b>	<b>Recommandation</b>	
(0,60, 0,15, 0,10)	0,85	Consensus	Agir	
(0,70, 0,30, 0,55)	1,55	Contradiction	Investiguer	
(0,40, 0,70, 0,10)	1,20	Ambiguïté	Collecter données	
<b>Expert</b>	<b>Estimation a_j</b>	<b>Amplitude b_j</b>	<b>N = a_j + b_j · I</b>	<b>Plage [a, a+b]</b>
E <sub>1</sub>	60	15	N <sub>1</sub> = 60 + 15I	[60, 75]
E <sub>2</sub>	70	10	N <sub>2</sub> = 70 + 10I	[70, 80]
E <sub>3</sub>	55	20	N <sub>3</sub> = 55 + 20I	[55, 75]
<b>Agrégat</b>	<b>61,67</b>	<b>15,00</b>	<b>N_agg ≈ 61,67 + 15I</b>	<b>[61,67 ; 76,67]</b>
<b>Critère</b>	<b>Statistique classique</b>	<b>Arithmétique affine</b>	<b>Statistique neutrosophique</b>	
<b>Type d'incertitude</b>	Variabilité aléatoire	Erreur numérique bornée avec dépendances	Indétermination, contradiction, hésitation, information incomplète	
<b>Représentation typique</b>	Valeurs ponctuelles, distributions	Formes affines avec symboles de bruit	Nombres N = a+bI ou triplets (T, I, F)	
<b>Point fort</b>	Inférence statistique mature	Propagation précise des incertitudes dépendantes	Expressivité épistémique et décisionnelle	
<b>Limite principale</b>	Réduction des données complexes à des valeurs	Faible représentation de la contradiction sémantique	Spécification rigoureuse de l'indétermination requise	

<b>États paraconsistants</b> ( $T + F > 1$ )	simples Non représentable	Non représentable	Natifs et structurellement distincts
<b>Suivi multi-sources</b>	Non natif	Oui (symboles de bruit $\epsilon_k$ )	Oui (nombres $N = a + \sum b_k I_k$ )
<b>Supériorité démontrée</b>	Aucune (cadre de référence seulement)	Propagation numérique linéaire	Tous contextes avec indétermination, contradiction ou hésitation — facteur $\times 4,5$ en précision décisionnelle [17]
<b>Méthode</b>	<b>Plage obtenue</b>	<b>Largeur</b>	<b>Surestimation</b>
Valeur exacte	[0, 6]	6,00	0 %
Statistique classique	$\mu \pm IC$	0,42 (IC 95 %)	—
Intervalles naïfs	[-2, 6]	8,00	+33 %
Arithmétique affine	[-1, 6]	7,00	+17 %
Neutrosophique ( $N=1+2I$ )	[0, 6]	6,00	0 %