NEUTROSOPHİC ÜÇLÜ G-METRİK UZAY

Murat YÜCEL

Editor: Prof. Dr. Memet ŞAHİN

2024

Murat YÜCEL

NEUTROSOPHİC ÜÇLÜ g-METRİK UZAY

NEUTROSOPHİC TRİPLET g-METRIC SPACES

Editor: Prof. Dr. Memet ŞAHİN

ÖNSÖZ

Bu kitap Prof. Dr. Memet ŞAHİN danışmanlığında Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde tamamlamış olduğum "NEUTROSOPHİC ÜÇLÜ g-METRİK UZAY" isimli yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

Çalışmanın hazırlanmasında tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Prof. Dr. Memet ŞAHİN´e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım. Örneklerin toplanmasında, izlenecek yol ve yöntemlerin belirlenmesinde desteklerini benden esirgemeyen değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Abdullah KARGIN 'a, arkadaşlarım Merve Sena UZ ve Azize DAYAN 'a çok teşekkür ederim.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim biricik annem ve tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Murat YÜCEL

Gaziantep, 2024

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mu_A(x)$	x'in A bulanık kümesine ait olma derecesidir
$\vartheta_A(x)$	x'in A sezgisel bulanık kümesine üyelik olmama derecesidir
$T_A(x)$	Nötrosofik kümenin doğruluk derecesidir
$I_A(x)$	Nötrosofik kümenin kararsızlık derecesidir
$I_A(x)$	Nötrosofik c kümenin yanlışlık derecesidir
etkisiz(x)	x'in kümedeki etkisizi
ters(x)	x'in kümedeki tersi
$\cup$	Birleşim işlemi
$\cap$	Kesişim işlemi
$\setminus$	Fark işlemi
$\times$	Kartezyen çarpım işlemi
$\subseteq$	Alt küme
d_N	Nötrosofik üçlü metrik
d_p	Nötrosofik üçlü kısmi metrik
(X, d)	Metrik uzay
(X, p)	Kısmi metrik uzay
(X, g)	g-metrik uzay
$(N,*)$	Nötrosofik üçlü küme

$((X,*), g)$	Nötrosofik üçlü g-metrik uzay
$((N,*), d_N)$	Nötrosofik üçlü metrik uzay
$((N,*), d_p)$	Nötrosofik üçlü kısmi metrik uzay
$((N,*), d_N)$	Tam uzay
$((N,*), d_p)$	Nötrosofik üçlü kısmi metrik uzay
$((N,*), d_N)$	Tam uzay

BÖLÜM I

GİRİŞ

Klasik kümelerde, bir nesnenin bir kümeye üye olması ve üye olmaması söz konusudur. İyi tanımlanmış kümelerde bir elemanın veya nesnenin üyelik derecesinin 1 veya 0 değerlerinden birini kullanarak evrensel küme üzerinden tanımlanan ve aradığımız özelliklere sahip elemanların oluşturduğu kümeyi belirtmektedir. Bu demek oluyor ki klasik kümelerde eleman kümeye ait ise 1, ait değilse 0 değerini alır ve bu değerler kesindir. Ancak bu durum günlük yaşamımızda her zaman kesin sonuçlar almamız için yeterli olmayabilir. Bu nedenle 1965 yılında Zadeh [5] bulanık mantık ve bulanık küme teorisini, tüm belirsizlik içeren durumları modelleyerek açıklamak için tanımlamıştır. Klasik kümelerde tanımlanan evrensel uzaydaki bir elamanın, verilen kümeye ait olma veya ait olmama durumu kesin olarak tanımlanırken, bulanık kümelerde bu geçiş kademeli olarak tanımlanmıştır. Çeşitli üyelik dereceleri, bulanık kümelerin sınırlarının kesin olmayan belirsizlik yapısından kaynaklanmıştır. Bulanık küme yapısı her elemanın üyelik derecesi [0, 1] aralığında bir değer almaktadır. Örneğin gidilecek olan bir yolun uzaklığını ifade ederken yakın, yürüyerek gidilebilir, uzak, çok uzak vb. gibi ifadelerle ve farklı üyelik dereceleri ile ifade edilir. Bulanık mantık günümüze kadar hemen hemen her alanda karar verme uygulamalarında kullanılan mantık türü olmuştur ancak üye olma dereceleri toplamları 1 olacak şekilde elde edilmektedir.

1986 yılında Atasanov [6] bulanık küme yapısında üyelik fonksiyonunun yanına, K evrensel kümesinin elemanlarını [0, 1] aralığına götüren bir ait olmama fonsiyonu ekleyerek sezgisel bulanık küme yapılarını tanımlamıştır.

Samarandache [1] 1998 yılında, sezgisel bulanık kümelerin yeterli olmağı durumlar için nötrosofik mantık ve nötrosofik kümeyi tanımlamıştır. Nötrosofik mantık ve nötrosofik kümelerde, üyelik derecesi T, belirsizlik derecesi I ve üyelik olmama tanımlanmıştır ve nötrosofik yapılar (T, I, F) formuna sahip olarak elde edilmiştir. Artık bir durum hem doğruluk değerine hem yanlışlık değerine hem de belirsizlik değerine göre ele alınmıştır. Bundan dolayı nötrosofik mantık ve nötrosofik küme yaşamımızdaki birçok belirsizliği açıklamamıza yardımcı olmuştur. Bu belirsizlik ile ilgili Şahin ve Kargın [26] tek değerli nötrosofik kümeler ile mesleki yeterliliklerde karar verme uygulamaları arasında yeni benzerlik ölçüsü, Şahin ve Kargın [27] nötrosofik üçlü metrik topoloji ve benzeri çalışmalar yapılmıştır.

Smarandache ve Ali 2016 yılında nötrosofik mantığın bir alt dalı olan nötrosofik üçlü küme ve nötrosofik üçlü grupları tanıttılar [2], [3]. Nötrosofik üçlü kümesi, klasik kümenin özel biçimidir, çünkü nötrosofik üçlü kümeler A'daki her "x" elemanı için, "x"in bir etkisizi ve "x"in bir tersi vardır. Ayrıca “x”in etkisizi de klasik etkisiz öğeden farklı olmalıdır. Bu nedenle, nötrosofik üçlü küme klasik kümeden farklıdır. Ayrıca, bir nötrosofik üçlü “x”, <x, etkisiz(x), ters(x)> ile gösterilir. Bundan dolayı nötrosofik alandaki bu yeni yapı klasik küme ve klasik yapılardan farklıdır. Ayrıca birçok araştırmacı nötrosofik üçlü yapılar üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalardan bazıları Şahin ve Kargın [9] nötrosofik üçlü iç çarpım uzayını elde ettiler, Smarandache ve ark. [10] nötrosofik üçlü G-modülünü elde ettiler, Şahin ve Kargın [11] nötrosofik üçlü b – metrik uzayı üzerinde çalışmışlar, Şahin ve ark. [12] nötrosofik üçlü kısmi metrik uzay için sabit nokta teoremi üzerinde çalıştılar, Şahin ve Kargın [13] nötrosofik üçlü v genelleştirilmiş metrik uzay kavramını elde ettiler, Şahin ve ark. [14] nötrosofik üçlü topolojiyi elde ettiler, Şahin ve Kargın [15] nötrosofik üçlü normlu halka uzayını elde ettiler, Smarandache ve Şahin [16] nötrosofik üçlü kısmi iç çarpım uzayını tanıttılar, Şahin ve Kargın [17] küme değerli nötrosofik dörtlü sayılara dayalı nötrosofik üçlü grupları elde ettiler, Şahin ve Kargın [18] nötrosofik üçlü kısmi v – genelleştirilmiş metrik uzayını üzerinde çalıştılar, Şahin ve Kargın [19] nötrosofik üçlü Lie cebir yapılarını tanıtmıştır.

Metrik uzaylar ve bu yapının birçok genellemesinde bir kümenin noktaları arasındaki mesafeleri hesaplamak için kullanılır. Bir metrik uzayda kümeler ve noktalar arasındaki mesafeler, bir dizinin yakınsaklığı veya bir fonksiyonun sürekliliği gibi temel kavramları inceler. Matthew 1944 yılında [21] kısmi metrik uzaylar üzerinde çalıştı. Kısmi metrik uzaylarda klasik metrik uzaydan farklı olacak şekilde bir elemanın kendisine olan uzaklığı sıfırdan farklı olabileceğinden klasik metrik uzayın genelleştirilmişidir.

Bu kitabın ikinci bölümünde, bulanık kümeler [5], sezgisel bulanık kümeler [6], nötrosofik kümeler [1] ve [4], nötrosofik üçlü kümeler [7], metrik uzay [23], nötrosofik üçlü metrik uzaylar [8], nötrosofik kısmi metrik uzay [12], g – metrik uzay [20], yakınsaklık [22], Cauchy dizisi [22] tanımlarına yer verildi ve bu tanımlarla ilgili bazı temel özellikler incelendi.

Üçüncü bölümde nötrosofik üçlü g - metrik uzayı tanımlayıp, temel özellikleri verildi. Nötrosofik üçlü g - metrik uzay tanımının daha anlaşılır olması için sayısal bazı örnekler verildi. Ayrıca nötrosofik üçlü g - metrik uzayların, klasik g - metrik uzaydan ve nötrosofik üçlü metrik uzaydan farklı olduğu gösterilmiştir. Dördüncü bölümde ise bu çalışmadan elde edilen sonuçlar verildi.

BÖLÜM II

GENEL BİLGİLER

2.1 Bulanık Küme

Tanım 2.1.1:[5] X boştan farklı bir küme olsun. X üzerinde K ile gösterilen ve $\mu_K(x)$: $X \to [0, 1]$ üyelik fonksiyonu ile bir bulanık küme

$$K = \{\langle x, \mu_K(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.2:[5] K_1 ile K_2 bulanık küme olsun. $X \neq \emptyset$ ve $K_1, K_2 \subseteq X$ olacak şekilde, K_1 fonksiyonunun üyelik değeri $\mu_{K_1}(x)$, K_2 fonksiyonunun üyelik değeri $\mu_{K_2}(x)$ olsun. $\forall x \in X$ için kapsama ve iki kümenin eşitliği;

$$K_1 \subseteq K_2 \Leftrightarrow \mu_{K_1}(x) \leq \mu_{K_2}(x)$$

$$K_1 = K_2 \Leftrightarrow K_1 \subseteq K_2 \text{ ve } K_2 \subseteq K_1$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.3:[5] $X \neq \emptyset$ ve $K \subseteq X$ olmak üzere K bulanık kümesinin tümleyeni K^c ile gösterilir. $\forall x \in X$ için,

$$\mu_{K^c}(x) = 1 - \mu_K(x)$$

olmak üzere K kümesinin tümleyeni;

$$K^c = \{\langle x, \mu_{K^c}(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.4:[5] $X \neq \emptyset$ ve $K_1, K_2 \subseteq X$ olup K_1 ile K_2 bulanık kümeleri olsun. $\forall x \in X$ için,

$$\mu_{K_1 \cup K_2}(x) = \max\{\mu_{K_1}(x), \mu_{K_2}(x)\}$$

olmak üzere K_1 ile K_2 nin birleşimi;

$$K_1 \cup K_2 = \{\langle x, \mu_{K_1 \cup K_2}(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.5:[5] $X \neq \emptyset$ ve $K_1, K_2 \subseteq X$ olup K_1 ile K_2 bulanık kümeleri olsun.

$\forall x \in X$ için,

$$\mu_{K_1 \cap K_2}(x) = \min\{\mu_{K_1}(x), \mu_{K_2}(x)\}$$

olmak üzere K_1 ile K_2 nin birleşimi;

$$K_1 \cap K_2 = \{\langle x, \mu_{K_1 \cap K_2}(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.6:[5] $X \neq \emptyset$ ve $K_1, K_2 \subseteq X$ olup K_1 ile K_2 bulanık kümeleri olsun. $\forall x \in E$ için,

$$\mu_{K_1 + K_2}(x) = \mu_{K_1}(x) + \mu_{K_2}(x) - \mu_{K_1}(x).\mu_{K_2}(x)$$

olmak üzere K_1 ile K_2 nin $K_1 + K_2$ ile gösterilen toplama işlemi;

$$K_1 + K_2 = \{\langle x, \mu_{K_1 + K_2}(x)\rangle : x \in E\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.7:[5] $X \neq \emptyset$ ve $K_1, K_2 \subseteq X$ olup K_1 ile K_2 bulanık kümeleri olsun. $\forall x \in E$ için,

$$\mu_{K_1 . K_2}(x) = \mu_{K_1}(x).\mu_{K_2}(x)$$

olmak üzere K_1 ile K_2 nin $K_1 . K_2$ ile gösterilen toplama işlemi;

$$K_1 . K_2 = \{\langle x, \mu_{K_1 . K_2}(x)\rangle : x \in E\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.2 Sezgisel Bulanık Küme

Tanım 2.2.1:[6] $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme olsun. $\forall x \in X$ için

$$0 \leq \mu_L(x) + \upsilon_L(x) \leq 1$$

olmak üzere $\mu_L: X \rightarrow [0, 1]$ ve $\upsilon_L: X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonları ile sezgisel bulanık küme

$$L = \{\langle x, \mu_L(x), \upsilon_L(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.2:[6] $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme olsun.

$$L = \{\langle x, \mu_L(x), \upsilon_L(x)\rangle : x \in X\}$$

kümesi bir sezgisel bulanık küme olmak üzere $\forall x \in X$ için $\pi_L(x)$ belirsizlik derecesi

$$\pi_L(x) = 1 - \mu_L(x) - \upsilon_L(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.3:[6] $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $L_1, L_2 \subseteq X$ kümeleri iki sezgisel bulanık küme olsun. L_1 ile L_2 kümelerinin sırasıyla üyelik fonksiyonları $\mu_{L_1}(x)$ ve $\mu_{L_2}(x)$, üyelik olmama fonksiyonları $\upsilon_{L_1}(x)$ ve $\upsilon_{L_2}(x)$ olsun. $\forall x \in X$ için iki küme eşitliği,

$$\mu_{L_1}(x) = \mu_{L_2}(x)$$

ve

$$\upsilon_{L_1}(x) = \upsilon_{L_2}(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.4:[6] $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $L_1, L_2 \subseteq X$ kümeleri iki sezgisel bulanık küme olsun. L_1 ile L_2 kümelerinin sırasıyla üyelik fonksiyonları $\mu_{L_1}(x)$ ve $\mu_{L_2}(x)$, üyelik olmama fonksiyonları $\upsilon_{L_1}(x)$ ve $\upsilon_{L_2}(x)$ olsun. $\forall x \in X$ için

$$L_1 \subseteq L_2$$

$$\mu_{L_1}(x) \leq \mu_{L_2}(x)$$

ve

$$\upsilon_{L_1}(x) \geq \upsilon_{L_2}(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.5:[6] $X \neq \emptyset$ ve $L \subseteq X$ olmak üzere L sezgisel bulanık kümesinin tümleyeni L^c ile gösterilir. $\forall x \in X$ için

$$\mu_{L^c} = \upsilon_L(x)$$

ve

$$\upsilon_{L^c} = \mu_L(x)$$

olmak üzere L kümesinin tümleyeni

$$L^C = \{\langle x, \mu_{L^c}(x), \upsilon_{L^c}(x)\rangle : x \in X\} = \{\langle x, \upsilon_L(x), \mu_L(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.6:[6] $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $L_1, L_2 \subseteq X$ olup L_1 ve L_2 sezgisel bulanık küme olsun. $\forall x \in X$ için,

$$\mu_{L_1 \cup L_2}(x) = \max\{\mu_{L_1}(x), \mu_{L_2}(x)\}$$

ve

$$\upsilon_{L_1 \cup L_2}(x) = \min\{\upsilon_{L_1}(x), \upsilon_{L_2}(x)\}$$

olmak üzere L_1 ile L_2 nin birleşimi;

$$L_1 \cup L_2 = \{\langle x, \mu_{L_1 \cup L_2}(x), \upsilon_{L_1 \cup L_2}(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.7:[6] $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $L_1, L_2 \subseteq X$ olup L_1 ve L_2 sezgisel bulanık küme olsun. $\forall x \in X$ için,

$$\mu_{L_1 \cap L_2}(x) = \max\{\mu_{L_1}(x), \mu_{L_2}(x)\}$$

ve

$$\upsilon_{L_1 \cap L_2}(x) = \min\{\upsilon_{L_1}(x), \upsilon_{L_2}(x)\}$$

olmak üzere L_1 ile L_2 nin kesişimi;

$$L_1 \cap L_2 = \{\langle x, \mu_{L_1 \cap L_2}(x), \upsilon_{L_1 \cap L_2}(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.8:[6] $X \neq \emptyset$ ve $L_1, L_2 \subseteq X$ olup L_1 ile L_2 sezgisel bulanık küme olsun. $\forall x \in E$ için L_1 ve L_2 nin toplaması $L_1 + L_2$ ile gösterilir ve

$$L_1 + L_2 = \{\langle x, \mu_{L_1}(x) + \mu_{L_2}(x) - \mu_{L_1}(x). \mu_{L_2}(x), \upsilon_{L_1}(x). \upsilon_{L_2}(x)\rangle : x \in E\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.9:[6] $X \neq \emptyset$ ve $L_1, L_2 \subseteq X$ olup L_1 ile L_2 sezgisel bulanık küme olsun. $\forall x \in E$ için L_1 ve L_2 nin çarpımı $L_1. L_2$ ile gösterilir ve

$$L_1. L_2 = \{\langle x, \mu_{L_1}(x). \mu_{L_2}(x), \upsilon_{L_1}(x) + \upsilon_{L_2}(x) - \upsilon_{L_1}(x). \upsilon_{L_2}(x)\rangle : x \in E\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.3 Nötrosofik Küme

Tanım 2.3.1:[1] X evrensel bir küme olsun. $\forall x \in X$ için,

$$0^- \leq T_A(x) + I_A(x) + F_A(x) \leq 3^+$$

olmak üzere

$$T_A : X \rightarrow]0^-, 1^+[$$

$$I_A : X \rightarrow]0^-, 1^+[$$

$$F_A : X \rightarrow]0^-, 1^+[$$

fonksiyonları ile X üzerinde bir A nötrosofik küme;

$$A = \{\langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x)\rangle : x \in X\}$$

ile tanımlanır.

Burada $T_A(x)$; $x \in X$ in A kümesindeki doğruluk derecesi,

$I_A(x)$; $x \in X$ in A kümesindeki belirsizlik derecesi,

$F_A(x)$; $x \in X$ in A kümesindeki yanlışlık derecesidir.

Tanım 2.3.2:[4] X evrensel bir küme olsun ve $A_1, A_2 \subseteq X$ olup A_1 ile A_2 nötrosofik küme olsun. $\forall x \in X$ için $A_1 \subseteq A_2$ olmak üzere

$$T_{A_1}(x) \leq T_{A_2}(x)$$

$$I_{A_1}(x) \geq I_{A_2}(x)$$

$$F_{A_1}(x) \geq F_{A_2}(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.3:[4] X evrensel bir küme ve A nötrosofik küme olsun.

$$T_{A^c}(x) = F_A(x)$$

$$I_{A^c}(x) = 1 - I_A(x)$$

$$F_{A^c}(x) = T_A(x)$$

olmak üzere A kümesinin tümleyeni;

$$A^c = \{\langle x, T_{A^c}(x), I_{A^c}(x), F_{A^c}(x) \rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.4:[4] X evrensel bir küme olsun ve $A_1, A_2 \subseteq X$ olup A_1 ile A_2 nötrosofik küme olsun. $\forall x \in X$ için iki küme eşitliği

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 \text{ ve } A_2 \subseteq A_1$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.5:[4] X evrensel bir küme olsun ve $A_1, A_2 \subseteq X$ olup A_1 ile A_2 nötrosofik küme olsun.

$$T_{A_1 \cup A_2}(x) = \max\{T_{A_1}(x), T_{A_2}(x)\}$$

$$I_{A_1 \cup A_2}(x) = \min\{I_{A_1}(x), I_{A_2}(x)\}$$

$$F_{A_1 \cup A_2}(x) = \min\{F_{A_1}(x), F_{A_2}(x)\}$$

olmak üzere A_1 ile A_2 nin birleşimi;

$$A_1 \cup A_2 = \{\langle x, T_{A_1 \cup A_2}(x), I_{A_1 \cup A_2}(x), F_{A_1 \cup A_2}(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.6:[4] X evrensel bir küme olsun ve $A_1, A_2 \subseteq X$ olup A_1 ile A_2 nötrosofik küme olsun.

$$T_{A_1 \cap A_2}(x) = \min\{T_{A_1}(x), T_{A_2}(x)\}$$

$$I_{A_1 \cap A_2}(x) = \max\{I_{A_1}(x), I_{A_2}(x)\}$$

$$F_{A_1 \cap A_2}(x) = \max\{F_{A_1}(x), F_{A_2}(x)\}$$

olmak üzere A_1 ile A_2 nin kesişimi;

$$A_1 \cap A_2 = \{\langle x, T_{A_1 \cap A_2}(x), I_{A_1 \cap A_2}(x), F_{A_1 \cap A_2}(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.7:[4] X evrensel bir küme olsun ve $A_1, A_2 \subseteq X$ olup A_1 ile A_2 nötrosofik küme olsun. $\forall x \in E$ için

$$T_{A_1 + A_2}(x) = T_{A_1}(x) + T_{A_2}(x) - T_{A_1}(x).T_{A_2}(x)$$

$$I_{A_1 + A_2}(x) = I_{A_1}(x).I_{A_2}(x)$$

$$F_{A_1 + A_2}(x) = F_{A_1}(x).F_{A_2}(x)$$

olmak üzere A_1 ile A_2 nin $A_1 + A_2$ ile gösterilen toplama işlemi;

$$A_1 + A_2 = \{\langle x, T_{A_1 + A_2}(x), I_{A_1 + A_2}(x), F_{A_1 + A_2}(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.8:[4] $\forall x \in E$ ve $A_1, A_2 \subseteq X$ için A_1 ve A_2 nötrosofik kümleri verilmiş olsun.

$$T_{A_1.A_2}(x) = T_{A_1}(x).T_{A_2}(x)$$

$$I_{A_1.A_2}(x) = I_{A_1}(x) + I_{A_2}(x) - I_{A_1}(x).I_{A_2}(x)$$

$$F_{A_1.A_2}(x) = F_{A_1}(x) + F_{A_2}(x) - F_{A_1}(x).F_{A_2}(x)$$

olmak üzere A_1 ile A_2 nin $A_1.A_2$ ile gösterilen çarpma işlemi;

$$A_1.A_2 = \left\{\langle x, T_{A_1.A_2}(x), I_{A_1.A_2}(x), F_{A_1.A_2}(x)\rangle : x \in X\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.4 Nötrosofik Üçlü Küme

Tanım 2.4.1:[6] N herhangi bir küme ve $*$ bir ikili işlem olsun. Eğer N kümesi aşağıdaki şartları sağlarsa $(N,*)$ kümesine bir nötrosofik üçlü küme denir.

1) Her $x \in N$ için $x *$ etkisiz(x) = etkisiz$(x) * x = x$ olacak şekilde bir etkisiz(x) elemanı vardır.

2) Her $x \in N$ için $x *$ ters(x) = ters$(x) * x$ = etkisiz(x) olacak şekilde bir ters(x) elemanı vardır.

Ayrıca bir $x \in N$ nötrosofik üçlüsü (x, etkisiz(x), ters(x)) şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.2:[8] $(N,*)$ bir nötrosofik üçlü küme olsun. Eğer $d_N: N \times N \to R^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu ve $(N,*)$ kümesi aşağıdaki şartları sağlarsa d_N fonksiyonu bir nötrosofik üçlü metriktir.

a) Her $x, y \in N$ için $x * y \in N$,

b) $d_N(x, y) \geq 0$,

c) $x = y \Rightarrow d_N(x, y) = 0$,

d) $d_N(x, y) = d_N(y, x)$,

e) Eğer her bir $x, z \in N$ eleman çifti için

$d_N(x,z) \leq d_N(x, z *\text{etkisiz}(y))$ olacak şekilde en az bir $y \in N$ elemanı varsa,

$d_N(x, z * etkisiz(y)) \leq d_N(x,y) + d_N(y,z)$ dir.

Ayrıca, $\big((N,*), d_N\big)$ bir nötrosofik üçlü metrik uzaydır.

Tanım 2.4.3:[8] $\big((N,*), d_N\big)$ bir nötrosofik üçlü metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $d_n\big(x, (x_n)\big) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ mevcutsa (x_n), x e yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$ ya da $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.4:[8] $\big((\mathrm{N},*), \mathrm{d_N}\big)$ bir nötrosofik üçlü metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\mathrm{n}, \mathrm{m} > \mathrm{n_0}$ olduğunda $\mathrm{d_n}\big(\mathrm{x}, (x_m), (x_n)\big) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ mevcutsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.4.5:[8] $\big((N,*), d_N\big)$ bir nötrosofik üçlü metrik uzay olsun. Eğer bu uzaydaki her (x_n) Cauchy dizisi yakınsak ise $\big((N,*), d_N\big)$ uzayına tam uzay denir.

Tanım 2.4.6:[8] $(N,*)$bir nötrosofik üçlü küme olsun. Eğer $d_p: N \times N \to R^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, d_p bir nötrosofik üçlü kısmi metriktir.

a) Her $x, y \in N$ için $x * y \in N$

b) $d_p(x,y) \geq d_p(x,x) \geq 0$,

c) Eğer $d_p(x,y) = d_p(x,x) = d_p(y,y) = 0$ ise $x = y$ olacak şekilde en az bir $x, y \in N$ öğesi vardır,

d) $d_p(x,y) = d_p(y,x)$,

e) Her bir $x, z \in N$ çifti için

$$d_p(x,z) \leq d_p(x, z *\text{etkisiz}(y))$$

olacak şekilde en az bir $y \in N$ elemanı varsa, o zaman

$$d_p(x, z *\text{etkisiz}(y)) \leq d_p(x,y) + d_p(y,z) - d_p(y,y).$$

bu durumda $\big((N,*), d_p\big)$ nötrosofik üçlü kısmi metrik uzay olarak adlandırılır.

2.5 Metrik Uzay

Tanım 2.5.1:[24] X boştan farklı bir küme olmak üzere,

$d_1)$ $d(x,y) \geq 0$,

$d_2)$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

$d_3)$ $\forall x,y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$,

$d_4)$ $\forall x,y,z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

koşullarını sağlayan $d: X \times X \to R^+ \cup \{0\}$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 2.5.2:[21] X boştan farklı bir küme ve $p: X \times X \to R^+ \cup \{0\}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x,y,z \in X$ için

$p_1)$ $x = y \Leftrightarrow p(x,x) = p(x,y)$,

$p_2)$ $p(x,x) \leq p(x,y)$,

$p_3)$ $p(x,y) = p(y,x)$,

$p_4)$ $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$

şartları sağlanırsa (X,p) ikilisine kısmi metrik uzay denir.

2.6 g-Metrik Uzay

Tanım 2.6.1: [23] X boş olmayan bir küme olsun. Eğer $\mathrm{g}: X \times X \times X \to R^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyor ise bir g-metrikdir.

i) Eğer $x = y = z$ ise, $\mathrm{g}(x,y,z) = 0$,

ii) Eğer $x \neq y$ ise, $\mathrm{g}(x,y,z) > 0$,

iii) Eğer $z \neq y$ ise, $\mathrm{g}(x,x,y) \leq \mathrm{g}(x,y,z)$,

iv) $\mathrm{g}(x,y,z) = \mathrm{g}(x,z,y) = \mathrm{g}(y,z,x) = \mathrm{g}(y,x,z) = \mathrm{g}(z,x,y) = \mathrm{g}(z,y,x)$, her $x,y,z \in X$,

v) Her $x,y,z,a \in X$ için $\mathrm{g}(x,y,z) \leq \mathrm{g}(x,a,a) + \mathrm{g}(a,y,z)$, Ayrıca, (X, g) ikilisine g-metrik uzay denir.

Tanım 2.6.2: [20] (X, g) bir g – metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Bir $x \in X$ noktasının (x_n) dizisinin limiti, eğer $\lim_{n,m \to \infty} g(x, x_n, x_m) = 0$ ve (x_n)' e g – x e yakınsak denir.

Tanım 2.6.3: [20] (X, g) bir g – metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n,m,l \to \infty} g(x_n, x_m, x_l) = 0$ ise (x_n), g – Cauchy dizisi olarak adlandırılır.

BÖLÜM III

3.1.Nötrosofik Üçlü g – Metrik Uzay

Tanım 3.1.1: $(X,*)$ bir nötrosofik üçlü küme olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa g: $X \times X \times X \rightarrow R^{+} \cup \{0\}$ bir nötrosofik üçlü g-metrik denir.

a) $\forall x, y \in X$; $x * y \in X$,

b) $x = y = z$ ise, $g(x, y, z) = 0$,

c) $x \neq y$ ise, $g(x, y, z) > 0$,

d) $z \neq y$ ise, $g(x, x, y) \leq g(x, y, z)$,

e) Her $x, y, z \in X$ için,

$$g(x,y,z) = g(x,z,y) = g(y,x,z) = g(y,z,x) = g(z,x,y) = g(z,y,x)$$

f) Her x, y, z elemanı için

$$g(x,y,z) \leq g(x * etkisiz(a), y * etkisiz(a), z * etkisiz(a))$$

olacak şekilde en az bir $a \in X$ öğesi varsa,

$$g(x * etkisiz(a), y * etkisiz(a), z * etkisiz(a)) \leq g(x,a,a) + g(a,y,z).$$

Ayrıca $\big((X,*), g\big)$ ikilisi nötrosofik üçlü g-metrik uzay olarak adlandırılır.

Sonuç 3.1.2: Tanım 3.1.1 ve Tanım 2.4.2 den bir nötrosofik üçlü g-metrik uzay, bir g-metrik uzaydan farklıdır. Çünkü Tanım 2.6.1 de $*$ işlemi yok ve bu tanımlardaki üçgen eşitsizlikleri farklıdır.

Sonuç 3.1.3: Tanım 3.1.1 ve Tanım 2.4.2 den bir nötrosofik üçlü g-metrik uzay ve bir nötrosofik üçlü metrik uzay da üçgen eşitsizliği koşulları verilen tanımlarda birbirinden farklıdır.

Örnek 3.1.4: $X = \{0, 4, 9, 10, 16\}$ küme olsun. $(X,*)$ 'nin Z_{18} ‘de bir nötrosofik üçlü küme olduğunu gösterelim.

Ayrıca

$etkisiz(0) = 0,\ ters(0) = 0\ ;\ etkisiz(4) = 10,\ ters(4) = 16\ ;\ etkisiz(9) = 9,$ $ters(9) = 9\ ;\ etkisiz(10) = 10,\ ters(10) = 10\ ;\ etkisiz(16) = 16,\ ters(16) =$ 16 elde edilir.

Böylece, $(X,*)$ bir nötrosofik üçlü kümedir ve nötrosofik üçlüler $(0, 0, 0)$, $(4, 10, 16)$, $(9, 9, 9)$, $(10, 10, 10)$ ve $(16, 16, 16)$.

Şimdi g: $X \times X \times X \to R^{+} \cup \{0\}$ fonksiyonu

$$g(x, y, z) = \begin{cases} 1 + |2^x - 2^y| + |2^x - 2^z| + |2^y - 2^z| & ;aksi\ halde \\ |2^x - 2^y| + |2^x - 2^z| + |2^y - 2^z| & ;eğer\ x{=}y{=}z \end{cases}$$

g nin bir nötrosofik üçlü g-metrik olduğunu gösterelim.

a) Tablo 1'den $\forall x, y \in X$ için; $x * y \in X$.

Tablo 1: Z_{18} altında ”*” ikili oparatör

.	0	4	9	10	16
0	0	0	0	0	0
4	0	16	0	4	10
9	0	0	0	0	0
10	0	4	0	10	16
16	0	10	0	16	4

b) Eğer $x = y = z$ ise,

$$\mathrm{g}(x, y, z) = |2^x - 2^y| + |2^x - 2^z| + |2^y - 2^z| =$$

$$|2^x - 2^x| + |2^x - 2^x| + |2^x - 2^x| = 0$$

c) $x \neq y$ ise,

$$g(x,y,z) = 1 + |2^x - 2^y| + |2^x - 2^z| + |2^y - 2^z| > 0$$

d) $g(x,x,y) = |2^x - 2^x| + |2^x - 2^y| + |2^x - 2^y| = 2.|2^x - 2^y|$

olduğu açıktır. böylece,

$$g(x,x,y) = 2.|2^x - 2^y| \leq 1 + |2^x - 2^y| + |2^x - 2^z| + |2^y - 2^z|.$$

çünkü;

$$|2^x - 2^y| \leq |2^x - 2^z| + |2^y - 2^z|.$$

e) Mutlak değer fonksiyonundan açıkca görülüyor ki

$$g(x,y,z) = g(x,z,y) = g(y,x,z) = g(y,z,x) = g(z,x,y) = g(z,y,x),$$

her $x, y, z \in X$ için.

f) $x = 0$, $y = 4$, $z = 10$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$

için;

$$g(0,4,10) \leq g(0*10, 4*10, 10*10) = g(0,4,10)$$

olduğundan,

$$g(0,4,10) \leq g(0,10,10) + g(10,4,10)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 10$, $z = 4$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(0,10,4) \leq g(0*10, 10*10, 4*10) = g(0,10,4)$$

olduğundan,

$$g(0,10,4) \leq g(0,10,10) + g(10,10,4)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 0$, $z = 4$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(10,0,4) \leq g(10*10, 0*10, 4*10) = g(10,0,4)$$

olduğundan,

$$g(10,0,4) \leq g(10,10,10) + g(10,0,4)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 4$, $z = 0$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(10,4,0) \leq g(10*10, 4*10, 0*10) = g(10,4,0)$$

olduğundan,

$$g(10,0,4) \leq g(10,10,10) + g(10,0,4)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 4$, $z = 0$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(10,4,0) \leq g(10*10, 4*10, 0*10) = g(10,4,0)$$

olduğundan,

$$g(10,4,0) \leq g(10,10,10) + g(10,4,0)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 4$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(0,4,16) \leq g(0*10, 4*10, 16*10) = g(0,4,16)$$

olduğundan,

$$g(0,4,16) \leq g(0,10,10) + g(10,4,16)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 16$, $z = 4$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(0,16,4) \leq g(0*10, 16*10, 4*10) = g(0,16,4)$$

olduğundan,

$$g(0,16,4) \leq g(0,10,10) + g(10,16,4)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 16$, $z = 0$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(4,16,0) \leq g(4*10,16*10,0*10) = g(4,16,0)$$

olduğundan,

$$g(4,16,0) \leq g(4,10,10) + g(10,16,0)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 4$, $z = 0$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16,4,0) \leq g(16*10,4*10,0*10) = g(16,4,0)$$

olduğundan,

$$g(16,4,0) \leq g(16,10,10) + g(10,4,0)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 10$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(0,10,16) \leq g(0*10,10*10,16*10) = g(0,10,16)$$

olduğundan,

$$g(0,10,16) \leq g(0,10,10) + g(10,10,16)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 16$, $z = 10$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(0,16,10) \leq g(0*10,16*10,10*10) = g(0,16,10)$$

olduğundan,

$$g(0,16,10) \leq g(0,10,10) + g(10,16,10)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 0$, $z = 10$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16,0,10) \leq g(16*10,0*10,10*10) = g(16,0,10)$$

olduğundan,

$$g(16,0,10) \leq g(16,10,10) + g(10,0,10)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 10$, $z = 0$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16, 10, 0) \leq g(16 * 10, 10 * 10, 0 * 10) = g(16, 10, 0)$$

olduğundan,

$$g(16, 10, 0) \leq g(16, 10, 10) + g(10, 10, 0)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 0$, $z = 4$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(0, 0, 4) \leq g(0 * 10, 0 * 10, 4 * 10) = g(0, 0, 4)$$

olduğundan,

$$g(0, 0, 4) \leq g(0, 10, 10) + g(10, 0, 4)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 4$, $z = 0$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(0, 4, 0) \leq g(0 * 10, 4 * 10, 0 * 10) = g(0, 4, 0)$$

olduğundan,

$$g(0, 4, 0) \leq g(0, 10, 10) + g(10, 4, 0)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 0$, $z = 0$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(4, 0, 0) \leq g(4 * 10, 0 * 10, 0 * 10) = g(4, 0, 0)$$

olduğundan,

$$g(4, 0, 0) \leq g(4, 10, 10) + g(10, 0, 0)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 0$, $z = 10$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(0, 0, 10) \leq g(0 * 16, 0 * 16, 10 * 16) = g(0, 0, 16)$$

olduğundan,

$$g(0,0,16) \leq g(0,16,16) + g(16,0,16)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 10$, $z = 0, a = 16, nötr(a) = 16$ için;

$$\mathrm{g}(0,10,0) \leq \mathrm{g}(0 * 16, 10 * 16, 0 * 16) = \mathrm{g}(0,16,0)$$

olduğundan,

$$\mathrm{g}(0,16,0) \leq \mathrm{g}(0,16,16) + \mathrm{g}(16,16,0)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 0$, $z = 0$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(10,0,0) \leq g(10 * 16, 0 * 16, 0 * 16) = g(10,0,0)$$

olduğundan,

$$g(10,0,0) \leq g(10,16,16) + g(16,0,0)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 0$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(0,0,16) \leq g(0 * 10, 0 * 10, 16 * 10) = g(0,0,16)$$

olduğundan,

$$g(0,0,16) \leq g(0,10,10) + g(10,0,16)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 16$, $z = 0$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(0,16,0) \leq g(0 * 10, 16 * 10, 0 * 10) = g(0,16,0)$$

olduğundan,

$$g(0,16,0) \leq g(0,10,10) + g(10,16,0)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 0$, $z = 0$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16, 0, 0) \leq g(16 * 10, 0 * 10, 0 * 10) = g(16, 0, 0)$$

olduğundan,

$$g(16, 0, 0) \leq g(16, 10, 10) + g(10, 0, 0)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 10$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(4, 10, 16) \leq g(4 * 10, 10 * 10, 16 * 10) = g(4, 10, 16)$$

olduğundan,

$$g(4, 10, 16) \leq g(4, 10, 10) + g(10, 10, 16)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 16$, $z = 10$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(4, 16, 10) \leq g(4 * 10, 16 * 10, 10 * 10) = g(4, 16, 10)$$

olduğundan,

$$g(4, 16, 10) \leq g(4, 10, 10) + g(10, 16, 10)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 4$, $z = 10$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16, 4, 10) \leq g(16 * 10, 4 * 10, 10 * 10) = g(16, 4, 10)$$

olduğundan,

$$g(16, 4, 10) \leq g(16, 10, 10) + g(10, 4, 10)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 10$, $z = 4$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16, 10, 4) \leq g(16 * 10, 10 * 10, 4 * 10) = g(16, 10, 4)$$

olduğundan,

$$g(16,10,4) \leq g(16,10,10) + g(10,10,4)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 4$, $z = 0$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(4,4,0) \leq g(4 * 16, 4 * 16, 0 * 16) = g(4,4,0)$$

olduğundan,

$$g(4,4,0) \leq g(4,16,16) + g(16,4,0)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 0$, $z = 4$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(4,0,4) \leq g(4 * 16, 0 * 16, 4 * 16) = g(4,0,4)$$

olduğundan,

$$g(4,0,4) \leq g(4,16,16) + g(16,0,4)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 4$, $z = 4$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(0,4,4) \leq g(0 * 16, 4 * 16, 4 * 16) = g(0,4,4)$$

olduğundan,

$$g(0,4,4) \leq g(0,16,16) + g(16,4,4)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 4$, $z = 10$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(4,4,10) \leq g(4 * 16, 4 * 16, 10 * 16) = g(4,4,10)$$

olduğundan,

$$g(4,4,10) \leq g(4,16,16) + g(16,4,10)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 10$, $z = 4$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(4,10,4) \leq g(4 * 16, 10 * 16, 4 * 16) = g(4,10,4)$$

olduğundan,

$$g(4,10,4) \leq g(4,16,16) + g(16,10,4)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 4$, $z = 4$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(10,4,4) \leq g(10 * 16, 4 * 16, 4 * 16) = g(10,4,4)$$

olduğundan,

$$g(10,4,4) \leq g(10,16,16) + g(16,4,4)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 4$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(4,4,16) \leq g(4 * 10, 4 * 10, 16 * 10) = g(4,4,16)$$

olduğundan,

$$g(4,4,16) \leq g(4,10,10) + g(10,4,16)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 16$, $z = 4$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(4,16,4) \leq g(4 * 10, 16 * 10, 4 * 10) = g(4,16,4)$$

olduğundan,

$$g(4,16,4) \leq g(4,10,10) + g(10,16,4)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 4$, $z = 4$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16,4,4) \leq g(16 * 10, 4 * 10, 4 * 10) = g(16,4,4)$$

olduğundan,

$$g(16,4,4) \leq g(16,10,10) + g(10,4,4)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 10$, $z = 0$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(10,10,0) \leq g(10*10,10*10,0*10) = g(10,10,0)$$

olduğundan,

$$g(10,10,0) \leq g(10,10,10) + g(10,10,0)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 0$, $z = 10$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(10,0,10) \leq g(10*10,0*10,10*10) = g(10,0,10)$$

olduğundan,

$$g(10,0,10) \leq g(10,10,10) + g(10,0,10)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 10$, $z = 10$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(0,10,10) \leq g(0*10,10*10,10*10) = g(0,10,10)$$

olduğundan,

$$g(0,10,10) \leq g(0,10,10) + g(10,10,10)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 10$, $z = 4$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(10,10,4) \leq g(10*16,10*16,4*16) = g(10,10,4)$$

olduğundan,

$$g(10,10,4) \leq g(10,16,16) + g(16,10,4)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 4$, $z = 10$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(10, 4, 10) \leq g(10 * 16, 4 * 16, 10 * 16) = g(10,4, 10)$$

olduğundan,

$$g(10, 4, 10) \leq g(10, 16, 16) + g(16, 4, 10)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 10$, $z = 10$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(4, 10, 10) \leq g(4 * 16, 10 * 16, 10 * 16) = g(4, 10, 10)$$

olduğundan,

$$g(4, 10, 10) \leq g(4, 16, 16) + g(16, 10, 10)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 10$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(10, 10, 16) \leq g(10 * 10, 10 * 10, 16 * 10) = g(10, 10, 16)$$

olduğundan,

$$g(10, 10, 16) \leq g(10, 10, 10) + g(10, 10, 16)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 16$, $z = 10$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(10, 16, 10) \leq g(10 * 10, 16 * 10, 10 * 10) = g(10, 16, 10)$$

olduğundan,

$$g(10, 16, 10) \leq g(10, 10, 10) + g(10, 16, 10)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 10$, $z = 10$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16, 10, 10) \leq g(16 * 10, 10 * 10, 10 * 10) = g(16, 10, 10)$$

olduğundan,

$$g(16, 10, 10) \leq g(16, 10, 10) + g(10, 10, 10)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 16$, $z = 0$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16, 16, 0) \leq g(16 * 10, 16 * 10, 0 * 10) = g(16, 16, 0)$$

olduğundan,

$$g(16, 16, 0) \leq g(16, 10, 10) + g(10, 16, 0)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 0$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16, 0, 16) \leq g(16 * 10, 0 * 10, 16 * 10) = g(16, 0, 16)$$

olduğundan,

$$g(16, 0, 16) \leq g(16, 10, 10) + g(10, 0, 16)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 16$, $z = 0$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16, 16, 0) \leq g(16 * 10, 16 * 10, 0 * 10) = g(16, 16, 0)$$

olduğundan,

$$g(16, 16, 0) \leq g(16, 10, 10) + g(10, 16, 0)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 16$, $z = 4$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16, 16, 4) \leq g(16 * 10, 16 * 10, 4 * 10) = g(16, 16, 4)$$

olduğundan,

$$g(16, 16, 4) \leq g(16, 10, 10) + g(10, 16, 4)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 4$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16, 4, 16) \leq g(16 * 10, 4 * 10, 16 * 10) = g(16, 4, 16)$$

olduğundan,

$$g(16,4,16) \leq g(16,10,10) + g(10,4,16)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 16$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(4,16,16) \leq g(4 * 10, 16 * 10, 16 * 10) = g(4,16,16)$$

olduğundan,

$$g(4,16,16) \leq g(4,10,10) + g(10,16,16)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 16$, $z = 10$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16,16,10) \leq g(16 * 10, 16 * 10, 10 * 10) = g(16,16,10)$$

olduğundan,

$$g(16,16,10) \leq g(16,10,10) + g(10,16,10)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 10$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16,10,16) \leq g(16 * 10, 10 * 10, 16 * 10) = g(16,10,16)$$

olduğundan,

$$g(16,10,16) \leq g(16,10,10) + g(10,10,16)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 16$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(10,16,16) \leq g(10 * 10, 16 * 10, 16 * 10) = g(10,16,16)$$

olduğundan,

$$g(10,16,16) \leq g(10,10,10) + g(10,16,16)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(0,0,0) \leq g(0 * 10, 0 * 10, 0 * 10) = g(0,0,0)$$

olduğundan,

$$g(0,0,0) \leq g(0,10,10) + g(10,0,0)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 4$, $z = 4$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(4,4,4) \leq g(4 * 10, 4 * 10, 4 * 10) = g(4,4,4)$$

olduğundan,

$$g(4,4,4) \leq g(4,10,10) + g(10,4,4)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 10$, $z = 10$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(10,10,10) \leq g(10 * 16, 10 * 16, 10 * 16) = g(10,10,10)$$

olduğundan,

$$g(10,10,10) \leq g(10,16,16) + g(16,10,10)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 16$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16,16,16) \leq g(16 * 10, 16 * 10, 16 * 10) = g(16,16,16)$$

olduğundan,

$$g(16,16,16) \leq g(16,10,10) + g(10,16,16)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 0$, $z = 0$, $a = 9$, $nötr(a) = 9$ için;

$$g(9,0,0) \leq g(9 * 9, 0 * 9, 0 * 9) = g(9,0,0)$$

olduğundan,

$$g(9,0,0) \leq g(9,9,9) + g(9,0,0)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 9$, $z = 0$, $a = 9$, $nötr(a) = 9$ için;

$$g(0,9,0) \leq g(0*9, 9*9, 0*9) = g(0,9,0)$$

olduğundan,

$$g(0,9,0) \leq g(0,9,9) + g(9,9,0)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 0$, $z = 9$, $a = 9$, $nötr(a) = 9$ için;

$$g(0,0,9) \leq g(0*9, 0*9, 9*9) = g(0,0,9)$$

olduğundan,

$$g(0,0,9) \leq g(0,9,9) + g(9,0,9)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 0$, $z = 4$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(9,0,4) \leq g(9*16, 0*16, 4*16) = g(0,0,10)$$

olduğundan,

$$g(0,0,10) \leq g(0,16,16) + g(16,0,10)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 4$, $z = 0$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(9,0,4) \leq g(9*16, 4*16, 0*16) = g(0,10,0)$$

olduğundan,

$$g(0,10,0) \leq g(0,16,16) + g(16,10,0)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 9$, $z = 4$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(9,0,4) \leq g(9*16,0*16,4*16) = g(0,0,10)$$

olduğundan,

$$g(0,0,10) \leq g(0,16,16) + g(16,0,10)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 4$, $z = 9$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(0,4,9) \leq g(0*16,4*16,9*16) = g(0,10,0)$$

olduğundan,

$$g(0,10,0) \leq g(0,16,16) + g(16,10,0)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 9$, $z = 0$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(4,9,0) \leq g(4*16,9*16,0*16) = g(10,0,0)$$

olduğundan,

$$g(10,0,0) \leq g(10,16,16) + g(16,0,0)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 0$, $z = 9$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(4,0,9) \leq g(4*16,0*16,9*16) = g(10,0,0)$$

olduğundan,

$$g(10,0,0) \leq g(10,16,16) + g(16,0,0)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 0$, $z = 9$, $a = 9$, $nötr(a) = 9$ için;

$$g(9,0,9) \leq g(9*9,0*9,9*9) = g(9,0,9)$$

olduğundan,

$$g(9,0,9) \leq g(9,9,9) + g(9,0,9)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 9$, $z = 0$, $a = 9$, $nötr(a) = 9$ için;

$$g(9,9,0) \leq g(9*9,9*9,0*9) = g(9,9,0)$$

olduğundan,

$$g(9,9,0) \leq g(9,9,9) + g(9,9,0)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 9$, $z = 0$, $a = 9$, $nötr(a) = 9$ için;

$$g(0,9,9) \leq g(0*9,9*9,9*9) = g(0,9,9)$$

olduğundan,

$$g(0,9,9) \leq g(0,9,9) + g(9,9,9)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 0$, $z = 10$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(9,0,10) \leq g(9*16,0*16,10*16) = g(0,0,16)$$

olduğundan,

$$g(0,0,16) \leq g(0,16,16) + g(16,0,16)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 10$, $z = 0$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(9,10,0) \leq g(9*16,10*16,0*16) = g(0,16,0)$$

olduğundan,

$$g(0,16,0) \leq g(0,16,16) + g(16,16,16)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 9$, $z = 0$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(10,9,0) \leq g(10*16,9*16,0*16) = g(16,0,0)$$

olduğundan,

$$g(16,0,0) \leq g(16,16,16) + g(16,0,0)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 0$, $z = 9$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(10,0,9) \leq g(10 * 16, 0 * 16, 9 * 16) = g(16,0,0)$$

olduğundan,

$$g(16,0,0) \leq g(16,16,16) + g(16,0,0)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 10$, $z = 9$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(0,10,9) \leq g(0 * 16, 10 * 16, 9 * 16) = g(0,16,0)$$

olduğundan,

$$g(0,16,0) \leq g(0,16,16) + g(16,16,0)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 9$, $z = 10$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(0,9,10) \leq g(0 * 16, 9 * 16, 10 * 16) = g(0,0,16)$$

olduğundan,

$$g(0,0,16) \leq g(0,16,16) + g(16,0,16)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 0$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(9,0,16) \leq g(9 * 10, 0 * 10, 16 * 10) = g(0,0,16)$$

olduğundan,

$$g(0,0,16) \leq g(0,10,10) + g(10,0,16)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 16$, $z = 0$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(9,16,0) \leq g(9 * 10, 16 * 10, 0 * 10) = g(0,16,0)$$

olduğundan,

$$g(0,16,0) \leq g(0,10,10) + g(10,16,0)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 9$, $z = 0$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16,9,0) \leq g(16 * 10, 9 * 10, 0 * 10) = g(16,0,0)$$

olduğundan,

$$g(16,0,0) \leq g(16,10,10) + g(10,0,0)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 0$, $z = 9$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16,0,9) \leq g(16 * 10, 0 * 10, 9 * 10) = g(16,0,0)$$

olduğundan,

$$g(16,0,0) \leq g(16,10,10) + g(10,0,0)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 9$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(0,9,16) \leq g(0 * 10, 9 * 10, 16 * 10) = g(0,0,16)$$

olduğundan,

$$g(0,0,16) \leq g(0,10,10) + g(10,0,16)$$

elde edilir.

$x = 0$, $y = 16$, $z = 9$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(0,16,9) \leq g(0 * 10, 16 * 10, 9 * 10) = g(0,16,0)$$

olduğundan,

$$g(0,16,0) \leq g(0,10,10) + g(10,16,0)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 4$, $z = 4$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(9,4,4) \leq g(9*16, 4*16, 4*16) = g(0,10,10)$$

olduğundan,

$$g(0,10,10) \leq g(0,16,16) + g(16,10,10)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 9$, $z = 4$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(4,9,4) \leq g(4*16, 9*16, 4*16) = g(10,0,10)$$

olduğundan,

$$g(10,0,10) \leq g(10,16,16) + g(16,0,10)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 4$, $z = 9$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(4,4,9) \leq g(4*16, 4*16, 9*16) = g(10,10,0)$$

olduğundan,

$$g(10,10,0) \leq g(10,16,16) + g(16,10,0)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 4$, $z = 9$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(9,4,9) \leq g(9*16, 4*16, 9*16) = g(0,10,0)$$

olduğundan,

$$g(0,10,0) \leq g(0,16,16) + g(16,10,0)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 9$, $z = 4$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(9,9,4) \leq g(9 * 16, 9 * 16, 4 * 16) = g(0,0,10)$$

olduğundan,

$$g(0,0,10) \leq g(0,16,16) + g(16,0,10)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 9$, $z = 9$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(4,9,9) \leq g(4 * 16, 9 * 16, 9 * 16) = g(10,0,0)$$

olduğundan,

$$g(10,0,0) \leq g(10,16,16) + g(16,0,0)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 4$, $z = 10$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(9,4,10) \leq g(9 * 16, 4 * 16, 10 * 16) = g(0,10,16)$$

olduğundan,

$$g(0,10,16) \leq g(0,16,16) + g(16,10,16)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 10$, $z = 4$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(9,10,4) \leq g(9 * 16, 10 * 16, 4 * 16) = g(0,16,10)$$

olduğundan,

$$g(0,16,10) \leq g(0,16,16) + g(16,16,10)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 9$, $z = 4$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(10,9,4) \leq g(10 * 16, 9 * 16, 4 * 16) = g(16,0,10)$$

olduğundan,

$$g(16,0,10) \leq g(16,16,16) + g(16,0,10)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 4$, $z = 9$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(10,4,9) \leq g(10 * 16, 4 * 16, 9 * 16) = g(16,10,0)$$

olduğundan,

$$g(16,10,0) \leq g(16,16,16) + g(16,10,0)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 9$, $z = 10$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(4,9,10) \leq g(4 * 16, 9 * 16, 10 * 16) = g(10,0,16)$$

olduğundan,

$$g(10,0,16) \leq g(10,16,16) + g(16,0,16)$$

elde edilir.

$x = 4$, $y = 10$, $z = 9$, $a = 16$, $nötr(a) = 16$ için;

$$g(4,10,9) \leq g(4 * 16, 10 * 16, 9 * 16) = g(10,16,0)$$

olduğundan,

$$g(10,16,0) \leq g(10,16,16) + g(16,16,0)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 4$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(9,4,16) \leq g(9 * 10, 4 * 10, 16 * 10) = g(0,4,16)$$

olduğundan,

$$g(0,4,16) \leq g(0,10,10) + g(10,4,16)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 16$, $z = 4$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(9,16,4) \leq g(9 * 10, 16 * 10, 4 * 10) = g(0,16,4)$$

olduğundan,

$$g(0,16,4) \leq g(0,10,10) + g(10,16,4)$$

elde edilir.

$x = 16,\ y = 9,\ z = 4,\ a = 10,\ nötr(a) = 10$ için;

$$g(16,9,4) \leq g(16*10,9*10,4*10) = g(16,0,4)$$

olduğundan,

$$g(16,0,4) \leq g(16,10,10) + g(10,0,4)$$

elde edilir.

$x = 16,\ y = 4,\ z = 9,\ a = 10,\ nötr(a) = 10$ için;

$$g(16,4,9) \leq g(16*10,4*10,9*10) = g(16,4,0)$$

olduğundan,

$$g(16,4,0) \leq g(16,10,10) + g(10,4,0)$$

elde edilir.

$x = 4,\ y = 16,\ z = 9,\ a = 10,\ nötr(a) = 10$ için;

$$g(4,16,9) \leq g(4*10,16*10,9*10) = g(4,16,0)$$

olduğundan,

$$g(4,16,0) \leq g(4,10,10) + g(10,16,0)$$

elde edilir.

$x = 4,\ y = 9,\ z = 16,\ a = 10,\ nötr(a) = 10$ için;

$$g(4,9,16) \leq g(4*10,9*10,16*10) = g(4,0,16)$$

olduğundan,

$$g(4,0,16) \leq g(4,10,10) + g(10,0,16)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 9$, $z = 9$, $a = 9$, $nötr(a) = 9$ için;

$$g(9,9,9) \leq g(9*9,9*9,9*9) = g(9,9,9)$$

olduğundan,

$$g(9,9,9) \leq g(9,9,9) + g(9,9,9)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 9$, $z = 10$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(9,9,10) \leq g(9*10,9*10,10*10) = g(0,0,10)$$

olduğundan,

$$g(0,0,10) \leq g(0,10,10) + g(10,0,10)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 9$, $z = 9$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(10,9,9) \leq g(12*10,9*10,9*10) = g(10,0,0)$$

olduğundan,

$$g(10,0,0) \leq g(10,10,10) + g(10,0,0)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 10$, $z = 9$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(9,10,9) \leq g(9*10,10*10,9*10) = g(0,10,0)$$

olduğundan,

$$g(0,10,0) \leq g(0,10,10) + g(10,10,0)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 9$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(9,9,16) \leq g(9*10,9*10,16*10) = g(0,0,16)$$

olduğundan,

$$g(0,0,16) \leq g(0,10,10) + g(10,0,16)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 16$, $z = 9$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(9,16,9) \leq g(9*10,16*10,9*10) = g(0,16,0)$$

olduğundan,

$$g(0,16,0) \leq g(0,10,10) + g(10,16,0)$$

elde edilir.

$x16$, $y = 9$, $z = 9$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16,9,9) \leq g(16*10,9*10,9*10) = g(16,0,0)$$

olduğundan,

$$g(16,0,0) \leq g(16,10,10) + g(10,0,0)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 10$, $z = 10$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(9,10,10) \leq g(9*10,10*10,10*10) = g(0,10,10)$$

olduğundan,

$$g(0,10,10) \leq g(0,10,10) + g(10,10,10)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 9$, $z = 10$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(10,9,10) \leq g(10*10,9*10,10*10) = g(10,0,10)$$

olduğundan,

$$g(10,0,10) \leq g(10,10,10) + g(10,0,10)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 10$, $z = 9$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(10,10,9) \leq g(10*10,10*10,9*10) = g(10,10,0)$$

olduğundan,

$$g(10,10,0) \leq g(10,10,10) + g(10,10,0)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 10$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(9,10,16) \leq g(9*10,10*10,16*10) = g(0,10,16)$$

olduğundan,

$$g(0,10,16) \leq g(0,10,10) + g(10,10,16)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 16$, $z = 10$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(9,16,10) \leq g(9*10,16*10,10*10) = g(0,16,10)$$

olduğundan,

$$g(0,16,10) \leq g(0,10,10) + g(10,16,10)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 16$, $z = 9$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(10,16,9) \leq g(10*10,16*10,9*10) = g(10,16,0)$$

olduğundan,

$$g(10,16,0) \leq g(10,10,10) + g(10,16,0)$$

elde edilir.

$x = 10$, $y = 9$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(10,9,16) \leq g(10*10,9*10,16*10) = g(10,0,16)$$

olduğundan,

$$g(10,0,16) \leq g(10,10,10) + g(10,0,16)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 10$, $z = 9$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16,10,9) \leq g(16*10,10*10,9*10) = g(16,10,0)$$

olduğundan,

$$g(16,10,0) \leq g(16,10,10) + g(10,10,0)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 9$, $z = 10$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16,9,10) \leq g(16*10,9*10,10*10) = g(16,0,10)$$

olduğundan,

$$g(16,0,10) \leq g(16,10,10) + g(10,0,10)$$

elde edilir.

$x = 9$, $y = 16$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(9,16,16) \leq g(9*10,16*10,16*10) = g(0,16,16)$$

olduğundan,

$$g(0,16,16) \leq g(0,10,10) + g(10,16,16)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 9$, $z = 16$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16,9,16) \leq g(16*10,9*10,16*10) = g(16,0,16)$$

olduğundan,

$$g(16,0,16) \leq g(16,10,10) + g(10,0,16)$$

elde edilir.

$x = 16$, $y = 16$, $z = 9$, $a = 10$, $nötr(a) = 10$ için;

$$g(16,16,9) \leq g(16*10,16*10,9*10) = g(16,16,0)$$

olduğundan,

$$g(16,16,0) \leq g(16,10,10) + g(10,16,0)$$

elde edilir.

Dolayısıyla g, nötrosofik üçlü g-metrik' dir.

Örnek 3.1.5: $X = \{x, y, z\}$ ve $P(X)$, X' in kuvvet kümesi olsun. A kümesinin eleman sayısını $S(A)$ ile gösterelim. $(P(X),\cup)$' nin bir nötrosofik üçlü metrik olsun. g-metrik olduğunu gösterelim.

$A \cup A = A \cup A = A$ olduğu açıktır. Böylece tüm $A \in P(X) \setminus X$ için;

$$nötr(A) = A$$

ve

$$ters(A) = A$$

alınabilir.

$P(X) \setminus X$ nötrosofik üçlü metriği üzerinde tanımlanan g metriği,

$$g: P(X) \setminus X \times P(X) \setminus X \times P(X) \setminus X \to R^+ \cup \{0\}$$

öyle ki

$$g(A, B, C) = |S(A) - S(B)| + |S(A) - S(C)| + |S(B) - S(C)|$$

nötrosofik üçlü g-metrik değildir. Çünkü

$$A = \{x, y\}$$

$$B = \{x, z\}$$

$$C = \{y, z\}$$

kümeleri için $G(A, B, C) = 0$ olur. Ancak, $A \neq B \neq C$.

Sonuç 3.1.6: $((X,*), g)$ bir nötrosofik üçlü g-metrik uzay ve $d: X \times X \to R^+ \cup \{0\}$,

$$d(x, y) = G(x, y, y)$$

şeklinde bir fonksiyon olsun. O halde,

i) Eğer $x = y$ ise, $d(x, y) = 0$,

ii) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

sağlanır.

İspat:

i) $x = y$ ise, $d(y, y) = G(y, y, y) = 0$. Çünkü $\big((X,*), g\big)$ bir nötrosofik üçlü g-metrik uzaydır.

ii) Her x, y, z elemanı için en az bir $a \in X$ varsa, öyle ki

$$g(x, y, z) \leq g(x * nötr(a), y * nötr(a), z * nötr(a).$$

$\big((X,*), g\big)$ bir nötrosofik üçlü g-metrik uzay olduğundan,

$$g(x, y, y) \leq g(x * nötr(a), y * nötr(a), y * nötr(a) \leq g(x, a, a) + g(a, y, y)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y)$$

İçin $a = z$ olduğunu varsayarsak,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.7: $\big((X,*), d\big)$ bir nötrosofik üçlü metrik uzay olsun.

$$g_s(x, y, z) = \frac{1}{3}[d(x, y) + d(y, z) + d(y, z)]$$

bir nötrosofik üçlü g-metrik' dir.

İspat :

a) d bir nötrosofik üçlü g-metrik uzay olduğundan, $\forall x, y \in X$; $x * y \in X$ dir.

b) d bir NTMS olduğundan, eğer $x = y = z$ ise

$$d(x, y) = d(y, z) = d(y, z) = 0$$

dır. Böylece;

$$g_s(x,y,z) = \frac{1}{3}[d(x,y) + d(y,z) + d(y,z)] = 0.$$

c) d bir NTMS olduğundan, eğer $x \neq y$ ise $d(x,y) > 0$ dır. Böylece

$$g_s(x,y,z) = \frac{1}{3}[d(x,y) + d(y,z) + d(y,z)] > 0.$$

d) $g_s(x,x,y) = \frac{1}{3}[d(x,x) + d(x,y) + d(x,y)] = \frac{2}{3}d(x,y),$

d bir nötrosofik üçlü metrik olduğundan. (1)

Ayrıca,

$$d(x,y) \leq d(x, y * nötr(z))$$

ve $y \neq z$ olacak şekişlde her $x, y \in X$ için en az bir $z \in X$ olduğunu varsayıyoruz. d bir nötrosofik üçlü metrik olduğundan,

$d(x,y) \leq d(x, z * nötr(y)) \leq d(x,z) + d(z,y).$ (2)

(2) den şunu yazabiliriz

$g_s(x,y,z) = \frac{1}{3}[d(x,y) + d(y,z) + d(x,z)] \geq \frac{1}{3}[d(x,y) + d(x,y)] = \frac{2}{3}d(x,y).$ (3)

Ayrıca, (1) ve (3) ten;

$$g_s(x,x,y) \leq g_s(x,y,z)$$

yazabiliriz.

e) d bir nötrosofik üçlü metrik olduğundan,

$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$d(y,z) = d(z,y)$$

$$d(x,z) = d(z,x)$$

Böylece her $x, y, z \in X$ için.

$$g_s(x,y,z) = g_s(x,z,y) = g_s(y,x,z) = g_s(y,z,x) = g_s(z,x,y) = g_s(z,y,x)$$

f)

$$g_s\big(x*etkisiz(a), y*etkisiz(a), z*etkisiz(a)\big) =$$

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} d\big(x*etkisiz(a), y*etkisiz(a)\big) \\ +d\big(y*etkisiz(a), z*etkisiz(a)\big) \\ +d(x*etkisiz(a), z*etkisiz(a)) \end{bmatrix}.$$

(4)

Ayrıca,

$$d(x,y) \le d\big(x, y*etkisiz(a)\big)$$

olacak şekilde her $x, y \in X$ için en az bir $a \in X$ olduğunu varsayalım. (5)

(5) ten

$d(x,y) \le d(x*etkisiz(a), y) \le d(x*etkisiz(a), y*etkisiz(a)).$ (6)

yazabiliriz.

(5) ve (6) dan

$g_s(x,y,z) \le g_s(x*etkisiz(a), y*etkisiz(a), z*etkisiz(a)).$ (7)

yazabiliriz.

d bir nötrosofik üçlü metrik olduğundan, (5) ten

$$d(x,z) \le d\big(x, z*etkisiz(a)\big) \le d(x,a) + d(a,z)$$

ve

$$d(x,y) \le d\big(x, y*etkisiz(a)\big) \le d(x,a) + d(a,y).$$

yazabiliriz. (8)

(7) ve (8) den;

her x, y, z elemanı için en az bir $a \in X$ elemanı varsa

$$g_s(x,y,z) \le g_s(x*etkisiz(a), y*etkisiz(a), z*etkisiz(a))$$

olduğundan

$$g_s(x * etkisiz(a), y * etkisiz(a), z * etkisiz(a)) \leq g_s(x, a, a) + g_s(a, y, z)$$

$$g_s(x, a, a) = \frac{1}{3}[d(x, a) + d(a, a) + d(a, a)]$$

ve

$$g_s(a, y, z) = \frac{1}{3}[d(a, y) + d(y, z) + d(a, z)]$$

yazılır. Böylece, g_s nötrosofik üçlü g-metrik dir.

Teorem 3.1.8: $\big((X,*), d\big)$ bir nötrosofik üçlü metrik uzay olsun,

$$g_m(x, y, z) = max\{d(x, y) + d(x, z) + d(y, z)\}$$

bir nötrosofik üçlü g-metrik dir.

İspat:

a) d bir nötrosofik üçlü metrik olduğundan,

$$\forall x, y \in X; \, x * y \in X$$

dir.

b) d bir nötrosofik üçlü metrik olduğundan,

$$x = y = z \text{ ise } d(x, y) = d(y, z) = d(x, z) = 0.$$

Böylece,

$$g_m(x, y, z) = max\{d(x, y) + d(x, z) + d(y, z)\} = 0.$$

c) d bir nötrosofik üçlü metrik olduğundan,

$$x \neq y \text{ ise; } d(x, y) > 0.$$

Böylece,

$$g_m(x, y, z) = max\{d(x, y) + d(x, z) + d(y, z)\} > 0.$$

d) d bir nötrosofik üçlü metrik olduğundan,

$g_m(x,x,y) = max\{d(x,x) + d(x,y) + d(x,y)\} = max\{d(x,x) + d(x,y)\}$. (9)

Ayrıca,

$d(x,y) \leq d(x, y * etkisiz(z))$

ve $y \neq z$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için en az bir $z \in X$ olduğunu varsayalım. d bir nötrosofik üçlü metrik olduğundan,

$d(x,y) \leq d\big(x, z * etkisiz(y)\big) \leq d(x,z) + d(z,y)$. (10)

(10) dan

$g_m(x,y,z) = max\{d(x,y) + d(x,z) + d(y,z)\} \geq max\{d(x,y) + d(x,z)\}$. (11)

yazılır.

Ayrıca, (1) ve (3) ten;

$$g_m(x,x,y) \leq g_m(x,y,z)$$

yazabiliriz.

e) d bir nötrosofik üçlü metrik olduğundan,

$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$d(y,z) = d(z,y)$$

$$d(x,z) = d(z,x)$$

böylece her $x, y, z \in X$ için

$$g_m(x,y,z) = g_m(x,z,y) = g_m(y,x,z) = g_m(y,z,x) = g_m(z,x,y) = g_m(z,y,x)$$

olur.

f)

$$g_m\big(x * etkisiz(a), y * etkisiz(a), z * etkisiz(a)\big) =$$

$$max\left\{\begin{matrix} d\big(x * etkisiz(a), y * etkisiz(a)\big), \\ d\big(y * etkisiz(a), z * etkisiz(a)\big), \\ d(x * etkisiz(a), z * etkisiz(a)) \end{matrix}\right\}.$$

(12)

Ayrıca,

$$d(x,y) \leq d(x, y * etkisiz(a))$$

(13)

olacak şekilde her $x, y \in X$ için en az bir $a \in X$ olduğunu varsayalım.

(13) ten,

$$d(x,y) \leq d(x * etkisiz(a), y) \leq d(x * etkisiz(a), y * etkisiz(a))$$

yazılır. (14)

(13) ve (14) ten,

$$g_m(x,y,z) \leq g_m(x * etkisiz(a), y * etkisiz(a), z * etkisiz(a))$$

yazılır. (15)

d bir nötrosofik üçlü metrik olduğundan, (13) ten

$$d(x,z) \leq d\big(x, z * etkisiz(a)\big) \leq d(x,a) + d(a,z)$$

ve

$$d(x,y) \leq d\big(x, y * etkisiz(a)\big) \leq d(x,a) + d(a,y).$$

yazılır. (16)

(15) ve (16) dan; her x, y, z elemanı için en az bir $a \in X$ elemanı varsa

$$g_m(x,y,z) \leq g_m(x * etkisiz(a), y * etkisiz(a), z * etkisiz(a))$$

sonra

$$g_m(x * etkisiz(a), y * etkisiz(a), z * etkisiz(a)) \leq g_m(x,a,a) + g_m(a,y,z)$$

yazılır. Burada,

$$g_m(x,a,a) = max\{d(x,a), d(x,a), d(a,a)\}$$

ve

$$g_m(a, y, z) = max\{d(a, y), d(a, z), d(y, z)\}$$

böylece, g_m bir nötrosofik üçlü g-metrikdir.

Örnek 3.1.9: $X \subset R$ olsun. $(X,*)$ bir nötrosofik üçlü küme ve d bir nötrosofik üçlü metrik olsun öyle ki

$d(x, y) = |2x - 2y|$. Sonra Teorem 3.1.7 ve Teorem 3.1.8 den,

$$g_s(x, y, z) = \frac{1}{3}[|2^x - 2^y| + |2^x - 2^z| + |2^y - 2^z|]$$

ve

$$g_m(x, y, z) = max\{|2^x - 2^y|, |2^x - 2^z|, |2^y - 2^z|\}$$

nötrosofik üçlü g-metrik uzaydır.

Teorem 3.1.10: $((X,*), g)$ bir nötrosofik üçlü g-metrik uzay olsun. $k > 0$ için,

$$g_1(x, y, z) = min\{k, g(x, y, z)\}$$

bir nötrosofik üçlü g-metrikdir.

İspat:

i)

$$g_1(x, y, z) = min\{k, g(x, y, z)\} = g(x, y, z)$$

olduğunu varsayıyoruz. $((X,*), g)$ bir nötrosofik üçlü g-metrik uzay olduğundan, $g_1(x, y, z)$'nin bir nötrosofik üçlü g-metrik olduğu açıktır.

ii) $x = y = z$ ise

$$g_1(x, y, z) = min\{k, g(x, y, z)\} = 0$$

olduğu açıktır. (17)

Çünkü $((X,*), g)$ bir nötrosofik üçlü g-metrik uzaydır.

$x \neq y \neq z$ ise

$$g_1(x, y, z) = min\{k, g(x, y, z)\} = k$$

olduğunu varsayalım.

$g_1(x, y, z)$ nin bir nötrosofik üçlü g-metrik olduğunu göstereceğiz.

a) $\big((X,*), g\big)$bir nötrosofik üçlü g-metrik olduğundan,

$$\forall x, y \in X; x * y \in X$$

dir.

b) (17) den, eğer

$$x = y = z$$

ise

$$g_1(x, y, z) = 0.$$

c) Eğer

$$x \neq y$$

ise

$$g_1(x, y, z) = k > 0.$$

d) Eğer

$$z \neq y$$

ise

$$g_1(x, x, y) = k \leq g_1(x, y, z) = k.$$

e)

$$g_1(x, y, z) = k = g_1(x, z, y) = k = g_1(y, x, z) = k =$$

$$g_1(y, z, x) = k = g_1(z, x, y) = k = g_1(z, y, x) = k$$

her $x, y, z \in X$ için.

f)

$$g_1(x, y, z) = k \leq g_1\big(x * etkisiz(a), y * etkisiz(a), z * etkisiz(a)\big) = k$$

ayrıca,

$$g_1\big(x * etkisiz(a), y * etkisiz(a), z * etkisiz(a)\big) =$$

$$k \leq g_1(x, a, a) + g_1(a, y, z) = k$$

Böylece, g_1 bir nötrosofik üçlü g-metrikdir.

Tanım 3.1.11: $\big((X,*), g\big)$ bir nötrosofik üçlü g-metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Bir $x \in X$ noktasının (x_n) dizisi için

$$\lim_{n,m\to\infty} g(x, x_n, x_m) = 0$$

ise (x_n) nötrosofik üçlü g-yakınsak x e denir.

Tanım 3.1.12: $\big((X,*), g\big)$ bir nötrosofik üçlü g-metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun.

$$\lim_{n,m,l\to\infty} g(x_n, x_m, x_l) = 0$$

ise (x_n) nötrosofik üçlü g-Cauchy dizisi olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.13: $\big((X,*), g\big)$ bir nötrosofik üçlü g-metrik uzay olsun. Her (x_n) nötrosofik üçlü g-Cauchy dizisi nötrosofik üçlü g-yakınsak ise, o zaman $\big((X,*), g\big)$' ye nötrosofik üçlü tam nötrosofik üçlü g-metrik uzay denir.

BÖLÜM IV

SONUÇLAR

Dört bölümden meydana gelen bu kitabın; birinci bölümde bulanık küme, sezgisel bulanık küme, nötrosofik küme, nötrosofik üçlü küme, nötrosofik üçlü metrik uzay, metrik uzayın tarihçesinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde bulanık kümeler, sezgisel bulanık kümeler, nötrosofik kümeler ve, nötrosofik üçlü kümeler, metrik uzay, nötrosofik üçlü metrik uzaylar, nötrosofik kısmi metrik uzay, g – metrik uzay, yakınsaklık, Cauchy dizisi tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde nötrosofik üçlü g-metrik uzay yapısı tanıtılmıştır. Nötrosofik üçlü g-metrik uzayın, g-metrik uzaydan daha genel ve farklı olduğu gösterilmiştir. Buna ek olarak nötrosofik üçlü kısmi g-metrik uzayı tanımlanıp özellikleri verilmiştir. Yapılan bu çalışmalar kullanılarak nötrosofik üçlü g-metrik uzay yardımıyla sabit nokta teorisinde yeni çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Smarandache F. (1998) Neutrosophy: Neutrosophic Probability, Set and Logic, Rehoboth, Amer. Research Press.

[2] Smarandache, F., & Ali, M. (2014). The Neutrosophic Triplet Group and its Application to Physics, presented by FS to Universidad Nacional de Quilmes. *Department of Science and Technology, Bernal, Buenos Aires, Argentina (02 June 2014)*.

[3] Smarandache, F., & Ali, M. (2018). Neutrosophic triplet group. *Neural Computing and Applications*, *29*(7), 595-601.

[4] Wang H., Smarandache F., Zhang Y. Q., Sunderraman R. (2010) Single valued neutrosophic sets. Multispace Multistructure 4, 410–413. Quadruple Neutrosophic Theory And Applications Volume I 201.

[5] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, *8*(3), 338-353.

[6] Atanassov T. K. (1986) Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets Syst, 20:87–96.

[7] Şahin, M., & Kargın, A. (2019). *Neutrosophic triplet metric topology*. Infinite Study.

[8] Şahin, M., & Kargın, A. (2017). Neutrosophic triplet normed space. *Open Physics*, *15*(1), 697-704.

[9] Şahin, M., & Kargın, A. (2017). *Neutrosophic Triplet Inner Product*. Infinite Study.

[10] Smarandache F., Şahin M., Kargın A. (2018) Neutrosophic Triplet G- Module, Mathematics – MDPI, 6, 53.

[11] Şahin, M., Kargın, A., & Yıldız, İ. (2020). Neutrosophic triplet field and neutrosophic triplet vector space based on set valued neutrosophic quadruple number. *Quadruple Neutrosophic Theory And Applications*, *1*, 52.

[12] Şahin, M., Kargın, A., & Çoban, M. A. (2018). Fixed point theorem for neutrosophic triplet partial metric space. *Symmetry*, *10*(7), 240.

[13] Şahin, M., & Kargın, A. (2018). Neutrosophic Triplet v-Generalized Metric Space. *Axioms*, *7*(3), 67.

[14] Şahin, M., Kargın, A., & Smarandache, F. (2019). Neutrosophic triplet topology. *Neutrosophic Triplet Research*, *1*(4), 43-54.

[15] Şahin, M., & Kargın, A. (2018). Neutrosophic triplet normed ring space. *Neutrosophic Set and Systems*, *21*, 20-27.

[16] Smarandache, F., & Şahin, M. (2019). Neutrosophic triplet partial inner product space. *Neutrosophic Triplet Structures*, 10.

[17] Smarandache, F., & Şahin, M. (2019). Neutrosophic triplet partial inner product space. *Neutrosophic Triplet Structures*, 10.

[18] Şahin, M., & Kargın, A. (2019). *Neutrosophic Triplet Partial v-Generalized Metric Space*. Infinite Study.

[19] Şahin M., Kargın A. (2019) Neutrosophic triplet Lie Algebra, Neutrosophic Triplet Research 1, 68 -78.

[20] Mustafa, Z., & Sims, B. (2006). A new approach to generalized metric spaces. Journal of Nonlinear and convex Analysis, 7(2), 289-297.

[21] Matthews, S. G. (1994). Partial metric topology. *Annals of the New York Academy of Sciences*, *728*(1), 183-197.

[22] Mutlu, A., & Gürdal, U. (2016). Bipolar metric spaces and some fixed point theorems. *J. Nonlinear Sci. Appl*, *9*(9), 5362-5373.

[23] Kreyszig, E. , 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons New York.

[24] Chávez, E., Navarro, G., Baeza-Yates, R., & Marroquín, J. L. (2001). Searching in metric spaces. *ACM computing surveys (CSUR)*, *33*(3), 273-321.

[25] Şahin, M., Kargın, A., & Yücel, M. (2020). Neutrosophic Triplet Partial g-Metric Spaces. *Neutrosophic Sets and Systems*, *33*, 116-133.

[26] Şahin, M., & Kargın, A. (2020). New similarity measure between single-valued neutrosophic sets and decision-making applications in professional proficiencies. In *Neutrosophic Sets in Decision Analysis and Operations Research* (pp. 129-149). IGI Global.

[27] Şahin, M., & Kargın, A. (2019). *Neutrosophic triplet metric topology*. Infinite Study.

This book consists of four chapters. In the first chapter, which is the introduction, basic information about the fuzzy set, intuitionistic fuzzy set, neutrosophic set, neutrosophic triplet set, metric space, partial metric space, neutrosophic triplet metric space is given and the history of these structures is mentioned. In the second chapter, the fuzzy set, intuitionistic fuzzy set, neutrosophic set, neutrosophic triplet set, metric space, neutrosophic triplet metric space, neutrosophic partial metric space, g-metric space structures are introduced. In the third chapter, the neutrosophic triplet g-metric space structure is introduced and some examples are given to explain this structure. Theorems have been obtained showing that the neutrosophic triplet g-metric space is different and more general than the classical metric space and the neutrosophic triplet metric space. In the last section, the results obtained in the book are given.