NÖTROSOFİK ÜÇLÜ ÇİFT KUTUPLU METRİK UZAY VE NÖTROSOFİK ÜÇLÜ KISMİ ÇİFT KUTUPLU METRİK UZAY

Merve Sena UZ

Editor: Prof. Dr. Memet ŞAHİN

2024

Merve Sena UZ

NÖTROSOFİK ÜÇLÜ ÇİFT KUTUPLU METRİK UZAY VE NÖTROSOFİK ÜÇLÜ KISMİ ÇİFT KUTUPLU METRİK UZAY

NEUTROSOPHIC TRIPLET BIPOLAR METRIC SPACES AND NEUTROSOPHIC TRIPLET PARTIAL BIPOLAR METRIC SPACES

Editör: Prof. Dr. Memet ŞAHİN

ÖNSÖZ

Bu kitap Prof. Dr. Memet ŞAHİN danışmanlığında Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde tamamlamış olduğum "NÖTROSOFİK ÜÇLÜ ÇİFT KUTUPLU METRİK UZAY VE NÖTROSOFİK ÜÇLÜ KISMİ ÇİFT KUTUPLU METRİK UZAY" isimli yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve üstümde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Prof. Dr. Memet ŞAHİN 'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Örneklerin toplanmasında, izlenecek yol ve yöntemlerin belirlenmesinde desteklerini benden esirgemeyen değerli hocam Abdullah KARGIN 'a, arkadaşlarım Azize DAYAN ve Murat YÜCEL 'e çok teşekkür ederim.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim biricik annem ve tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Merve Sena UZ

Gaziantep, 2024

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOLLER LİSTESİ

$\boldsymbol{\mu_K(x)}$	x ’in K kümesine ait olma derecesi
$\boldsymbol{\vartheta_K(x)}$	x ’in K kümesine ait olmama derecesi
$\boldsymbol{T_K(x)}$	x ’in K kümesindeki doğruluk derecesi
$\boldsymbol{I_K(x)}$	x ’in K kümesindeki belirsizlik derecesi
$\boldsymbol{F_K(x)}$	x ’in K kümesindeki yanlışlık derecesi
$\mathbf{etkisiz}(\boldsymbol{x})$	x ’in kümedeki etkisizi
$\mathbf{ters}(\boldsymbol{x})$	x ’in kümedeki tersi
$\cap$	Kesişim işlemi
$\cup$	Birleşim işlemi
$\setminus$	Fark işlemi
$\times$	Kartezyen çarpım
$\subseteq$	Alt küme
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{p})$	Kısmi metrik uzay
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{d})$	Çift kutuplu metrik uzay
$(\boldsymbol{N}, *)$	Nötrosofik üçlü küme
$\boldsymbol{d_N}$	Nötrosofik üçlü metrik
$\boldsymbol{d_p}$	Nötrosofik üçlü kısmi metrik
$\boldsymbol{d_{pb}}$	Nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik
$((\boldsymbol{N}, *), \boldsymbol{d_N})$	Nötrosofik üçlü metrik uzay
$((\boldsymbol{N}, *), \boldsymbol{d_p})$	Nötrosofik üçlü kısmi metrik uzay
$\left(((\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), *), \boldsymbol{d}\right)$	Nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay
$\left(((\mathbf{X}, \mathbf{Y}), *), \boldsymbol{d_{pb}}\right)$	Nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay

BÖLÜM I

GİRİŞ

Klasik kümelerde, bir nesnenin bir kümeye üye olması ve üye olmaması söz konusudur. Bu küme yapısını ifade ederken karakteristik fonksiyonlardan yararlanılmaktadır. Karakteristik fonksiyon, üyelik durumuna göre her bir elemana 1 ve 0 değerlerinden birini atayarak evrensel küme üzerinde tanımlanan ve bizim ilgilendiğimiz özelliğe sahip elemanların oluşturduğu kümeyi belirtmektedir. Yani klasik kümelerde elemanlar 1(doğruluk) veya 0(yanlışlık) değerlerinden birini alır ve bu değerler kesindir. Ama günlük hayatımızda her zaman kesin sonuçlar elde etmemiz mümkün olmayabilir. Bu nedenle 1965 yılında Zadeh [28] bulanık mantık ve bulanık küme teorisini, tüm belirsizlik içeren durumları modellemek amacıyla tanımlamıştır. Klasik kümelerde tanımlanan uzaydaki bir elemanın, verilen kümeye ait olması ile ait olmaması arasındaki geçiş birdenbire ve kesin olarak tanımlanmıştır. Bulanık kümelerde ise bu geçiş kademeli olarak tanımlanmıştır. Çeşitli üyelik dereceleri arasındaki bu geçiş bulanık kümelerin sınırlarının kesin olmayan belirsizlik yapısından kaynaklanmıştır. Bulanık küme yapısı, bir K evrensel kümesinin elemanlarını $[0,1]$ aralığına götüren bir üyelik fonksiyonu yardımı ile tanımlanmıştır. Bulanık mantık ve bulanık küme yapısında yalnızca bir dereceye kadar üyelik tanımlanmıştır.

Bulanık küme yapısında üyelik fonksiyonunun yanına, K evrensel kümesinin elemanlarını $[0,1]$ aralığına götüren bir üyelik olmama fonksiyonu eklenerek 1986'da Atanassov [29] tarafından sezgisel bulanık küme yapıları tanımlanmıştır. Sezgisel bulanık küme yapısında her elemanın üyelik olma ve üyelik olmama dereceleri tanımlanmıştır.

Sezgisel bulanık kümelerin yeterli olmadığı durumlar için de Samarandache [1], 1998'de nötrosofik mantık ve nötrosofik kümeyi tanımlamıştır. Nötrosofik küme yapısı, bir K evrensel kümesinin elemanlarını $[0,1]$ aralığına götüren üyelik olma, belirsizlik ve üyelik olmama fonksiyonları ile tanımlanmıştır. Nötrosofik mantık ve nötrosofik kümelerde, T üyelik derecesi, I belirsizlik derecesi ve F üye olmama derecesi olarak birbirinden bağımsız bir şekilde tanımlanmıştır. Nötrosofik yapılar (T, I, F) formuna sahip olarak elde edilmiştir. Diğer bir deyişle, bir koşul hem doğruluğuna hem yanlışlığına hem de belirsizliğine göre ele alınmıştır. Nötrosofik küme; bulanık küme ve sezgisel bulanık kümeden genelleştirilmiştir. Bu nedenle nötrosofik mantık ve nötrosofik küme, hayatımızdaki birçok belirsizliği açıklamamıza yardımcı olmuştur. Ayrıca birçok araştırmacı bu teori üzerine çalışmalar yapmıştır. Kandasamy ve Smarandache [2] temel nötrosofik cebirsel yapılar ve bunların bulanık ve nötrosofik modellere uygulamalarını tanıtmıştır, Kandasamy ve Smarandache [3] bazı nötrosofik cebirsel yapıları ve nötrosofik n- cebirsel yapıları tanıtmıştır, Smarandache ve Ali [4] madde plazma, madde olmayan plazma ve antimadde plazmasının uzantısı olarak nötrosofik üçlü yapıları tanıtmıştır, Smarandache ve Ali [5] ikili bir işlemle ilgili olarak belirli aksiyomları karşılayan üç öğenin bir koleksiyonu olan nötrosofik üçlü kavramını ilk kez tanıtmıştır, Smarandache ve Ali [6] nötrosofik üçlü kümeler ve nötrosofik üçlü gruplar elde etmiştir, Smarandache ve Ali [7] fiziksel uygulamalarda kullanılan nötrosofik üçlü uzayını tanıtmıştır, Smarandache ve Ali [8] nötrosofik üçlü halka ve uygulamalarını tanıtmıştır, Şahin ve Kargın [9] tek değerli nötrosofik dörtlü grafikleri tanıtmıştır, Broumi ve ark. [10] çeşitli derecelerin özelliklerini, tek değerli nötrosofik grafiklerin sırasını ve boyutunu tanımlamıştır ve düzenli tek değerli nötrosofik grafik için yeni bir tanım verilmiştir, Broumi ve ark. [11] nötrosofik grafik tabanlı çok kriterli karar verme yöntemi kavramını, aralık değerli nötrosofik grafik teorisini tanıtmıştır, Uluçay ve ark. [12] zaman-nötrosofik esnek uzman kümeleri ve karar verme problemini tanıtmıştır, Uluçay ve ark. [13] bipolar nötrosofik kümelerde çok özellikli karar verme problemleri için yeni bir yaklaşım tanıtmıştır, Ulucay ve ark. [14] rafine nötrosofik kümeler için yeni hibrit mesafeye dayalı benzerlik ölçümü ve tıbbi tanıda uygulaması tanıtmıştır, Broumi ve ark. [15] bipolar kompleks nötrosofik kümeler ve karar verme probleminde uygulamalarını tanıtmıştır, Bakbak ve ark. [16] nötrosofik esnek uzman çoklu kümelerini ayrıntılı olarak tanıtmıştır, Uluçay ve Şahin [17] nötrosofik esnek uzman grafiği kavramını tanımlamıştır, Uluçay ve ark. [18] nötrosofik çoklu ortamdaki belirsiz durumların üstesinden gelmek için çok kriterli karar verme problemleri için yeni bir geçiş yaklaşımı tanıtmıştır, Smarandache eksiklik, belirsizlik ve tutarsızlık bilgisinin farkındalığını içeren sorunları ele almak için nötrosofik bir küme tanımlamıştır ve bunu nötrosofik esnek uzman kümelerini daha da geliştirmiştir, Uluçay ve ark. [19] bu kavramı genelleştirilmiş nötrosofik esnek uzman kümesine daha da genişletmiştir, Şahin ve ark. [20] bipolar nötrosofik kümelerin benzerlik ölçüsü ve çok kriterli karar verme uygulamalarını tanıtmıştır, Wang ve ark. [21] tek değerli nötrosofik kümeleri tanıtmıştır, Şahin ve ark. [22] örüntü tanıma uygulamaları ile dönüştürülmüş tek değerli nötrosofik sayıların merkez noktalarına dayalı tek değerli nötrosofik kümeler arasındaki yanlışlık değerine ilişkin yeni bir benzerlik ölçüsü tanıtmıştır, Şahin ve ark. [23] merkezi tek değerli üçgen nötrosofik sayılara dayalı bazı yeni genelleştirilmiş toplama operatörleri ve çok özellikli karar vermedeki uygulamalarını tanıtmıştır, Chatterjee ve ark. [24] nötrosofik kümeler kullanarak bulanık çok kriterli karar vermesini tanıtmıştır, Mohana ve Mohanasundari [25] aralarındaki mesafe kavramını analiz ederek tek değerli nötrosofik kaba kümeler arasındaki benzerlik ölçülerini elde etmiştir, Smarandache ve ark. [26] kelimelerin tek değerli nötrosofik kümeler olarak kabul edildiği bulanık temelli bir yaklaşım kullanarak kelime çiftleri arasında yeni bir duyarlılık benzerliği ölçümleri tanıtmıştır, J. Ye [27] aralıklı nötrosofik kümeler arasındaki Hamming ve Öklid mesafelerini tanıtmıştır. Ayrıca, Smarandache ve Ali [6] 2016 yılında nötrosofik üçlü kümeler ve nötrosofik üçlü gruplar elde etmiştir.

Nötrosofik üçlü kümede A'daki her bir " x " öğesi için, " x " in etkisizi ve " x " in zıttı tanımlanmıştır. Ayrıca, " x" 'in etkisizi, klasik etkisiz öğeden farklı olarak tanımlanmıştır. Bu nedenle nötrosofik üçlü kümenin, klasik kümeden farklı bir yapıya sahip olduğu gösterilmiştir. Bir nötrosofik üçlü " x", $< x,$etkisiz(x),ters$(x) >$ ile tanımlanmıştır. Ayrıca, birçok araştırmacı nötrosofik üçlü yapılarını tanıtmıştır. Şahin ve Kargın [30] nötrosofik üçlü metrik topolojisini tanımlamıştır. Nötrosofik üçlü metrik uzay, nötrosofik üçlü topoloji ve nötrosofik üçlü metrik topolojiyi tanımlamıştır, Ali ve ark. [31] nötrosofik üçlü grup kavramının, nötrosofik üçlü halkaya ve nötrosofik üçlü alana gelişimi üzerine çalışmıştır, Şahin ve Kargın [32] nötrosofik üçlü normlu uzayını tanıtmıştır, Şahin ve Kargın [33] nötrosofik üçlü iç çarpım uzayını tanıtmıştır, Smarandache ve ark. [34] nötrosofik üçlü G-modülünü tanıtmıştır, Şahin ve Kargın [35] nötrosofik üçlü b - metrik uzayını tanıtmıştır, Şahin ve ark. [36] nötrosofik üçlü kısmi metrik uzay kavramı tanıtmıştır, Şahin ve Kargın [37] nötrosofik üçlü v genelleştirilmiş metrik uzay kavramını tanıtmıştır, Şahin ve ark. [38] nötrosofik üçlü topolojiyi tanıtmıştır, Şahin ve Kargın [39] nötrosofik üçlü normlu halka uzayını tanıtmıştır, Şahin ve Kargın [40] nötrosofik üçlü kısmi iç çarpım uzayını tanıtmıştır, Şahin ve Kargın [41] küme değerli nötrosofik dörtlü kümeleri ve sayıları tanıtmıştır, Şahin ve Kargın [42] nötrosofik üçlü kısmi v - genelleştirilmiş metrik uzayını tanıtmıştır, Şahin ve Kargın [43] nötrosofik üçlü Lie cebir yapılarını tanıtmıştır, Şahin ve Kargın [44] nötrosofik üçlü G için izomorfizm teoremleri – modülleri tanıtmıştır. Şahin ve Kargın [32] 2017 yılında nötrosofik üçlü metrik uzay yapısını tanıtmıştır, Şahin ve Kargın [36] 2018 yılında nötrosofik üçlü kısmi metrik uzay yapısını tanıtmıştır. Nötrosofik üçlü kısmi metrik uzayın, nötrosofik üçlü metrik uzaydan farklı olduğu gösterilmiştir. Nötrosofik üçlü metrik uzayın ve nötrosofik üçlü kısmi metrik uzayın da klasik metrik uzaydan farklı olduğu gösterilmiştir.

Metrik uzaylar ve bu yapının birçok genellemesinde bir kümenin noktaları arasındaki mesafeler, klasik veya klasik olmayan anlamda ele alınmıştır. Bazı durumlarda mesafeler, benzersiz bir kümenin noktaları arasında değil, iki farklı kümenin öğeleri arasında ortaya çıkmıştır. Ortaya çıkan bu tür durumlarda aynı tür noktalar arasındaki mesafeler ya tanımsız ya da veri yokluğu nedeniyle bilinememiştir. Bir örnek verilecek olursa; her kuryenin bir seferde yalnızca bir sipariş taşıması gerektiğini varsayalım, teslimat adresleri arasındaki mesafelerin büyük verilerini ele almadan yalnızca bir sektör şirketinin konumundan mevcut teslimat adresine olan mesafeyi bilmek yeterli olmuştur. Matematikte bu tür mesafeler; Öklid uzayında doğrular ve noktalar arası mesafe, bir metrik uzayda kümeler ve noktalar arası mesafe, bir dizi arasındaki yakınlık gibi örneklendirilmiştir. Yaşam süresi, insanlar ve yerler arasındaki mesafeler, bir metrik uzayda diyagramları belirlenmiş bir bölge içinde noktalardan ya da nesnelerden oluşan bir kümenin birbirlerine göre yakınlık bilgilerini gösteren Voronoi diyagramını oluşturan yerler ve noktalar arasındaki mesafeler gibi mesafeler çift kutuplu metrik altında resmileştirilmiştir. Mutlu ve Gürdal [45], 2016 yılında çift kutuplu metrik uzayı tanıtmıştır. Klasik metrik uzayda bir küme üzerine metrik fonksiyonu tanımlanırken, çift kutuplu metrik uzayda farklı iki küme üzerine metrik fonksiyonu tanımlanmıştır. Çift kutuplu metrik uzay, metrik uzaydan genelleştirilmiştir. Ayrıca, çift kutuplu metrik uzaylar sabit nokta teorisinde önemli bir role sahip olmuştur. Son zamanlarda Mutlu ve ark. [46] çift kutuplu metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerini tanıtmıştır, Kishore ve ark. [47] bipolar metrik uzaylarda büzülme ve sabit nokta teoremlerini uygulamalarla tanıtmıştır, Rao ve ark. [48] Geraghty tipi kasılma ve çift kutuplu metrikte ortak birleşik sabit nokta teoremleri homotopi uygulamalarına sahip metrik uzaylar elde etmiştir. 2021 yılında Kishore ve ark. [51] bipolar metrik uzaylarda üç kovaryant eşleme için ortak birleşik sabit nokta sonuçlarının varlığını ve benzersizliğini tanıtmıştır. 2020 yılında Gürdal ve ark. [52] benzer olmayan nesneler arasındaki mesafeleri incelemek için bir çerçeve sağlayan bipolar metrik uzaylarda α-ψ büzülme tipi kovaryant ve kontravaryant haritalama kavramını tanıtmıştır. 2020 yılında, Bartwal ve ark. [53] bulanık bipolar metrik uzay kavramını tanıtmıştır. 2020 yılında Sangurlu Sezen [54] yeni bir ortogonal bulanık bipolar metrik uzay kavramını tanıtmıştır.

Bu kitabın 2.bölümünde, bulanık kümeler [28], sezgisel bulanık kümeler [29], nötrosofik kümeler [1] ve [21], nötrosofik üçlü kümeler [6], nötrosofik üçlü metrik uzaylar [32], nötrosofik üçlü kısmi metrik uzay [36], çift kutuplu metrik uzay [45] tanımlarına yer verilmiştir. Ayrıca, burada 3.bölüm ve 4.bölümde tanımladığımız yapılar için yararlanılan çift kutuplu metrik uzayda sol (sağ veya merkez) dizi [45], yakınsaklık [45], çifte yakınsaklık [45], Cauchy çift dizisi [45] gibi tanımlar da verilmiştir. 3.bölümünde, nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay tanımına yer verilmiştir. Tanımlanan yapının daha iyi anlaşılabilmesi için de sayısal örnekler verilmiştir. Aynı zamanda nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzayların, klasik çift kutuplu metrik uzaylardan ve nötrosofik üçlü metrik uzaylardan farklı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay ile ilgili bazı teoremlere yer verilmiştir. Daha sonra, nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzaylar ile nötrosofik üçlü metrik uzaylar arasındaki ilişki incelenmiştir. 4.bölümde, nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay tanımına yer verilmiştir. Bu tanımla ilgili örnekler verilmiştir. Nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzayın, klasik nötrosofik üçlü metrik uzay ve nötrosofik üçlü kısmi metrik uzaydan farklı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzaylar ile ilgili bazı teoremlere yer verilmiştir. 5.bölümünde de elde edilen sonuçlar verilmiştir.

BÖLÜM II

GENEL BİLGİLER

2.1.Bulanık Küme

Tanım 2.1.1:[28] $X \neq \emptyset$ bir evrensel küme olsun. $\forall x \in X$ için $0 \leq \mu_K(x) \leq 1$ olmak üzere $\mu_K: X \to [0,1]$ fonksiyonu ile bir bulanık küme;

$K = \{\langle x, \mu_K(x) \rangle : x \in X\}$ kümesi ile verilir.

Burada $\mu_K(x)$, $x \in X$ in K kümesine ait olma derecesidir.

X kümesi, $\emptyset$ küme ve K kümesi;

$X = \{\langle x, 1 \rangle : x \in X\}$, $\emptyset = \{\langle x, 0 \rangle : x \in X\}$, $K = \{\langle x, \mu_K(x) \rangle : x \in X\}$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.2:[28] $X \neq \emptyset$ bir evrensel küme üzerinde $K_1, K_2 \subseteq X$ olup K_1 ile K_2 bulanık kümeler olsun. K_1 ve K_2 kümelerinin sırasıyla üyelik fonksiyonları $\mu_{K_1}(x)$ ve $\mu_{K_2}(x)$ olsun. $\forall x \in X$ için kapsama ve iki kümenin eşitliği

$$K_1 \subseteq K_2 \Leftrightarrow \mu_{K_1}(x) \leq \mu_{K_2}(x)$$

$$K_1 = K_2 \Leftrightarrow K_1 \subseteq K_2 \text{ ve } K_2 \subseteq K_1$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.3:[28] $X \neq \emptyset$ ve $K \subseteq X$ olmak üzere K bulanık kümesinin tümleyeni K^c ile gösterilir. $\forall x \in X$ için $\mu_{K^c}(x) = 1 - \mu_K(x)$ olmak üzere

K kümesinin tümleyeni $K^c = \{\langle x, \mu_{K^c}(x) \rangle : x \in X\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.4:[28] $X \neq \emptyset$ ve $K_1, K_2 \subseteq X$ olup K_1 ile K_2 bulanık kümeler olsun.

$\forall x \in X$ için $\mu_{K_1 \cup K_2}(x)$ =max$\{\mu_{K_1}(x), \mu_{K_2}(x)\}$ olmak üzere K_1 ile K_2 nin birleşimi

$$K_1 \cup K_2 = \{\langle x, \mu_{K_1 \cup K_2}(x) \rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.5:[28] $X \neq \emptyset$ ve $K_1, K_2 \subseteq X$ olup K_1 ile K_2 bulanık kümeler olsun.

$\forall x \in X$ için $\mu_{K_1 \cap K_2}(x)$ =min$\{\mu_{K_1}(x), \mu_{K_2}(x)\}$ olmak üzere K_1 ile K_2 nin kesişimi

$$K_1 \cap K_2 = \{\langle x, \mu_{K_1 \cup K_2}(x) \rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.6:[28] $X \neq \emptyset$ ve $K_1, K_2 \subseteq X$ olup K_1 ile K_2 bulanık kümeler olsun. $\forall x \in E$ için $\mu_{K_1+K_2}(x) = \mu_{K_1}(x) + \mu_{K_2}(x) - \mu_{K_1}(x).\mu_{K_2}(x)$ olmak üzere K_1 ile K_2 nin $K_1 + K_2$ ile gösterilen toplama işlemi;

$$K_1 + K_2 = \left\{\langle x, \mu_{K_1+K_2}(x) \rangle : x \in E\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.7:[28] $X \neq \emptyset$ ve $K_1, K_2 \subseteq X$ olup K_1 ile K_2 bulanık kümeler olsun. $\forall x \in E$ için $\mu_{K_1.K_2}(x) = \mu_{K_1}(x).\mu_{K_2}(x)$ olmak üzere K_1 ile K_2 nin $K_1.K_2$ ile gösterilen çarpma işlemi;

$$K_1.K_2 = \left\{\langle x, \mu_{K_1.K_2}(x) \rangle : x \in E\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.2.Sezgisel Bulanık Küme

Tanım 2.2.1:[29] $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme olsun. $\forall x \in X$ için $0 \leq \mu_L(x) + \vartheta_L(x) \leq 1$ olmak üzere $\mu_L : X \to [0,1]$ ve $\vartheta_L : X \to [0,1]$ fonksiyonları ile bir sezgisel bulanık küme;

$L = \{\langle x, \mu_L(x), \vartheta_L(x) \rangle : x \in X\}$ kümesi ile verilir.

Burada $\mu_L(x)$, $x \in X$ in L kümesine ait olma derecesi ve $\vartheta_L(x)$, $x \in X$ in L kümesine ait olmama derecesidir.

Tanım 2.2.2:[29] $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme olsun. $L = \{\langle x, \mu_L(x), \vartheta_L(x)\rangle : x \in X\}$ kümesi bir sezgisel bulanık küme olmak üzere $\forall x \in X$ için $\pi_L(x)$ belirsizlik (kararsızlık) derecesi $\pi_L(x) = 1 - \mu_L(x) - \vartheta_L(x)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.3:[29] $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $L_1, L_2 \subseteq X$ kümeleri iki sezgisel bulanık küme olsun. L_1 ile L_2 kümelerinin sırasıyla üyelik fonksiyonları $\mu_{L_1}(x)$ ve $\mu_{L_2}(x)$, üyelik olmama fonksiyonları $\vartheta_{L_1}(x)$ ve $\vartheta_{L_2}(x)$ olsun. $\forall x \in X$ için iki kümenin eşitliği,

$\mu_{L_1}(x) = \mu_{L_2}(x)$ ve $\vartheta_{L_1}(x) = \vartheta_{L_2}(x)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.4:[29] $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $L_1, L_2 \subseteq X$ kümeleri iki sezgisel bulanık küme olsun. L_1 ile L_2 kümelerinin sırasıyla üyelik fonksiyonları $\mu_{L_1}(x)$ ve $\mu_{L_2}(x)$, üyelik olmama fonksiyonları $\vartheta_{L_1}(x)$ ve $\vartheta_{L_2}(x)$ olsun. $\forall x \in X$ için $L_1 \subseteq L_2$, $\mu_{L_1}(x) \leq \mu_{L_2}(x)$ ve $\vartheta_{L_1}(x) \geq \vartheta_{L_2}(x)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.5:[29] $X \neq \emptyset$ ve $L \subseteq X$ olmak üzere L sezgisel bulanık kümesinin tümleyeni L^c ile gösterilir. $\forall x \in X$ için

$\mu_{L^c}(x) = \vartheta_L(x)$ ve $\vartheta_{L^c}(x) = \mu_L(x)$ olmak üzere L kümesinin tümleyeni

$L^c = \{\langle x, \mu_{L^c}(x), \vartheta_{L^c}(x)\rangle : x \in X\} = \{\langle x, \vartheta_L(x), \mu_L(x)\rangle : x \in X\}$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.6:[29] $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $L_1, L_2 \subseteq X$ olup L_1 ile L_2 sezgisel bulanık küme olsun. $\forall x \in X$ için

$\mu_{L_1 \cup L_2}(x)$ =max$\{\mu_{L_1}(x), \mu_{L_2}(x)\}$ ve

$\nu_{L_1 \cup L_2}(x)$ =min$\{\vartheta_{L_1}(x), \vartheta_{L_2}(x)\}$ olmak üzere L_1 ile L_2 nin birleşimi

$$L_1 \cup L_2 = \{\langle x, \mu_{L_1 \cup L_2}(x), \vartheta_{L_1 \cup L_2}(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.7:[29] $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $L_1, L_2 \subseteq X$ olup L_1 ile L_2 sezgisel bulanık küme olsun. $\forall x \in X$ için

$\mu_{L_1 \cap L_2}(x)$ =min$\{\mu_{L_1}(x), \mu_{L_2}(x)\}$ ve $\nu_{L_1 \cap L_2}(x)$ =max$\{\vartheta_{L_1}(x), \vartheta_{L_2}(x)\}$

olmak üzere L_1 ile L_2 nin kesişimi

$$L_1 \cap L_2 = \{\langle x, \mu_{L_1 \cap L_2}(x), \vartheta_{L_1 \cap L_2}(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.8:[29] $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $L_1, L_2 \subseteq X$ olup L_1 ile L_2 sezgisel bulanık küme olsun. $\forall x \in E$ için L_1 ile L_2 nin toplaması $L_1 + L_2$ ile gösterilir ve

$$L_1 + L_2 = \{\langle x, \mu_{L_1}(x) + \mu_{L_2}(x) - \mu_{L_1}(x).\mu_{L_2}(x), \nu_{L_1}(x).\nu_{L_2}(x)\rangle : x \in E\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.9:[29] $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $L_1, L_2 \subseteq X$ olup L_1 ile L_2 sezgisel bulanık küme olsun. $\forall x \in E$ için L_1 ile L_2 nin çarpımı $L_1.L_2$ ile gösterilir ve

$$L_1.L_2 = \{\langle x, \mu_{L_1}(x).\mu_{L_2}(x), \nu_{L_1}(x) + \nu_{L_2}(x) - \nu_{L_1}(x).\nu_{L_2}(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.3.Nötrosofik Küme

Tanım 2.3.1:[1] X evrensel bir küme olsun. $\forall x \in X$ için $0^- \leq T_A(x) + I_A(x) + F_A(x) \leq 3^+$ olmak üzere $T_A: X \to]0^-, 1^+[$, $I_A: X \to]0^-, 1^+[$, $F_A: X \to]0^-, 1^+[$ fonksiyonları ile X üzerinde bir A nötrosofik küme;

$A = \{\langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x)\rangle : x \in X\}$ ile tanımlanır.

Burada $T_A(x)$, $x \in X$ in A kümesindeki doğruluk derecesi, $I_A(x)$, $x \in X$ in A kümesindeki kararsızlık derecesi, $F_A(x)$, $x \in X$ in A kümesindeki yanlışlık derecesidir.

Tanım 2.3.2:[21] X evrensel bir küme ve $A_1, A_2 \subseteq X$ olup A_1 ile A_2 nötrosofik küme olsun. $\forall x \in X$ için $A_1 \subseteq A_2$ olmak üzere

$$T_{A_1}(x) \leq T_{A_2}(x)$$

$$I_{A_1}(x) \geq I_{A_2}(x)$$

$$F_{A_1}(x) \geq F_{A_2}(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.3:[21] X evrensel bir küme ve A nötrosofik küme olsun. $T_{A^c}(x) = F_A(x), I_{A^c}(x) = 1 - I_A(x)$, $F_{A^c}(x) = T_A(x)$ olmak üzere A kümesinin tümleyeni

$$A^C = \{\langle x, T_{A^c}(x), I_{A^c}(x), F_{A^c}(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.4:[21] X evrensel bir küme ve $A_1, A_2 \subseteq X$ olup A_1 ile A_2 nötrosofik küme olsun. $\forall x \in X$ için iki kümenin eşitliği

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 \text{ ve } A_2 \subseteq A_1$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.5:[21] X evrensel bir küme ve $A_1, A_2 \subseteq X$ olup A_1 ile A_2 nötrosofik küme olsun.

$T_{A_1 \cup A_2}(x)$ =max $\{T_{A_1}(x), T_{A_2}(x)\}$, $I_{A_1 \cup A_2}(x)$ =min $\{I_{A_1}(x),\ I_{A_2}(x)\}$,

$F_{A_1 \cup A_2}(x)$ =min $\{F_{A_1}(x), F_{A_2}(x)\}$ olmak üzere A_1 ile A_2 nin birleşimi

$$A_1 \cup A_2 = \{\langle x, T_{A_1 \cup A_2}(x), I_{A_1 \cup A_2}(x), F_{A_1 \cup A_2}(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.6:[21] X evrensel bir küme ve $A_1, A_2 \subseteq X$ olup A_1 ile A_2 nötrosofik küme olsun.

$T_{A_1 \cap A_2}(x)$ =min $\{T_{A_1}(x), T_{A_2}(x)\}$, $I_{A_1 \cap A_2}(x)$ =max $\{I_{A_1}(x),\ I_{A_2}(x)\}$,

$F_{A_1 \cap A_2}(x)$ =max $\{F_{A_1}(x), F_{A_2}(x)\}$

olmak üzere A_1 ile A_2 nin kesişimi

$$A_1 \cap A_2 = \{\langle x, T_{A_1 \cap A_2}(x), I_{A_1 \cap A_2}(x), F_{A_1 \cap A_2}(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.7:[21] X evrensel bir küme ve $A_1, A_2 \subseteq X$ olup A_1 ile A_2 nötrosofik küme olsun.$\forall x \in E$ için $T_{A_1+A_2}(x) = T_{A_1}(x) + T_{A_2}(x) - T_{A_1}(x).T_{A_2}(x)$, $I_{A_1+A_2}(x) = I_{A_1}(x).I_{A_2}(x)$, $F_{A_1+A_2}(x) = F_{A_1}(x).F_{A_2}(x)$ olmak üzere A_1 ile A_2 nin $A_1 + A_2$ ile gösterilen toplama işlemi;

$$A_1 + A_2 = \{\langle x, T_{A_1+A_2}(x), I_{A_1+A_2}(x), F_{A_1+A_2}(x)\rangle : x \in E\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.8:[21] X evrensel bir küme ve $A_1, A_2 \subseteq X$ olup A_1 ile A_2 nötrosofik küme olsun.$\forall x \in E$ için $T_{A_1.A_2}(x) = T_{A_1}(x).T_{A_2}(x)$, $I_{A_1.A_2}(x) = I_{A_1}(x) + I_{A_2}(x) - I_{A_1}(x).I_{A_2}(x)$, $F_{A_1.A_2}(x) = F_{A_1}(x) + F_{A_2}(x) - F_{A_1}(x).F_{A_2}(x)$ olmak üzere A_1 ile A_2 nin $A_1.A_2$ ile gösterilen çarpma işlemi;

$$A_1.A_2 = \{\langle x, T_{A_1.A_2}(x), I_{A_1.A_2}(x), F_{A_1.A_2}(x)\rangle : x \in E\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.4.Nötrosofik Üçlü Küme

Tanım 2.4.1:[6] N herhangi bir küme ve $*$ bir ikili işlem olsun. Eğer N kümesi aşağıdaki şartları sağlarsa $(N,*)$ kümesine bir nötrosofik üçlü küme denir.

1) Her $x \in N$ için $x *$ etkisiz(x)= etkisiz$(x)* x = x$ olacak şekilde bir etkisiz(x) elemanı vardır.

2) Her $x \in N$ için, $x *$ ters(x)= ters$(x)* x$ = etkisiz(x) olacak şekilde bir ters(x) elemanı vardır.

Ayrıca bir $x \in N$ nötrosofik üçlüsü $(x$, etkisiz(x), ters$(x))$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.2:[32] $(N,*)$ bir nötrosofik üçlü küme olsun. Eğer $d_N: N \times N \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu ve $(N,*)$ kümesi aşağıdaki şartları sağlarsa d_N fonksiyonu bir nötrosofik üçlü metriktir.

a) Her $x, y \in N$ için $x * y \in N$

b) $d_N(x,y) \geq 0$

c) $x = y \Rightarrow d_N(x,y) = 0$

d) $d_N(x,y) = d_N(y,x)$

e) Eğer her bir $x, z \in N$ eleman çifti için

$d_N(x,z) \leq d_N(x, z *$ etkisiz$(y))$ olacak şekilde en az bir $y \in N$ elemanı varsa,

$d_N\big(x, z * \text{etkisiz}(y)\big) \leq d_N(x,y) + d_N(y,z)$ dir.

Ayrıca, $((N,*), d_N)$ bir nötrosofik üçlü metrik uzaydır.

Tanım 2.4.3:[32] $((N,*), d_{\boldsymbol{N}})$ bir nötrosofik üçlü metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $d_N(x, \{x_n\}) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ mevcutsa $\{x_n\}$, x' e yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ya da $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.4:[32] $((N,*), d_{\boldsymbol{N}})$ bir nötrosofik üçlü metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda $d_N(\{x_m\}, \{x_n\}) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcutsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.4.5:[32] $((N,*), d_{\boldsymbol{N}})$ bir nötrosofik üçlü metrik uzay olsun. Eğer bu uzaydaki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise $((N,*), d_{\boldsymbol{N}})$ uzayına tam uzay denir.

Tanım 2.4.6:[36] $(N,*)$ bir nötrosofik üçlü küme olsun. Eğer $d_p\colon N \times N \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, d_p bir nötrosofik üçlü kısmi metriktir.

a) Her $x, y \in N$ için $x * y \in N$,

b) $d_p(x,y) \geq d_p(x,x) \geq 0$,

c) Eğer $d_p(x,y) = d_p(x,x) = d_p(y,y) = 0$ ise $x = y$ olacak şekilde en az bir $x, y \in N$ öğesi vardır,

d) $d_p(x,y) = d_p(y,x)$,

e) Her bir $x, z \in N$ çifti için $d_p(x,z) \leq d_p(x, z * \text{etkisiz}(y))$ olacak şekilde en az bir $y \in N$ varsa, o zaman $d_p\big(x, z * \text{etkisiz}(y)\big) \leq d_p(x,y) + d_p(y,z) - d_p(y,y)$.

Bu durumda, $((N,*), d_p)$ nötrosofik üçlü kısmi metrik uzay olarak adlandırılır.

2.5.Metrik Uzay

Tanım 2.5.1: X boştan farklı bir küme olmak üzere,

$d_1)$ $d(x,y) \geq 0$,

$d_2)$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

$d_3)$ $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$,

d_4) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

koşullarını sağlayan $d: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 2.5.2: [55] X boş olmayan bir küme ve $p: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y, z \in X$ için

p_1) $x = y \Leftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$,

p_2) $p(x,x) \leq p(x,y)$,

p_3) $p(x,y) = p(y,x)$,

p_4) $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$

şartları sağlanırsa (X, p) ikilisine kısmi metrik uzay denir.

2.6.Çift Kutuplu Metrik Uzay

Tanım 2.6.1:[45] (X, Y) boş olmayan kümelerin ikilisi olsun ve bir $d: X \times Y \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu verilsin. d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye (X, Y) üzerinde bir çift kutuplu metrik veya bipolar metrik denir.

i) $\forall (x, y) \in X \times Y$ için $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

ii) $\forall u \in X \cap Y$ için $d(u,u) = 0$

iii) $\forall u, v \in X \cap Y$ için $d(u,v) = d(v,u)$

iv) $\forall (x,y), (x',y') \in X \times Y$ için $d(x,y) \leq d(x,y') + d(x',y') + d(x',y)$ aksiyomlarını alalım.

Ayrıca, d bir (X, Y) küme ikilisi üzerinde bir çift kutuplu metrik ise, (X, Y, d) üçlüsüne bir çift kutuplu metrik uzay veya bipolar metrik uzay denir.

Tanım 2.6.2:[45] (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay olsun. X, Y ve $X \cap Y$ kümeleri sırasıyla sol,sağ ve merkezi noktalar olarak adlandırılır ve yalnızca soldan (veya sağdan veya merkezden) oluşan herhangi bir sıra noktalar (X, Y, d) ‘de sol (veya sağ veya merkezi) dizi olarak adlandırılır.

Tanım 2.6.3:[45] Bir (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayında bir (x_n) sol dizisi ve bir y sağ noktası için verilen her $\varepsilon > 0$ reel sayısına karşılık $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$olması $d(x_n, y) < \varepsilon$ olmasını gerektirecek şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) sol dizisinin y sağ noktasına yakınsadığı söylenir ve bu durum $(x_n) \rightharpoondown y$ veya $\lim_{n\to\infty}(x_n) = y$ ile gösterilir.

Benzer şekilde, bir (y_n) sağ dizi ve x sol noktası için verilen her $\varepsilon > 0$sayısına karşılık $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ olması $d(x, y_n) < \varepsilon$ olmasını gerektirecek şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (y_n) sağ dizisinin x sol noktasına yakınsak olduğu söylenir ve $y_n \rightharpoonup x$ veya $\lim_{n\to\infty}(y_n) = x$ ile gösterilir.

Eğer bir (u_n) merkezi dizisi ve u merkezi noktası için hem $(u_n) \rightharpoondown u$ hem de $(u_n) \rightharpoonup u$ ise bu durumda (u_n)'in u' ya yakınsadığı söylenir ve bu durum $(u_n) \to u$ veya $\lim_{n\to\infty}(u_n) = u$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.6.4:[45] (x_n, y_n) bir (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayında bir çift dizi olmak üzere eğer hem (x_n) sol dizisi hem de (y_n) sağ dizisi yakınsak ise (x_n, y_n) çift dizisinin bu uzayda yakınsak olduğu söylenir.

Eğer (x_n) sol dizisi ve (y_n) sağ dizisi ortak bir noktaya yakınsak ise, (x_n, y_n) çift dizisinin bu noktaya çifte yakınsak ya da biyakınsak olduğu söylenir.

Tanım 2.6.5:[45] (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayında (x_n, y_n) bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $m, n \geq n_0$ olması $d(x_n, y_m) < \varepsilon$ olmasını gerektirecek şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n, y_n)'e bir Cauchy çift dizisi veya Cauchy bidizisi denir.

BÖLÜM III

3.1.Nötrosofik Üçlü Çift Kutuplu Metrik Uzay

Bu bölümde nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay ve özelliklerine yer verilmiştir. Ayrıca, bu yapılarla ilgili teoremlere, örneklere ve sonuçlara yer verilmiştir.

Tanım 3.1.1:[49] $(\mathrm{X},*), (\mathrm{Y},*)$ birer nötrosofik üçlü küme olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $d: X \times Y \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonuna nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik denir.

i)$\forall a, b \in X$ için $a * b \in X$

$\forall c, d \in Y$ için $c * d \in Y$

ii) $\forall a \in X$ ve $\forall b \in Y$ için $d(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$

iii)$\forall u \in X \cap Y$ için $d(u, u) = 0$

iv) $\forall u, v \in X \cap Y$ için $d(u, v) = d(v, u)$

v) $\forall (x, y), (x', y') \in X \times Y$ alalım.

Her bir $(x, y) \in X \times Y$ için

$d(x, y) \leq d\big(x, y * \text{etkisiz}(y')\big) \leq d(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y'))$

$d(x, y) \leq d(x * \text{etkisiz}(x'), y) \leq d(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y'))$

olacak şekilde en az bir $(x', y') \in X \times Y$ varsa,

$d(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y')) \leq d(x, y') + d(x', y') + d(x', y)$.

Ayrıca, $\big(\big((\mathrm{X}, \mathrm{Y}),*\big), \mathrm{d}\big)$ nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzaydır.

Örnek 3.1.2: [49] $X = \{0,2,4,6,8\}$ ve $Y = \{0,4,5,6\}$ kümelerini alalım.

$(X,.)$ ve $(Y,.)$, $(\mathbb{Z}_{10},.)$da nötrosofik üçlü küme olduğunu gösterelim:

$(X,.)$ için nötrosofik üçlüler; (0,0,0), (2,6,8), (4,6,4), (6,6,6), (8,6,2),

$(Y,.)$ için nötrosofik üçlüler; (0,0,0), (4,6,4)), (5,5,5), (6,6,6) dir.

Böylece, $(X,.)$ ve $(Y,.)$ nötrosofik üçlü kümelerdir.

$d: X \times Y \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$'yi alalım.$d(k,m) = |2^{k} - 2^{m}|$ gibi bir fonksiyon olsun. Şimdi d, nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik olduğunu gösterelim:

i) $\forall a, b \in X$ için $a.b \in X$ 'dir.

$0.0 = 0 \in X$, $0.2 = 0 \in X$, $0.4 = 0 \in X$, $0.6 = 0 \in X$, $0.8 = 0 \in X$, $2.2 = 4 \in X$, $2.4 = 8 \in X$, $2.6 = 2 \in X$, $2.8 = 6 \in X$,$4.4 = 6 \in X$, $4.6 = 4 \in X$, $4.8 = 2 \in X$, $6.6 = 6 \in X$, $6.8 = 8 \in X$, $8.8 = 8 \in X$.

$\forall c, d \in Y$ için $c.d \in Y$ 'dir.

$0.0 = 0 \in Y$, $0.4 = 0 \in Y$, $0.5 = 0 \in Y$, $0.6 = 0 \in Y$, $4.4 = 6 \in Y$, $4.5 = 0 \in Y$,

$4.6 = 4 \in Y$, $5.5 = 5 \in Y$, $5.6 = 0 \in Y$, $6.6 = 6 \in Y$.

ii) $\forall a \in X, \forall b \in Y$ için $d(a,b) = |2^{a} - 2^{b}| = 0$ ise a=b dir.

iii) $\forall u \in X \cap Y$ için $d(u,u) = |2^{u} - 2^{u}| = 0$ dır.

iv) $\forall u, v \in X \cap Y$ için $d(u,v) = |2^{u} - 2^{v}| = |2^{v} - 2^{u}| = d(v,u)$ dır.

v)

$$X \times Y = \begin{Bmatrix} (0,0), (0,4), (0,5), (0,6), (2,0), (2,4), (2,5), (2,6), (4,0), (4,4), \\ (4,5), (4,6), (6,0), (6,4), (6,5), (6,6), (8,0), (8,4), (8,5), (8,6) \end{Bmatrix}$$

Her bir $(x,y) \in X \times Y$ için,

$d(0,0) = 0 \leq d\big(0,0.\text{etkisiz}(5)\big) = 0 \leq d\big(0.\text{etkisiz}(2), 0.\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d(0,0) = 0,$

$d(0,0) = 0 \leq d(0.\text{etkisiz}(2), 0) = 0 \leq d\big(0.\text{etkisiz}(2), 0.\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d(0,0) = 0$

olacak şekilde bir $(2,5) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x, y) = (0,0)$ için bir $(z, t) = (2,5) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(0.\text{etkisiz}(2), 0.\text{etkisiz}(5)\big) = d(0,0) = |2^0 - 2^0| = 0$

$\leq d(0,5) + d(2,5) + d(2,0)$

$=|2^0 - 2^5| + |2^2 - 2^5| + |2^2 - 2^0| = 31 + 28 + 3 = 62$

$\Rightarrow d\big(0.\text{etkisiz}(2), 0.\text{etkisiz}(5)\big) \leq d(0,5) + d(2,5) + d(2,0)$ olur.

$d(0,4) = 15 \leq d\big(0,4.\text{etkisiz}(6)\big) = 15 \leq d\big(0.\text{etkisiz}(2), 4.\text{etkisiz}(6)\big) = 15,$

$d(0,4) = 15 \leq d(0.\text{etkisiz}(2), 4) = 15 \leq d\big(0.\text{etkisiz}(2), 4.\text{etkisiz}(6)\big) = 15$

olacak şekilde bir $(2,6) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x, y) = (0,4)$ için bir $(z, t) = (2,6) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(0.\text{etkisiz}(2), 4.\text{etkisiz}(6)\big) = d(0,4) = |2^0 - 2^4| = 15$

$\leq d(0,6) + d(2,6) + d(2,4)$

$=|2^0 - 2^6| + |2^2 - 2^6| + |2^2 - 2^4| = 63 + 60 + 12 = 135$

$\Rightarrow d\big(0.\text{etkisiz}(2), 4.\text{etkisiz}(6)\big) \leq d(0,6) + d(2,6) + d(2,4)$ olur.

$d(0,5) = 31 \leq d\big(0,5.\text{etkisiz}(5)\big) = 31 \leq d\big(0.\text{etkisiz}(8), 5.\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d(0,5) = 31,$

$d(0,5) = 31 \leq d(0.\text{etkisiz}(8), 5) = 31 \leq d\big(0.\text{etkisiz}(8), 5.\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d(0,5) = 31$

olacak şekilde bir $(8,5) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x, y) = (0,5)$ için bir $(z, t) = (8,5) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(0.\text{etkisiz}(8), 5.\text{etkisiz}(5)\big) = d(0,5) = |2^0 - 2^5| = 31$

$\leq d(0,5) + d(8,5) + d(8,5)$

$=|2^0 - 2^5| + |2^8 - 2^5| + |2^8 - 2^5| = 31 + 224 + 224 = 479$

$\Rightarrow d\big(0.\text{etkisiz}(8), 5.\text{etkisiz}(5)\big) \leq d(0,5) + d(8,5) + d(8,5)$ olur.

$d(0,6) = 63 \leq d\big(0,6.\text{etkisiz}(4)\big) = 63 \leq d\big(0.\text{etkisiz}(8), 6.\text{etkisiz}(4)\big)$

$= d(0,6) = 63,$

$d(0,6) = 63 \leq d(0.\text{etkisiz}(8), 6)= 63 \leq d\big(0.\text{etkisiz}(8), 6.\text{etkisiz}(4)\big)$

$= d(0,6) = 63$

olacak şekilde bir $(8,4) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x, y) = (0,6)$ için bir $(z, t) = (8,4) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(0.\text{etkisiz}(8), 6.\text{etkisiz}(4)\big) = d(0,6) = |2^0 - 2^6| = 63$

$\leq d(0,4) + d(8,4) + d(8,6)$

$=|2^0 - 2^4| + |2^8 - 2^4| + |2^8 - 2^6| = 15 + 240 + 192 = 447$

$\Rightarrow d\big(0.\text{etkisiz}(8), 6.\text{etkisiz}(4)\big) \leq d(0,4) + d(8,4) + d(8,6)$ olur.

$d(2,0) = 3 \leq d\big(2,0.\text{etkisiz}(6)\big) = 3 \leq d\big(2.\text{etkisiz}(4), 0.\text{etkisiz}(6)\big)$

$= d(2,0) = 3,$

$d(2,0) = 3 \leq d(2.\text{etkisiz}(4), 0) = 3 \leq d\big(2.\text{etkisiz}(4), 0.\text{etkisiz}(6)\big)$

$= d(2,0) = 3$

olacak şekilde bir $(4,6) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x, y) = (2,0)$ için bir $(z, t) = (4,6) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(2.\,\text{etkisiz}(4), 0.\,\text{etkisiz}(6)\big) = d(2,0) = |2^2 - 2^0| = 3$

$\leq d(2,6) + d(4,6) + d(4,0)$

$=|2^2 - 2^6| + |2^4 - 2^6| + |2^4 - 2^0| = 60 + 48 + 15 = 123$

$\Rightarrow d\big(2.\,\text{etkisiz}(4), 0.\,\text{etkisiz}(6)\big) \leq d(2,6) + d(4,6) + d(4,0)$ olur.

$d(2,4) = 12 \leq d\big(2,4.\,\text{etkisiz}(6)\big) = 12 \leq d\big(2.\,\text{etkisiz}(8), 4.\,\text{etkisiz}(6)\big)$

$= d(2,4) = 12,$

$d(2,4) = 12 \leq d(2.\,\text{etkisiz}(8), 4) = 12 \ \leq d\big(2.\,\text{etkisiz}(8), 4.\,\text{etkisiz}(6)\big)$

$= d(2,4) = 12$

olacak şekilde bir $(8,6) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x, y) = (2,4)$ için bir $(z, t) = (8,6) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(2.\,\text{etkisiz}(8), 4.\,\text{etkisiz}(6)\big) = d(2,4) = |2^2 - 2^4| = 12$

$\leq d(2,6) + d(8,6) + d(8,4)$

$=|2^2 - 2^6| + |2^8 - 2^6| + |2^8 - 2^4| = 60 + 192 + 240 = 492$

$\Rightarrow d\big(2.\,\text{etkisiz}(8), 4.\,\text{etkisiz}(6)\big) \leq d(2,6) + d(8,6) + d(8,4)$ olur.

$d(2,5) = 28 \leq d\big(2,5.\,\text{etkisiz}(5)\big) = 28 \leq d\big(2.\,\text{etkisiz}(0), 5.\,\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d(0,5) = 31,$

$d(2,5) = 28 \leq d(2.\,\text{etkisiz}(0), 5) = 31 \leq d\big(2.\,\text{etkisiz}(0), 5.\,\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d(0,5) = 31$

olacak şekilde bir $(0,5) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x,y) = (2,5)$ için bir $(z,t) = (0,5) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(2.\,\text{etkisiz}(0), 5.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d(0,5) = |2^0 - 2^5| = 31$

$\leq d(2,5) + d(0,5) + d(0,5)$

$=|2^2 - 2^5| + |2^0 - 2^5| + |2^0 - 2^5| = 28 + 31 + 31 = 90$

$\Rightarrow d\big(2.\,\text{etkisiz}(0), 5.\,\text{etkisiz}(5)\big) \leq d(2,5) + d(0,5) + d(0,5)$ olur.

$d(2,6) = 60 \leq d\big(2,6.\,\text{etkisiz}(4)\big) = 60 \leq d\big(2.\,\text{etkisiz}(0), 6.\,\text{etkisiz}(4)\big)$

$= d(0,6) = 63,$

$d(2,6) = 60 \leq d(2.\,\text{etkisiz}(0), 6) = 63 \leq d\big(2.\,\text{etkisiz}(0), 6.\,\text{etkisiz}(4)\big)$

$= d(0,6) = 63$

olacak şekilde bir $(0,4) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x,y) = (2,6)$ için bir $(z,t) = (0,4) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(2.\,\text{etkisiz}(0), 6.\,\text{etkisiz}(4)\big) = d(0,6) = |2^0 - 2^6| = 63$

$\leq d(2,4) + d(0,4) + d(0,6)$

$=|2^2 - 2^4| + |2^0 - 2^4| + |2^0 - 2^6| = 12 + 15 + 63 = 90$

$\Rightarrow d\big(2.\,\text{etkisiz}(0), 6.\,\text{etkisiz}(4)\big) \leq d(2,4) + d(0,4) + d(0,6)$ olur.

$d(4,0) = 15 \leq d\big(4,0.\,\text{etkisiz}(6)\big) = 15 \leq d\big(4.\,\text{etkisiz}(2), 0.\,\text{etkisiz}(6)\big)$

$= d(4,0) = 15,$

$d(4,0) = 15 \leq d(4.\,\text{etkisiz}(2), 0) = 15 \leq d\big(4.\,\text{etkisiz}(2), 0.\,\text{etkisiz}(6)\big)$

$= d(4,0) = 15$

olacak şekilde bir $(2,6) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x, y) = (4,0)$ için bir $(z, t) = (2,6) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(4.\text{etkisiz}(2), 0.\text{etkisiz}(6)\big) = d(4,0) = |2^4 - 2^0| = 15$

$\leq d(4,6) + d(2,6) + d(2,0)$

$=|2^4 - 2^6| + |2^2 - 2^6| + |2^2 - 2^0| = 48 + 60 + 3 = 111$

$\Rightarrow d\big(4.\text{etkisiz}(2), 0.\text{etkisiz}(6)\big) \leq d(4,6) + d(2,6) + d(2,0)$ olur.

$d(4,4) = 0 \leq d\big(4,4.\text{etkisiz}(0)\big) = 15 \leq d\big(4.\text{etkisiz}(8), 4.\text{etkisiz}(0)\big)$

$= d(4,0) = 15,$

$d(4,4) = 0 \leq d(4.\text{etkisiz}(8), 4) = 0 \leq d\big(4.\text{etkisiz}(8), 4.\text{etkisiz}(0)\big)$

$= d(4,0) = 15$

olacak şekilde bir $(8,0) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x, y) = (4,4)$ için bir $(z, t) = (8,0) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(4.\text{etkisiz}(8), 4.\text{etkisiz}(0)\big) = d(4,0) = |2^4 - 2^0| = 15$

$\leq d(4,0) + d(8,0) + d(8,4)$

$=|2^4 - 2^0| + |2^8 - 2^0| + |2^8 - 2^4| = 15 + 255 + 240 = 510$

$\Rightarrow d\big(4.\text{etkisiz}(8), 4.\text{etkisiz}(0)\big) \leq d(4,0) + d(8,0) + d(8,4)$ olur.

$d(4,5) = 16 \leq d\big(4,5.\text{etkisiz}(5)\big) = 16 \leq d\big(4.\text{etkisiz}(8), 5.\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d(4,5) = 16,$

$d(4,5) = 16 \leq d(4.\text{etkisiz}(8), 5) = 16 \leq d\big(4.\text{etkisiz}(8), 5.\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d(4,5) = 16$

olacak şekilde bir $(8,5) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x, y) = (4,5)$ için bir $(z, t) = (8,5) \in X \times Y$ vardır ki

$d(4.\text{etkisiz}(8), 5.\text{etkisiz}(5)) = d(4,5) = |2^4 - 2^5| = 16$

$\leq d(4,5) + d(8,5) + d(8,5)$

$=|2^4 - 2^5| + |2^8 - 2^5| + |2^8 - 2^5| = 16 + 224 + 224 = 464$

$\Rightarrow d(4.\text{etkisiz}(8), 5.\text{etkisiz}(5)) \leq d(4,5) + d(8,5) + d(8,5)$ olur.

$d(4,6) = 48 \leq d(4,6.\text{etkisiz}(2)) = 48 \leq d(4.\text{etkisiz}(8), 6.\text{etkisiz}(2))$

$= d(4,6) = 48,$

$d(4,6) = 48 \leq d(4.\text{etkisiz}(8), 6) = 48 \leq d(4.\text{etkisiz}(8), 6.\text{etkisiz}(2))$

$= d(4,6) = 48$

olacak şekilde bir $(8,2) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x, y) = (4,6)$ için bir $(z, t) = (8,2) \in X \times Y$ vardır ki

$d(4.\text{etkisiz}(8), 6.\text{etkisiz}(2)) = d(4,6) = |2^4 - 2^6| = 48$

$\leq d(4,2) + d(8,2) + d(8,6)$

$=|2^4 - 2^2| + |2^8 - 2^2| + |2^8 - 2^6| = 12 + 252 + 192 = 456$

$\Rightarrow d(4.\text{etkisiz}(8), 6.\text{etkisiz}(2)) \leq d(4,2) + d(8,2) + d(8,6)$ olur.

$d(6,0) = 63 \leq d(6,0.\text{etkisiz}(5)) = 63 \leq d(6.\text{etkisiz}(4), 0.\text{etkisiz}(5))$

$= d(6,0) = 63,$

$d(6,0) = 63 \leq d(6.\text{etkisiz}(4), 0) = 63 \leq d(6.\text{etkisiz}(4), 0.\text{etkisiz}(5))$

$= d(6,0) = 63$

olacak şekilde bir $(4,5) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x,y) = (6,0)$ için bir $(z,t) = (4,5) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(6.\,\text{etkisiz}(4), 0.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d(6,0) = |2^6 - 2^0| = 63$

$\leq d(6,5) + d(4,5) + d(4,0)$

$=|2^6 - 2^5| + |2^4 - 2^5| + |2^4 - 2^0| = 32 + 16 + 15 = 63$

$\Rightarrow d\big(6.\,\text{etkisiz}(4), 0.\,\text{etkisiz}(5)\big) \leq d(6,5) + d(4,5) + d(4,0)$ olur.

$d(6,4) = 48 \leq d\big(6,4.\,\text{etkisiz}(0)\big) = 63 \leq d\big(6.\,\text{etkisiz}(8), 4.\,\text{etkisiz}(0)\big)$

$= d(6,0) = 63,$

$d(6,4) = 48 \leq d(6.\,\text{etkisiz}(8), 4) = 48 \leq d\big(6.\,\text{etkisiz}(8), 4.\,\text{etkisiz}(0)\big)$

$= d(6,0) = 63$

olacak şekilde bir $(8,0) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x,y) = (6,4)$ için bir $(z,t) = (8,0) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(6.\,\text{etkisiz}(8), 4.\,\text{etkisiz}(0)\big) = d(6,0) = |2^6 - 2^0| = 63$

$\leq d(6,0) + d(8,0) + d(8,4)$

$=|2^6 - 2^0| + |2^8 - 2^0| + |2^8 - 2^4| = 63 + 255 + 240 = 558$

$\Rightarrow d\big(6.\,\text{etkisiz}(8), 4.\,\text{etkisiz}(0)\big) \leq d(6,0) + d(8,0) + d(8,4)$ olur.

$d(6,5) = 32 \leq d\big(6,5.\,\text{etkisiz}(4)\big) = 63 \leq d\big(6.\,\text{etkisiz}(2), 5.\,\text{etkisiz}(4)\big)$

$= d(6,0) = 63,$

$d(6,5) = 32 \leq d(6.\,\text{etkisiz}(2), 5) = 32 \leq d\big(6.\,\text{etkisiz}(2), 5.\,\text{etkisiz}(4)\big)$

$= d(6,0) = 63$

olacak şekilde bir $(2,4) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x, y) = (6{,}5)$ için bir $(z, t) = (2{,}4) \in X \times Y$ vardır ki

$d(6.\text{etkisiz}(2), 5.\text{etkisiz}(4)) = d(6{,}0) = |2^6 - 2^0| = 63$

$\leq d(6{,}4) + d(2{,}4) + d(2{,}5)$

$=|2^6 - 2^4| + |2^2 - 2^4| + |2^2 - 2^5| = 48 + 12 + 28 = 88$

$\Rightarrow d(6.\text{etkisiz}(2), 5.\text{etkisiz}(4)) \leq d(6{,}4) + d(2{,}4) + d(2{,}5)$ olur.

$d(6{,}6) = 0 \leq d(6{,}6.\text{etkisiz}(4)) = 0 \leq d(6.\text{etkisiz}(8), 6.\text{etkisiz}(4))$

$= d(6{,}6) = 0,$

$d(6{,}6) = 0 \leq d(6.\text{etkisiz}(8), 6) = 0 \leq d(6.\text{etkisiz}(8), 6.\text{etkisiz}(4))$

$= d(6{,}6) = 0$

olacak şekilde bir $(8{,}4) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x, y) = (6{,}6)$ için bir $(z, t) = (8{,}4) \in X \times Y$ vardır ki

$d(6.\text{etkisiz}(8), 6.\text{etkisiz}(4)) = d(6{,}6) = |2^6 - 2^6| = 0$

$\leq d(6{,}4) + d(8{,}4) + d(8{,}6)$

$=|2^6 - 2^4| + |2^8 - 2^4| + |2^8 - 2^6| = 48 + 240 + 192 = 480$

$\Rightarrow d(6.\text{etkisiz}(8), 6.\text{etkisiz}(4)) \leq d(6{,}4) + d(8{,}4) + d(8{,}6)$ olur.

$d(8{,}0) = 255 \leq d(8{,}0.\text{etkisiz}(5)) = 255 \leq d(8.\text{etkisiz}(4), 0.\text{etkisiz}(5))$

$= d(8{,}0) = 255,$

$d(8{,}0) = 255 \leq d(8.\text{etkisiz}(4), 0) = 255 \leq d(8.\text{etkisiz}(4), 0.\text{etkisiz}(5))$

$= d(8{,}0) = 255$

olacak şekilde bir $(4{,}5) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x,y) = (8,0)$ için bir $(z,t) = (4,5) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(8.\,\text{etkisiz}(4), 0.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d(8,0) = |2^8 - 2^0| = 255$

$\leq d(8,5) + d(4,5) + d(4,0)$

$=|2^8 - 2^5| + |2^4 - 2^5| + |2^4 - 2^0| = 224 + 16 + 15 = 255$

$\Rightarrow d\big(8.\,\text{etkisiz}(4), 0.\,\text{etkisiz}(5)\big) \leq d(8,5) + d(4,5) + d(4,0)$ olur.

$d(8,4) = 240 \leq d\big(8,4.\,\text{etkisiz}(0)\big) = 255 \leq d\big(8.\,\text{etkisiz}(6), 4.\,\text{etkisiz}(0)\big)$

$= d(8,0) = 255,$

$d(8,4) = 240 \leq d(8.\,\text{etkisiz}(6), 4) = 240 \leq d\big(8.\,\text{etkisiz}(6), 4.\,\text{etkisiz}(0)\big)$

$= d(8,0) = 255$

olacak şekilde bir $(6,0) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x,y) = (8,4)$ için bir $(z,t) = (6,0) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(8.\,\text{etkisiz}(6), 4.\,\text{etkisiz}(0)\big) = d(8,0) = |2^8 - 2^0| = 255$

$\leq d(8,0) + d(6,0) + d(6,4)$

$=|2^8 - 2^0| + |2^6 - 2^0| + |2^6 - 2^4| = 255 + 63 + 48 = 366$

$\Rightarrow d\big(8.\,\text{etkisiz}(6), 4.\,\text{etkisiz}(0)\big) \leq d(8,0) + d(6,0) + d(6,4)$ olur.

$d(8,5) = 224 \leq d\big(8,5.\,\text{etkisiz}(0)\big) = 255 \leq d\big(8.\,\text{etkisiz}(4), 5.\,\text{etkisiz}(0)\big)$

$= d(8,0) = 255,$

$d(8,5) = 224 \leq d(8.\,\text{etkisiz}(4), 5) = 224 \leq d\big(8.\,\text{etkisiz}(4), 5.\,\text{etkisiz}(0)\big)$

$= d(8,0) = 255$

olacak şekilde bir $(4,0) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x, y) = (8,5)$ için bir $(z, t) = (4,0) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(8.\,\text{etkisiz}(4), 5.\,\text{etkisiz}(0)\big) = d(8,0) = |2^8 - 2^0| = 255$

$\leq d(8,0) + d(4,0) + d(4,5)$

$=|2^8 - 2^0| + |2^4 - 2^0| + |2^4 - 2^5| = 255 + 15 + 16 = 286$

$\Rightarrow d\big(8.\,\text{etkisiz}(4), 5.\,\text{etkisiz}(0)\big) \leq d(8,0) + d(4,0) + d(4,5)$ olur.

$d(8,6) = 192 \leq d\big(8{,}6.\,\text{etkisiz}(5)\big) = 255 \leq d\big(8.\,\text{etkisiz}(2), 6.\,\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d(8,0) = 255,$

$d(8,6) = 192 \leq d(8.\,\text{etkisiz}(2), 6) = 192 \leq d\big(8.\,\text{etkisiz}(2), 6.\,\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d(8,0) = 255$

olacak şekilde bir $(2,5) \in X \times Y$ vardır.

Ayrıca,

$(x, y) = (8,6)$ için bir $(z, t) = (2,5) \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(8.\,\text{etkisiz}(2), 6.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d(8,0) = |2^8 - 2^0| = 255$

$\leq d(8,5) + d(2,5) + d(2,6)$

$=|2^8 - 2^5| + |2^2 - 2^5| + |2^2 - 2^6| = 224 + 28 + 60 = 312$

$\Rightarrow d\big(8.\,\text{etkisiz}(2), 6.\,\text{etkisiz}(5)\big) \leq d(8,5) + d(2,5) + d(2,6)$ olur.

Her bir $(x, y) \in X \times Y$ için

$d(x, y) \leq d\big(x, y.\,\text{etkisiz}(t)\big) \leq d(x.\,\text{etkisiz}(z), y.\,\text{etkisiz}(t))$

$d(x, y) \leq d(x.\,\text{etkisiz}(z), y) \leq d(x.\,\text{etkisiz}(z), y.\,\text{etkisiz}(t))$

olacak şekilde en az bir $(z, t) \in X \times Y$ olduğundan, d nötrosofik üçlü çift kutuplu metriktir.

$\big(((X, Y), .), d\big)$de nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzaydır.

Örnek 3.1.3: (X, Y) küme ikilisi ve $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ olsun. s(A), A kümesinin eleman sayısı; s(B), B kümesinin eleman sayısı olsun.

$A \cup A = A \cup A = A$, $B \cup B = B \cup B = B$ olduğundan $\text{etkisiz}(A) = A$, $\text{ters}(A) = A$, $\text{etkisiz}(B) = B$, $\text{ters}(B) = B$ alabiliriz.

Böylece $((X, Y), \cup)$ bir nötrosofik üçlü kümedir.

Şimdi, $d: X \times Y \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonunu $d(A, B) = |s(A) - s(B)|$ olacak şekilde tanımlayalım. d fonksiyonunun bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik olup-olmadığını gösterelim:

$i)$ $\forall A, C \in X$ için $A \cup C \in X$

$\forall B, D \in Y$ için $B \cup D \in Y$

ii) $\forall A \in X$ ve $\forall B \in Y$ için

$d(A, B) \Rightarrow |s(A) - s(B)| = 0 \Rightarrow A = B$ olmayabilir.

iii) $\forall A \in X \cap Y$ için $d(A, A) = |s(A) - s(A)| = 0$

iv) $\forall A, B \in X \cap Y$ için $d(A, B) = |s(A) - s(B)| = |s(B) - s(A)| = d(B, A)$

v) $\forall (A, B), (A', B') \in X \times Y$ ve $(A', B') \subset (A, B)$ olsun.

Her bir $(A, B) \in X \times Y$ için

$$d(A, B) \leq d\big(A, B \cup \text{etkisiz}(B')\big) \leq d(A \cup \text{etkisiz}(A'), B \cup \text{etkisiz}(B'))$$

$$d(A, B) \leq d(A \cup \text{etkisiz}(A'), B) \leq d(A \cup \text{etkisiz}(A'), B \cup \text{etkisiz}(B'))$$

olacak şekilde en az bir $(A', B') \in X \times Y$ vardır.

$$d(A \cup \text{etkisiz}(A'), B \cup \text{etkisiz}(B')) = \big|s\big(A \cup \text{etkisiz}(A')\big) - s(B \cup \text{etkisiz}(B'))\big|$$

$$=\Big|s(A) + s\big(\text{etkisiz}(A')\big) - s\big(A \cap \text{etkisiz}(A')\big) - \Big(s(B) + s\big(\text{etkisiz}(B')\big) - s\big(B \cap \text{etkisiz}(B')\big)\Big)\Big|$$

$$=\big|s(A) + s\big(\text{etkisiz}(A')\big) - s\big(A \cap \text{etkisiz}(A')\big) - s(B) - s\big(\text{etkisiz}(B')\big) + s\big(B \cap \text{etkisiz}(B')\big)\big|$$

$\leq |s(A) - s(B')| + |s(A') - s(B')| + |s(A') - s(B)|$

olur.

ii) şıkkından dolayı d fonksiyonu bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik değildir.

O halde, $(\big((X,Y),\cup\big),d)$ nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay değildir.

Örnek 3.1.4: [49] $X = \{x,y,z\}$ ve $P(X)$, X ‘in kuvvet kümesi; $Y = \{k,l,m\}$ ve $P(Y)$, Y ‘in kuvvet kümesi ve s(A) , A kümesinin eleman sayısı olsun. $(P(X)\backslash X,\ \cup)$ ve $(P(Y)\backslash Y,\ \cup)$ ‘nin nötrosofik üçlü küme olduğunu gösterelim:

Her $A \in P(X)\backslash X$ ve her $A \in P(Y)\backslash Y$ için etkisiz(A)= A ve ters(A)= A alalım.

Böylece $A \cup A = A \cup A = A$ olduğu açıktır.

$d: P(X)\backslash X \times P(Y)\backslash Y \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olacak şekilde $d(A,B) = \left|3^{s(A)} - 3^{s(B)}\right|$ tanımlayalım.

d bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay değildir. Çünkü; $A = \{x,y\}$, $B = \{k,l\}$ için

$d(A,B) = \left|3^{s(A)} - 3^{s(B)}\right| = |3^2 - 3^2| = 0$ ancak $A \neq B$ dir.

Sonuç 3.1.5: [49] Tanım 3.1.1 ve Tanım 2.6.1’den bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay, bir çift kutuplu metrik uzaydan farklıdır. Çünkü; Tanım 2.6.1’de $*$ ikili işlemi yoktur. Ayrıca tanımlarda üçgen eşitsizlikleri farklıdır.

Sonuç 3.1.6: [49] Tanım 3.1.1 ve Tanım 2.4.2’den bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay, bir nötrosofik üçlü metrik uzaydan farklıdır. Çünkü; Tanım 2.4.2’de sadece bir nötrosofik üçlü küme vardır. Ayrıca tanımlarda üçgen eşitsizlikleri farklıdır.

Teorem 3.1.7:[49] $(\big((X,Y),*\big),d)$ nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olsun.

Aşağıdaki şartlar sağlanırsa $((X,*),d)$ bir nötrosofik üçlü metrik uzaydır.

a-) $Y = X$

b-) Tanım 3.1.1’deki üçgen eşitsizliğinde $y' = x'$ olsun.

İspat:

i-) $(((X,Y),*),d)$ nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olduğundan $\forall x,z \in X$ için $x*z \in X$ ve $\forall y,t \in Y$ için $y*t \in Y$ alabiliriz ve a) koşulundan dolayı $\forall x,y \in X = Y$ için $x*y \in X = Y$ olur.

ii-) $(((X,Y),*),d)$ nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olduğundan $\forall a \in X$ ve $\forall b \in Y$ için $d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$ alabiliriz ve a) koşulundan dolayı $\forall a,b \in X = Y$ için $d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$ olur.

Bu durumda $d(a,b) \geq 0$ olur.

iii-) $(((X,Y),*),d)$ nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olduğundan $\forall u \in X \cap Y$ için $d(u,u) = 0$ ve a) koşulundan dolayı $y = x \Rightarrow d(x,x) = 0$ olur.

iv-) $(((X,Y),*),d)$ nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olduğundan $\forall u,v \in X \cap Y$ için $d(u,v) = d(v,u)$ alabiliriz ve a) koşulundan dolayı

$\forall x,y \in X \cap X = X$ için $d(x,y) = d(y,x)$ olur.

v-) $(((X,Y),*),d)$ nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzayı olduğundan her bir $(x,y) \in X \times Y$ için

$d(x,y) \leq d(x, y * \text{etkisiz}(y')) \leq d(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y'))$

$d(x,y) \leq d(x * \text{etkisiz}(x'), y) \leq d(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y'))$

olacak şekilde en az bir $(x',y') \in X \times Y$ varsa,

$d(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y')) \leq d(x,y') + d(x',y') + d(x',y)$ alabiliriz.

b) koşulundan dolayı

$d(x,y) \leq d(x, y * \text{etkisiz}(y')) \leq d(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y'))$
$\leq d(x,y') + d(x',x') + d(x',y) = d(x,y') + d(x',y)$ olur.

Ayrıca a) koşulundan her $y' \in X = Y$ için $x,y \in X = Y$ öyle ki $d(x,y) \leq d_N(x, y * \text{etkisiz}(y'))$ den $d_N(x, y * \text{etkisiz}(y')) \leq d(x,y') + d(y',y)$ olur.

Böylece, $((X,*),d)$ bir nötrosofik üçlü metrik uzaydır.

Teorem 3.1.8: [49] $\left(\left((X,Y),*\right),d\right)$ nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olsun. $((X \cap Y,*)$ nötrosofik üçlü küme ise $\left(\left((X \cap Y, X \cap Y),*\right),d\right)$ nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzaydır.

İspat:$((X \cap Y),*)$ nötrosofik üçlü küme olsun.

i) $\left(\left((X,Y),*\right),d\right)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olduğundan $\forall s,t \in X$ için $s * t \in X$ ve $\forall k,m \in Y$ için $k * m \in Y$ yazabiliriz. Dolayısıyla $\forall a,b \in X \cap Y$ için $a * b \in X \cap Y$ olduğu açıktır.

ii) $\left(\left((X,Y),*\right),d\right)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olduğundan $\forall a \in X$ ve $\forall c \in Y$ için $d(a,c) = 0 \Rightarrow a = c$ yazabiliriz. Buradan $\forall a \in X \cap Y$, $\forall c \in X \cap Y$ için $d(a,c) = 0 \Rightarrow a = c$.

iii) $\left(\left((X,Y),*\right),d\right)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olduğundan $\forall u \in X \cap Y$ için $d(u,u) = 0$ yazabiliriz. Buradan $\forall u \in (X \cap Y) \cap (X \cap Y) = X \cap Y$ için $d(u,u) = 0$.

iv) $\left(\left((X,Y),*\right),d\right)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olduğundan $\forall u,v \in X \cap Y$ için $d(u,v) = d(v,u)$ yazabiliriz.

$\forall u,v \in (X \cap Y) \cap (X \cap Y) = X \cap Y$ için $d(u,v) = d(v,u)$.

v) $\left(\left((X,Y),*\right),d\right)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olduğundan $\forall (r,f),(r',f') \in X \times Y$ alalım. $\forall (r,f) \in X \times Y$ için

$d(r,f) \leq d\big(r, f * \text{etkisiz}(f')\big) \leq d(r * \text{etkisiz}(r'), f * \text{etkisiz}(f'))$

$d(r,f) \leq d(r * \text{etkisiz}(r'), f) \leq d(r * \text{etkisiz}(r'), f * \text{etkisiz}(f'))$

olacak şekilde en az bir $(r',f') \in X \times Y$ varsa

$d(r * \text{etkisiz}(r'), f * \text{etkisiz}(f')) \leq \; d(r,f') + d(r',f') + d(r',f)$ yazabiliriz.

Buradan,

$\forall (a,b),(a',b') \in (X \cap Y) \times (X \cap Y)$ alalım.

Her bir $(a,b) \in (X \cap Y) \times (X \cap Y)$ için

$d(a,b) \leq d\big(a, b * \text{etkisiz}(b')\big) \leq d(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b'))$

$d(a,b) \leq d(a * \text{etkisiz}(a'), b) \leq d(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b'))$

olacak şekilde en az bir $(a', b') \in (X \cap Y) \times (X \cap Y)$ varsa,

$d(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b')) \leq \ d(a, b') + d(a', b') + d(a', b)$ olur.

Böylece, $(\big((X \cap Y, X \cap Y), *\big), d)$ nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzaydır.

Teorem 3.1.9: [49] $(\big((X, Y), *\big), d)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay A, X'in bir nötrosofik üçlü alt kümesi ve B, Y'nin bir nötrosofik üçlü alt kümesi olsun. Bu durumda $(\big((A, B), *\big), d)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzaydır.

İspat: $(\big((X, Y), *\big), d)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay, A, X'in nötrosofik üçlü alt kümesi ve B, Y'nin bir nötrosofik üçlü alt kümesi olduğunu varsayıyoruz.

i) $(\big((X, Y), *\big), d)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olduğundan $\forall a, c \in X$ için $a * c \in X$ ve $\forall b, d \in Y$ için $b * d \in Y$ yazabiliriz. Ayrıca, $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ olduğundan $\forall a, c \in A$ için $a * c \in A$ ve $\forall b, d \in B$ için $b * d \in B$ olur.

ii) $(\big((X, Y), *\big), d)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olduğundan $\forall a \in X$ ve $\forall b \in Y$ için $d(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$ yazabiliriz. Buradan, $\forall a \in A \subseteq X$ ve $\forall b \in B \subseteq Y$ için $d(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$.

iii) $(\big((X, Y), *\big), d)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olduğundan $\forall u \in X \cap Y$ için $d(u, u) = 0$ yazabiliriz. Buradan, $\forall u \in (A \subseteq X) \cap (B \subseteq Y)$ için $d(u, u) = 0$ olur.

iv) $(\big((X, Y), *\big), d)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olduğundan $\forall u, v \in X \cap Y$ için $d(u, v) = d(v, u)$ yazabiliriz. Buradan, $\forall u, v \in (A \subseteq X) \cap (B \subseteq Y)$ için $d(u, v) = d(v, u)$ olur.

v) $(\big((X, Y), *\big), d)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olduğundan $\forall (x, y), (x', y') \in X \times Y$ alalım.

Her bir $(x, y) \in X \times Y$ için

$d(x, y) \leq \ d\big(x, y * \text{etkisiz}(y')\big) \leq \ d\big(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y')\big)$

$d(x, y) \leq\ d(x * \text{etkisiz}(x'), y) \leq\ d\big(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y')\big)$

olacak şekilde en az bir $(x', y') \in X \times Y$ vardır ki

$d\big(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y')\big) \leq d(x, y') + d(x', y') + d(x', y)$ yazabiliriz.

Buradan,

$\forall(a, b) \in (A \subseteq X) \times (B \subseteq Y)$ için

$d(a, b) \leq\ d\big(a, b * \text{etkisiz}(b')\big) \leq\ d\big(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b')\big)$

$d(a, b) \leq\ d(a * \text{etkisiz}(a'), b) \leq\ d\big(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b')\big)$

olacak şekilde en az bir $(a', b') \in (A \subseteq X) \times (B \subseteq Y)$ vardır ki

$d\big(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b')\big) \leq d(a, b') + d(a', b') + d(a', b)$ olur.

Böylece, $(\big((A, B), *\big), d)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzaydır.

Tanım 3.1.10: [49] $(\big((X, Y), *\big), d)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olsun. Bu uzayda, bir (x_n) sol dizisi ve bir y sağ noktası için verilen her $\varepsilon > 0$ reel sayısına karşılık $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ olması $d(x_n, y) < \varepsilon$ olmasını gerektirecek şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) sol dizisi y sağ noktasına yakınsar, denir ve $(x_n) \rightharpoondown y$ veya $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = y$ ile gösterilir.

Bir (y_n) sağ dizisi ve bir x sol noktası için verilen her $\varepsilon > 0$ reel sayısına karşılık $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ olması $d(x, y_n) < \varepsilon$ olmasını gerektirecek şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (y_n) sağ dizisi x sol noktasına yakınsar, denir ve $y_n \rightharpoonup x$ veya $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n) = x$ ile gösterilir.

Eğer bir (u_n) merkezi dizisi ve u merkezi noktası için, hem $(u_n) \rightharpoondown u$ hem de $(u_n) \rightharpoonup u$ ise bu durumda (u_n), u 'ya yakınsar, denir ve $(u_n) \to u$ veya $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = u$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.11: [49] $(\big((X, Y), *\big), d)$ nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzayında (x_n, y_n) bir çift dizi olmak üzere eğer hem (x_n) sol dizisi hem de (y_n) sağ dizisi yakınsak ise (x_n, y_n) çift dizisi bu uzayda yakınsaktır.

Eğer (x_n) sol dizisi ve (y_n) sağ dizisi ortak bir noktaya yakınsak ise (x_n, y_n) çift dizisinin bu noktaya nötrosofik üçlü çifte yakınsak ya da nötrosofik üçlü biyakınsak denir.

Tanım 3.1.12:[49] $(((X,Y),*), d)$ nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzayında (x_n, y_n) bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $m, n \geq n_0$ olması $d(x_n, y_m) < \varepsilon$ olmasını gerektirecek şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n, y_n)'e bir nötrosofik üçlü Cauchy çift dizisi veya nötrosofik üçlü Cauchy bidizisi denir.

Teorem 3.1.13: [49] $(((X,Y),*), d)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay ve (x_n, y_n) bu uzayda bir çift dizi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa, (x_n, y_n) bir nötrosofik üçlü Cauchy çift dizisidir.

a) $(x_n) \rightharpoondown x$ ve $(y_n) \rightharpoonup x$ olacak şekilde (x_n, y_n) bir nötrosofik üçlü çifte yakınsak dizi

b) En az bir (x, x) vardır öyle ki

$d(x_n, y_n) \leq d(x_n\, , y_n * \text{etkisiz}(x)) \leq d(x_n * \text{etkisiz}(x)\, , y_n * \text{etkisiz}(x))$

$d(x_n, y_n) \leq d(x_n * \text{etkisiz}(x), y_n) \leq d(x_n * \text{etkisiz}(x)\, , y_n * \text{etkisiz}(x))$

İspat: $(x_n) \rightharpoondown x$ ve $(y_n) \rightharpoonup x$ olduğundan

$\forall n, m \geq n_0$ için $d(x_n\, , x) < \varepsilon$ ve $d(y_n\, , x) < \varepsilon$ yazabiliriz. (1)

Ayrıca, Tanım 3.1.1 (üçgen eşitsizliği) ve b) koşulundan

$d(x_n, y_n) \leq d\big(x_n * \text{etkisiz}(x)\, , y_n * \text{etkisiz}(y)\big) \leq d(x_n, y) + d(x, y) + d(y_n, x)$ yazabiliriz.

(1)'den

$d(x_n, y_n) \leq d\big(x_n * \text{etkisiz}(x)\, , y_n * \text{etkisiz}(y)\big) \leq d(x_n, y) + d(x, y) + d(y_n, x)$

$= \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ olur.

Böylece, (x_n, y_n) bir nötrosofik üçlü Cauchy çift dizisidir.

Tanım 3.1.14: [49] $(((X,Y),*),d)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her (x_n,y_n) nötrosofik üçlü Cauchy çift dizisi yakınsak ise $(((X,Y),*),d)$ uzayına nötrosofik üçlü çift kutuplu tam uzay denir.

BÖLÜM IV

4.1.Nötrosofik Üçlü Kısmi Çift Kutuplu Metrik Uzay

Bu bölümde nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay ve özelliklerine yer verilmiştir. Ayrıca, bu yapılarla ilgili teoremlere, örneklere ve sonuçlara yer verilmiştir.

Tanım 4.1.1: [50] $(X,\ *)$ ve $(Y,*)$ iki nötrosofik üçlü küme ve $d_{pb}: X \times Y \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer d_{pb}, (X, $*$) ve (Y, $*$) aşağıdaki koşulları sağlarsa, o zaman d_{pb} nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik olarak adlandırılır.

i-) $\forall a, b \in X$ için $a * b \in X$,

$\forall c, d \in Y$ için $c * d \in Y$,

ii-) $\forall x \in X$ ve $\forall y \in Y$ için

$d_{pb}(x, y) \geq d_{pb}(x, x) \geq 0$ ve $d_{pb}(x, y) \geq d_{pb}(y, y) \geq 0$,

iii-) Eğer $d_{pb}(x, y) = d_{pb}(x, x) = d_{pb}(y, y) = 0$ ise $d_{pb}(x, y) = 0$ olacak şekilde en az bir $x, y \in X \cap Y$ eleman çifti vardır,

iv-)$\forall\ x, y \in X \cap Y$ için $d_{pb}(x, y) = d_{pb}\ (y, x)$,

v-) $\forall (x, y), (x', y') \in X \times Y$ alalım. Her bir $(x, y) \in X \times Y$ için

$d_{pb}(x, y) \leq d_{pb}\big(x, y * \text{etkisiz}(y')\big) \leq d_{pb}(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y'))$ ve

$d_{pb}(x, y) \leq d_{pb}(x * \text{etkisiz}(x'), y) \leq d_{pb}(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y'))$

olacak şekilde en az bir $(x', y') \in X \times Y$ varsa,

$d_{pb}(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y')) \leq d_{pb}(x, y') + d_{pb}(x', y') + d_{pb}(x', y) - \min \big\{d_{pb}(x', x')\ , d_{pb}(y', y')\big\}$.

Bu durumda, $\left(\left((\mathrm{X},\mathrm{Y}),*\right), d_{pb}\right)$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay olarak adlandırılır.

Örnek 4.1.2: [50] $X = \{0, 3, 6, 9, 10, 12\}$ ve $Y = \{0,\ 5,\ 6, 10\}$ olsun. $(X, .)$ ve $(Y, .)$'nin $(\mathbb{Z}_{15}, .)$ içindeki nötrosofik üçlü kümeler olduğunu gösteriyoruz.

$(X, .)$ için nötrosofik üçlüler (0, 0, 0), (3, 6, 12), (6, 6, 6), (9, 6, 9), (10, 10, 10), (12, 6, 3).

$(Y, .)$ için nötrosofik üçlüler (0, 0, 0), (5, 10, 5), (6, 6, 6), (10, 10, 10).

Böylece, $(X, .)$ ve $(Y, .)$ nötrosofik üçlü kümelerdir.

Ayrıca, $d_{pb}: X \times Y \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ fonksiyonunu $d_{pb}(s, r) = max\{|3^{s} - 1|, |3^{r} - 1|\}$ olacak şekilde tanımlarız. d_{pb} 'nin bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik olduğunu gösteriyoruz.

i-)$0.0 = 0 \in X,\ 0.3 = 0 \in X,\ 0.6 = 0 \in X,\ 0.9 = 0 \in X, 0.10 = 0 \in X,\ 0.12 = 0 \in X, 3.3 = 9 \in X, 3.6 = 3 \in X, 3.9 = 12 \in X, 3.10 = 0 \in X, 3.12 = 6 \in X, 6.6 = 6 \in X,\ 6.9 = 9 \in X, 6.10 = 0 \in X, 6.12 = 12 \in X, 9.9 = 6 \in X, 9.10 = 0 \in X, 9.12 = 3 \in X, 10.10 = 10 \in X, 12.10 = 0 \in X, 12.12 = 9 \in X$.

Böylece, $\forall a, b \in X$ için $a.b \in X$.

Ayrıca, $0.0 = 0 \in Y, 0.5 = 0 \in Y, 0.6 = 0 \in Y, 0.10 = 0 \in Y, 5.5 = 10 \in Y, 5.10 = 5 \in Y, 5.6 = 0 \in Y,\ 10.10 = 10 \in Y, 10.6 = 0 \in Y, 6.6 = 6 \in Y$.

Böylece, $\forall c, d \in Y$ için $c.d \in Y$.

ii-) $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ için eğer

$d_{pb}(x, y) = \max\{|3^{x} - 1|, |3^{y} - 1|\}$,

$d_{pb}(x, x) = \max\{|3^{x} - 1|, |3^{x} - 1|\}$,

$d_{pb}(y, y) = \max\{|3^{y} - 1|, |3^{y} - 1|\}$,

ise $d_{pb}(x, y) \geq d_{pb}(x, x) \geq 0$ ve $d_{pb}(x, y) \geq d_{pb}(y, y) \geq 0$.

iii-) $d_{pb}(x,y) = d_{pb}(x,x) = d_{pb}(y,y) = 0$ için $d_{pb}(x,y) = 0$ ise en az bir çift $x, y \in X \cap Y$ vardır.

$d_{pb}(x,y) = \max\{|3^x - 1|, |3^y - 1|\} = 0$ ise $3^x - 1 = 0$ ve $3^y - 1 = 0$.

$3^x = 1$ ve $3^y = 1$ ise $x, y \in X \cap Y$ eleman çiftleridir, çünkü $x = 0 \in X$ ve

$y = 0 \in Y$.

iv) $\forall x, y \in X \cap Y$ için $d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,x)$.

$d_{pb}(x,y) = \max\{|3^x - 1|, |3^y - 1|\} = \max\{|3^y - 1|, |3^x - 1|\} = d_{pb}(y,x)$.

v) $d_{pb}(0,0) = 0 \leq d_{pb}\big(0\,,0.\,\text{etkisiz}(6)\big) = 0$

$\leq d_{pb}\big(0.\,\text{etkisiz}(3), 0.\,\text{etkisiz}(6)\big) = d_{pb}(0,0) = 0,$

$d_{pb}(0,0) = 0 \leq d_{pb}(0.\,\text{etkisiz}(3), 0) = 0$

$\leq d_{pb}\big(0.\,\text{etkisiz}(3), 0.\,\text{etkisiz}(6)\big) = d_{pb}(0,0) = 0.$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(0.\,\text{etkisiz}(3), 0.\,\text{etkisiz}(6)\big) = d_{pb}(0,0) = 0 \leq d_{pb}(0,6) + d_{pb}(3,6) + d_{pb}(3,0) - \min\big\{d_{pb}(3,3), d_{pb}(6,6)\big\}$ olur.

$d_{pb}(0,5) = 0 \leq d_{pb}\big(0{,}5.\,\text{etkisiz}(10)\big)$

$= d_{pb}(0,5) = max\{|3^0 - 1|, |3^5 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(0.\,\text{etkisiz}(6), 5.\,\text{etkisiz}(10)\big) = d_{pb}(0,5),$

$d_{pb}(0,5) = 0 \leq d_{pb}(0.\,\text{etkisiz}(6), 5)$

$= d_{pb}(0,5) = max\{|3^0 - 1|, |3^5 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(0.\,\text{etkisiz}(6), 5.\,\text{etkisiz}(10)\big) = d_{pb}(0,5).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(0.\,\text{etkisiz}(6), 5.\,\text{etkisiz}(10)\big) = d_{pb}(0,5) \leq d_{pb}\,(0,10) + d_{pb}(6,10) + d_{pb}(6,5) - min\big\{d_{pb}(6,6), d_{pb}(10,10)\big\}$ olur.

$d_{pb}(0,10) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}\big(0, 10.\,\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d_{pb}(0,10) = max\{|3^{0} - 1|, |3^{10} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(0.\,\text{etkisiz}(3), 10.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{p}(0,10),$

$d_{pb}(0,10) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}(0.\,\text{etkisiz}(3), 10)$

$= d_{pb}(0{,}10) = max\{|3^{0} - 1|, |3^{10} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(0.\,\text{etkisiz}(3), 10.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(0,10).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(0.\,\text{etkisiz}(3), 10.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(0,10) \leq\ d_{pb}(0,5) + d_{pb}(3,5) + d_{p}(3,10) - min\{d_{pb}(3,3), d_{pb}(5,5)\}$ olur.

$d_{pb}(0,6) = |3^{6} - 1| \leq d_{pb}\big(0, 6.\,\text{etkisiz}(6)\big)$

$= d_{pb}(0,6) = max\{|3^{0} - 1|, |3^{6} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(0.\,\text{etkisiz}(3), 6.\,\text{etkisiz}(6)\big) = d_{pb}(0,6),$

$d_{pb}(0,6) = |3^{6} - 1| \leq d_{pb}(0.\,\text{etkisiz}(3), 6)$

$= d_{pb}(0,6) = max\{|3^{0} - 1|, |3^{6} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(0.\,\text{etkisiz}(3), 6.\,\text{etkisiz}(6)\big) = d_{pb}(0,6).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(0.\,\text{etkisiz}(3), 6.\,\text{etkisiz}(6)\big) = d_{pb}(0,6) = 728 \leq\ d_{pb}(0,6) + d_{pb}(3,6) + d_{pb}(3,6) -\ min\{d_{pb}(3,3),\ d_{pb}(6,6)\}$ olur.

$d_{pb}(3,0) = |3^{3} - 1| \leq d_{pb}\big(3, 0.\,\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d_{pb}(3,0) = max\{|3^{3} - 1|, |3^{0} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(3.\,\text{etkisiz}(6), 0.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(3,0),$

$d_{pb}(3,0) = |3^{3} - 1| = 26 \leq d_{pb}(3.\,\text{etkisiz}(6), 0)$

$= d_{pb}(3,0) = max\{|3^3 - 1|, |3^0 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(3.\,\text{etkisiz}(6), 0.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(3,0).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(3.\,\text{etkisiz}(6), 0.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(3,0) = 26 \leq \; d_{pb}(3,5) + d_{pb}(6,5) + d_{pb}(6,0) - \; min\big\{d_{pb}(6,6), d_{pb}(5,5)\big\}$ olur.

$d_{pb}(3,5) = |3^5 - 1| \leq d_{pb}\big(3, 5.\,\text{etkisiz}(10)\big)$

$= d_{pb}(3,5) = max\{|3^3 - 1|, |3^5 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(3.\,\text{etkisiz}(6), 5.\,\text{etkisiz}(10)\big) = d_{pb}(3,5),$

$d_{pb}(3,5) = |3^5 - 1| \leq d_{pb}(3.\,\text{etkisiz}(6), 5)$

$= d_{pb}(3,5) = max\{|3^3 - 1|, |3^5 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(3.\,\text{etkisiz}(6), 5.\,\text{etkisiz}(10)\big) = d_{pb}(3,5).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(3.\,\text{etkisiz}(6), 5.\,\text{etkisiz}(10)\big) \leq \; d_{pb}(3,10) + d_{pb}(6,10) + d_{pb}(6,5) - min\big\{d_{pb}(6,6), d_{pb}(10,10)\big\}$ olur.

$d_{pb}(3,10) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}\big(3, 10.\,\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d_{pb}(3,10) = max\{|3^3 - 1|, |3^{10} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(3.\,\text{etkisiz}(9), 10.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(3,10),$

$d_{pb}(3,10) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}(3.\,\text{etkisiz}(9), 10)$

$= d_{pb}(3,10) = max\{|3^3 - 1|, |3^{10} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(3.\,\text{etkisiz}(9), 10.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(3,10).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(3.\,\text{etkisiz}(9), 10.\,\text{etkisiz}(5)\big) \leq\ d_{pb}(3,5) + d_{pb}(9,5) + d_{pb}(9,10) - min\big\{d_{pb}(9,9),\ d_{pb}(5,5)\big\}$ olur.

$d_{pb}(3,6) = |3^6 - 1| \leq d_{pb}\big(3, 6.\,\text{etkisiz}(6)\big)$

$= d_{pb}(3,6) = max\{|3^3 - 1|, |3^6 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(3.\,\text{etkisiz}(9), 6.\,\text{etkisiz}(6)\big) = d_{pb}(3,6),$

$d_{pb}(3,6) = |3^6 - 1| \leq d_{pb}(3.\,\text{etkisiz}(9), 6)$

$= d_{pb}(3,6) = max\{|3^3 - 1|, |3^6 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(3.\,\text{etkisiz}(9), 6.\,\text{etkisiz}(6)\big) = d_{pb}(3,6).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(3.\,\text{etkisiz}(9), 6.\,\text{etkisiz}(6)\big) = d_{pb}(3,6) \leq\ d_{pb}(3,6) + d_{pb}(9,6) + d_{pb}(9,6) - min\big\{d_{pb}(9,9), d_{pb}(6,6)\big\}$ olur.

$d_{pb}(6,0) = |3^6 - 1| \leq d_{pb}\big(6, 0.\,\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d_{pb}(6,0) = max\{|3^6 - 1|, |3^0 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(6.\,\text{etkisiz}(9), 0.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(6,0),$

$d_{pb}(6,0) = |3^6 - 1| \leq d_{pb}(6.\,\text{etkisiz}(9), 0)$

$= d_{pb}(6,0) = max\{|3^6 - 1|, |3^0 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(6.\,\text{etkisiz}(9), 0.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(6,0).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(6.\,\text{etkisiz}(9), 0.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(6,0) \leq\ d_{pb}(6,5) + d_{pb}(9,5) + d_{pb}(9,0) - min\big\{d_{pb}(9,9), d_{pb}(5,5)\big\}$ olur.

$d_{pb}(6,5) = |3^6 - 1| \leq d_{pb}\big(6, 5.\,\text{etkisiz}(0)\big)$

$= d_{pb}(6,0) = max\{|3^6 - 1|, |3^0 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(6.\text{etkisiz}(12), 5.\text{etkisiz}(0)\big) = d_{pb}(6,0),$

$d_{pb}(6,5) = |3^6 - 1| \leq d_{pb}(6.\text{etkisiz}(12), 5)$

$= d_{pb}(6,5) = max\{|3^6 - 1|, |3^5 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(6.\text{etkisiz}(12), 5.\text{etkisiz}(0)\big) = d_{pb}(6,0).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(6.\text{etkisiz}(12), 5.\text{etkisiz}(0)\big) \leq d_{pb}(6,0)\ d_{pb}(6,0) + d_{pb}(12,0) + d_{pb}(12,5) -\ min\big\{d_{pb}(12,12), d_{pb}(0,0)\big\}$ olur.

$d_{pb}(6,10) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}\big(6, 10.\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d_{pb}(6,10) = max\{|3^6 - 1|, |3^{10} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(6.\text{etkisiz}(0), 10.\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(0,10),$

$d_{pb}(6,10) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}(6.\text{etkisiz}(0), 10)$

$= d_{pb}(0,10) = max\{|3^0 - 1|, |3^{10} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(6.\text{etkisiz}(0), 10.\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(0,10).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(6.\text{etkisiz}(0), 10.\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(0,10) \leq\ d_{pb}(6,5) + d_p(0,5) + d_{pb}(0,10) -\ min\big\{d_{pb}(0,0), d_{pb}(5,5)\big\}$ olur.

$d_{pb}(6,6) = |3^6 - 1| \leq d_{pb}\big(6, 6.\text{etkisiz}(0)\big)$

$= d_{pb}(6,0) = max\{|3^6 - 1|, |3^0 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(6.\text{etkisiz}(3), 6.\text{etkisiz}(0)\big) = d_{pb}(6,0),$

$d_{pb}(6,6) = |3^6 - 1| \leq d_{pb}(6.\text{etkisiz}(3), 6)$

$= d_{pb}(6,6) = max\{|3^6 - 1|, |3^6 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(6.\text{etkisiz}(3), 6.\text{etkisiz}(0)\big) = d_{pb}(6,0).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(6.\text{etkisiz}(3), 6.\text{etkisiz}(0)\big) = d_{pb}(6,0) \leq\ d_{pb}(6,0) + d_{pb}(3,0) + d_{pb}(3,6) -\ min\{d_{pb}(3,3), d_{pb}(0,0)\}$ olur.

$d_{pb}(9,0) = |3^9 - 1| \leq d_{pb}\big(9, 0.\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d_{pb}(9,0) = max\{|3^9 - 1|, |3^0 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(9.\text{etkisiz}(12), 0.\text{etkisiz}(5)\big) = d_p(9,0),$

$d_{pb}(9,0) = |3^9 - 1| \leq d_{pb}(9.\text{etkisiz}(12), 0)$

$= d_{pb}(9,0) = max\{|3^9 - 1|, |3^0 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(9.\text{etkisiz}(12), 0.\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(9,0).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(9.\text{etkisiz}(12), 0.\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(9,0) \leq\ d_{pb}(9,5) + d_{pb}(12,5) + d_{pb}(12,0) -\ min\{d_{pb}(12,12), d_{pb}(5,5)\}$ olur.

$d_{pb}(9,5) = |3^9 - 1| \leq d_{pb}\big(9, 5.\text{etkisiz}(0)\big)$

$= d_{pb}(9,0) = max\{|3^9 - 1|, |3^0 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(9.\text{etkisiz}(12), 5.\text{etkisiz}(0)\big) = d_{pb}(9,0),$

$d_{pb}(9,5) = |3^9 - 1| \leq d_{pb}(9.\text{etkisiz}(12), 5)$

$= d_{pb}(9,5) = max\{|3^9 - 1|, |3^5 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(9.\text{etkisiz}(12), 5.\text{etkisiz}(0)\big) = d_{pb}(9,0).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(9.\text{etkisiz}(12), 5.\text{etkisiz}(0)\big) = d_{pb}(9,0) \leq\ d_{pb}(9,0) + d_{pb}(12,0) + d_{pb}(12,5) -\ min\{d_{pb}(12,12), d_{pb}(0,0)\}$ olur.

$d_{pb}(9,10) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}\big(9, 10.\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d_{pb}(9,10) = max\{|3^9 - 1|, |3^{10} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(9.\,\text{etkisiz}(0), 10.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(0,10),$

$d_{pb}(9,10) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}(9.\,\text{etkisiz}(0), 10)$

$= d_{pb}(0,10) = max\{|3^0 - 1|, |3^{10} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(9.\,\text{etkisiz}(0), 10.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(0,10).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(9.\,\text{etkisiz}(0), 10.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(0,10) \leq\ d_{pb}(9,5) + d_{pb}(0,5) + d_{pb}(0,10) -\ min\big\{d_{pb}(0,0), d_{pb}(5,5)\big\}$ olur.

$d_{pb}(9,6) = |3^9 - 1| \leq d_{pb}\big(9, 6.\,\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d_{pb}(9,0) = max\{|3^9 - 1|, |3^0 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(9.\,\text{etkisiz}(3), 6.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(9,0),$

$d_{pb}(9,6) = |3^9 - 1| \leq d_{pb}(9.\,\text{etkisiz}(3), 6)$

$= d_{pb}(9,6) = max\{|3^9 - 1|, |3^6 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(9.\,\text{etkisiz}(3), 6.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(9,0).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(9.\,\text{etkisiz}(3), 6.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(9,0) \leq\ d_{pb}(9,5) + d_{pb}(3,5) + d_{pb}(3,6) -\ min\big\{d_{pb}(3,3), d_{pb}(5,5)\big\}$ olur.

$d_{pb}(10,0) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}\big(10, 0.\,\text{etkisiz}(6)\big)$

$= d_{pb}(10,0) = max\{|3^{10} - 1|, |3^0 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(10.\,\text{etkisiz}(10), 0.\,\text{etkisiz}(6)\big) = d_{pb}(10,0),$

$d_{pb}(10,0) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}(10.\,\text{etkisiz}(10), 0)$

$= d_{pb}(10,0) = max\{|3^{10} - 1|, |3^0 - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(10.\text{etkisiz}(10), 0.\text{etkisiz}(6)\big) = d_{pb}(10,0)$.

Ayrıca,

$d_{pb}\big(10.\text{etkisiz}(10), 0.\text{etkisiz}(6)\big) = d_{pb}(10,0) \leq\ d_{pb}(10,6) + d_{pb}(10,6) + d_{pb}(10,0) -\ min\big\{d_{pb}(10,10), d_{pb}(6,6)\big\}$ olur.

$d_{pb}(10,5) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}\big(10, 5.\text{etkisiz}(6)\big)$

$= d_{pb}(10,0) = max\{|3^{10} - 1|, |3^{0} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(10.\text{etkisiz}(10), 5.\text{etkisiz}(6)\big) = d_{pb}(10,0)$,

$d_{pb}(10,5) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}(10.\text{etkisiz}(10), 5)$

$= d_{pb}(10,5) = max\{|3^{10} - 1|, |3^{5} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(10.\text{etkisiz}(10), 5.\text{etkisiz}(6)\big) = d_{pb}(10,0)$.

Ayrıca,

$d_{pb}\big(10.\text{etkisiz}(10), 5.\text{etkisiz}(6)\big) = d_{pb}(10,0) \leq\ d_{pb}(10,6) + d_{pb}(10,6) + d_{pb}(10,5) -\ min\big\{d_{pb}(10,10), d_{pb}(6,6)\big\}$ olur.

$d_{pb}(10,10) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}\big(10, 10.\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d_{pb}(10,10) = max\{|3^{10} - 1|, |3^{10} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(10.\text{etkisiz}(3), 10.\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(0,10)$,

$d_{pb}(10,10) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}(10.\text{etkisiz}(3), 10)$

$= d_{pb}(0,10) = max\{|3^{0} - 1|, |3^{10} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(10.\text{etkisiz}(3), 10.\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(0,10)$.

Ayrıca,

$d_{pb}\big(10.\text{etkisiz}(3), 10.\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(0,10) \leq\ d_{pb}(10,5) + d_{pb}(3,5) + d_{pb}(3,10) -\ min\big\{d_{pb}(3,3), d_{pb}(5,5)\big\}$ olur.

$d_{pb}(10,6) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}\big(10, 6.\,\text{etkisiz}(0)\big)$

$= d_{pb}(10,0) = max\{|3^{10} - 1|, |3^{0} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(10.\,\text{etkisiz}(5), 6.\,\text{etkisiz}(0)\big) = d_{pb}(10,0),$

$d_{pb}(10,6) = |3^{10} - 1| \leq d_{pb}(10.\,\text{etkisiz}(5), 6)$

$= d_{pb}(10,6) = max\{|3^{10} - 1|, |3^{6} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(10.\,\text{etkisiz}(5), 6.\,\text{etkisiz}(0)\big) = d_{pb}(10,0).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(10.\,\text{etkisiz}(5), 6.\,\text{etkisiz}(0)\big) = d_{pb}(10,0) \leq\ d_{pb}(10,0) + d_{pb}(5,0) + d_{pb}(5,6) -\ min\big\{d_{pb}(5,5), d_{pb}(0,0)\big\}$ olur.

$d_{pb}(12,0) = |3^{12} - 1| \leq d_{pb}\big(12, 0.\,\text{etkisiz}(5)\big)$

$= d_{pb}(12,0) = max\{|3^{12} - 1|, |3^{0} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(12.\,\text{etkisiz}(6), 0.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(12,0),$

$d_{pb}(12,0) = |3^{12} - 1| \leq d_{pb}(12.\,\text{etkisiz}(6), 0)$

$= d_{pb}(12,0) = max\{|3^{12} - 1|, |3^{0} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(12.\,\text{etkisiz}(6), 0.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(12,0).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(12.\,\text{etkisiz}(6), 0.\,\text{etkisiz}(5)\big) = d_{pb}(12,0) \leq\ d_{pb}(12,5) + d_{pb}(6,5) + d_{pb}(6,0) -\ min\big\{d_{pb}(6,6), d_{pb}(5,5)\big\}$ olur.

$d_{pb}(12,5) = |3^{12} - 1| \leq d_{pb}\big(12, 5.\,\text{etkisiz}(10)\big)$

$= d_{pb}(12,5) = max\{|3^{12} - 1|, |3^{5} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(12.\,\text{etkisiz}(3), 5.\,\text{etkisiz}(10)\big) = d_{pb}(12,5),$

$d_{pb}(12,5) = |3^{12} - 1| \leq d_{pb}(12.\,\text{etkisiz}(3), 5),$

$= d_{pb}(12,5) = max\{|3^{12} - 1|, |3^{5} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(12.\,\text{etkisiz}(3), 5.\,\text{etkisiz}(10)\big) = d_{pb}(12,5).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(12.\,\text{etkisiz}(3), 5.\,\text{etkisiz}(10)\big) = d_{pb}(12{,}5) \leq\ d_{d_{pb}}(12{,}10) + d_{pb}(3{,}10) + d_{pb}(3{,}5) -\ min\{d_{pb}(3{,}3), d_{pb}(10{,}10)\}$ olur.

$d_{pb}(12,10) = |3^{12} - 1| \leq d_{pb}\big(12, 10.\,\text{etkisiz}(0)\big)$

$= d_{pb}(12,0) = max\{|3^{12} - 1|, |3^{0} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(12.\,\text{etkisiz}(6), 10.\,\text{etkisiz}(0)\big) = d_{pb}(12,0),$

$d_{pb}(12,10) = |3^{12} - 1| \leq d_{pb}(12.\,\text{etkisiz}(6), 10)$

$= d_{pb}(12,10) = max\{|3^{12} - 1|, |3^{10} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(12.\,\text{etkisiz}(6), 10.\,\text{etkisiz}(0)\big) = d_{pb}(12,0).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(12.\,\text{etkisiz}(6), 10.\,\text{etkisiz}(0)\big) = d_{pb}(12,0) \leq\ d_{pb}(12,0) + d_{pb}(6,0) + d_{pb}(6,10) -\ min\{d_{pb}(6,6), d_{pb}(10,10)\}$ olur.

$d_{pb}(12,6) = |3^{12} - 1| \leq d_{pb}\big(12, 6.\,\text{etkisiz}(10)\big)$

$= d_{pb}(12,0) = max\{|3^{12} - 1|, |3^{0} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(12.\,\text{etkisiz}(9), 6.\,\text{etkisiz}(10)\big) = d_{pb}(12,0),$

$d_{pb}(12,6) = |3^{12} - 1| \leq d_{pb}(12.\,\text{etkisiz}(9), 6)$

$= d_{pb}(12,6) = max\{|3^{12} - 1|, |3^{6} - 1|\}$

$\leq d_{pb}\big(12.\,\text{etkisiz}(9), 6.\,\text{etkisiz}(10)\big) = d_{pb}(12,0).$

Ayrıca,

$d_{pb}\big(12.\,\text{etkisiz}(9), 6.\,\text{etkisiz}(10)\big) = d_{pb}(12, 0) \leq\ d_{pb}(12, 10) + d_{pb}(9, 10) + d_{pb}(9, 6) -\ min\{d_{pb}(9, 9), d_{pb}(10, 10)\}$ olur.

Böylece $\forall(x, y)$ için en az bir (x', y') varsa

$$d_{pb}(x, y) \leq d_{pb}\big(x, y * \text{etkisiz}(y')\big)\ \leq d_{pb}(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y'))$$

$$d_{pb}(x, y) \leq d_{pb}(x * \text{etkisiz}(x'), y) \leq d_{pb}(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y')),$$

ise

$$d_{pb}(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y')) \leq\ d_{pb}(x, y') + d_{pb}(x', y') + d_{pb}(x', y) - min\{d_{pb}(x', x'), d_{pb}(y', y')\}.$$

Bu nedenle, d_{pb} bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik ve $\big(((X, Y),*), d_{pb}\big)$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay olur.

Sonuç 4.1.3: [50]

1) Nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay, nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay tanımındaki i-), ii-) ve v-) koşulları nedeniyle nötrosofik üçlü kısmi metrik uzaydan farklıdır.

2) Nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay, nötrosofik üçlü metrik uzaydan farklıdır. Çünkü; nötrosofik üçlü metrik uzaydaki üçgen eşitsizliği nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzaydaki üçgen eşitsizliğinden farklıdır.

3) Nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay, nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzaydan farklıdır. Çünkü; nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzaydaki üçgen eşitsizliği nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzaydaki üçgen eşitsizliğinden farklıdır. Ayrıca, bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzayda d_{pb}(x, x) ≠ 0 olabilir.

Teorem 4.1.4: [50] $(((X, Y),*),\ d_{pb})$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $((X,*),\ d_{pb})$ bir nötrosofik üçlü kısmi metrik uzaydır. (Burada X sol kutup, Y sağ kutup olarak alalım. $x' \in X$ ve $y' \in Y$ olsun.)

a) $Y = X$.

b) $y' = x'$, Tanım 4.1.1'deki üçgen eşitliğine göre.

İspat:

i) $(((X,Y),*), d_{pb})$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzaydır. $\forall a, b \in X$ için $a * b \in X$ ve $\forall c, d \in Y$ için $c * d \in Y$ anlamına gelir. Ayrıca, a) koşulundan, $\forall a, c \in X$ = Y için $a * c \in X$ = Y olduğu açıktır.

ii) $(((X,Y),\ *), d_{pb})$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay olduğundan, $\forall a \in X$ ve $\forall b \in Y$ için

$d_{pb}(a,b) \geq d_{pb}(a,a) \geq 0$,

$d_{pb}(a,b) \geq d_{pb}(b,b) \geq 0$ ve a) koşulundan

$\forall a, b \in X$ için $d_{pb}(a,b) \geq d_{pb}(a,a) \geq 0$ olur.

iii) $(((X,Y),*), d_{pb})$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay olduğundan, $d_{pb}(a,b) = d_{pb}(a,a) = d_{pb}(b,b) = 0$ ise $d_{pb}(a,b) = 0$ olacak şekilde en az bir $a, b \in X \cap Y$ vardır ve a) koşulundan eğer $Y = X$ ise $d_{pb}(a,b) = d_{pb}(a,a) = d_{pb}(b,b) = 0$ olduğunda $d_{pb}(a,b) = 0$ olacak şekilde en az bir $a, b \in X \cap X = X$ eleman çifti vardır.

iv) $(((X,Y),*), d_{pb})$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay olduğundan, $\forall a, b \in X \cap Y$ için $d_{pb}(a,b) = d_{pb}(b,a)$. Ayrıca, a) koşulundan $X \cap Y = X$ yazabiliriz. Böylece, $\forall x, y \in X$ için $d_{pb}(a,b) = d_{pb}(b,a)$ olur.

v) $(((X,Y),*), d_{pb})$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay olduğundan, her bir (a,b) için en az bir (a',b') varsa,

$d_{pb}(a,b) \leq d_{pb}(a, b * \text{etkisiz}(b')) \leq d_{pb}(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b'))$ ve

$d_{pb}(a,b) \leq d_{pb}(a * \text{etkisiz}(a'), b) \leq d_{pb}(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b'))$

ise

$d_{pb}(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b')) \leq\ d_{pb}(a, b') + d_{pb}(a', b') + d_{pb}(a', b) -$ min $\{d_{pb}(a', a')\ ,\ d_{pb}(b', b')\}$ dır.

b) koşulundan

$d_{pb}(a, b) \leq d_{pb}\big(a, b * \text{etkisiz}(b')\big)\ \leq d_{pb}\big(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b')\big)$

$\leq\ d_{pb}(a, b') + d_{pb}(a', a') + d_{pb}(a', b)$ −min$\big\{d_{pb}(a', a')\ , d_{pb}(b', b')\big\}$

=$d_{pb}(a, b')$+ $d_{pb}(a', b) -$ min $\{d_{pb}(a', a')\ , d_{pb}(b', b')\}$ bunu yazabiliriz.

Ayrıca a) koşulundan, en azından bir $b' \in Y = X$ her biri için $a, b \in Y = X$ öyle ki

$d_{pb}(a, b) \leq d_{pb}\big(a, b * \text{etkisiz}(b')\big)$ ise $d_{pb}\big(a, b * \text{etkisiz}(b')\big) \leq d_{pb}(a, a') + d_{pb}(a', b)$ −min$\big\{d_{pb}(a', a')\ , d_{pb}(a', a')\big\} = d_{pb}(a, a') + d_{pb}(a', b)$ olur.

Böylece, $((X,*), d_{pb})$ bir nötrosofik üçlü kısmi metrik uzaydır.

Teorem 4.1.5: [50] $\big(\big((X,\ Y),\ *\big),\ d_{pb}\big)$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay olsun. Eğer $(X \cap Y,*)$ bir nötrosofik üçlü küme ise $\big(\big((X \cap Y,\ X \cap Y),\ *\big), d_{pb}\big)$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzaydır.

İspat: $(X \cap Y,*)$**'**nin bir nötrosofik üçlü küme olduğunu varsayıyoruz.

i) $\big(\big((X,\ Y),\ *\big),\ d_{pb}\big)$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay olduğundan, $\forall a, b \in X$ için $a * b \in X$ ve $\forall c, d \in Y$ için $c * d \in Y$. Böylece, $\forall a, c \in X \cap Y$ için $a * c \in X \cap Y$ olduğu açıktır.

ii) $\big(\big((X,\ Y),\ *\big),\ d_{pb}\big)$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay olduğundan, $\forall a \in X$ ve $\forall c \in Y$ için $d_{pb}(a, c) \geq d_{pb}(a, a) \geq 0$ ve $d_{pb}(a, c) \geq d_{pb}(c, c) \geq 0$ dır.

Bu nedenle, $\forall a \in X \cap Y$ ve $\forall c \in X \cap Y$ için

$d_{pb}(a, c) \geq d_{pb}(a, a) \geq 0$ ve $d_{pb}(a, c) \geq d_{pb}(c, c) \geq 0$ olur.

iii) $\big(\big((X,\ Y),\ *\big),\ d_{pb}\big)$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay olduğundan, eğer $d_{pb}\ (a, b)$ = $d_{pb}(a, a)$ = $d_{pb}(b, b) = 0$ ise $d_{pb}\ (a, b)$ = 0 olacak şekilde en az bir $a, b \in X \cap Y$ eleman çifti vardır. Bu nedenle,

$d_{pb}\,(a,b) = d_{pb}(a,a) = d_{pb}(b,b) = 0$ olduğu açıktır, en az bir $a,b \in (X \cap Y) \times (X \cap Y)$ eleman çifti vardır.

iv) $\big(\big((X,\ Y),\ *\big),\ d_{pb}\big)$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay olduğundan, $\forall a,b \in X \cap Y$ için $d_{pb}(a,b) = d_{pb}(b,a)$ dır. Böylece, $\forall a,b \in (X \cap Y) \cap (X \cap Y) = X \cap Y$ için $d_{pb}(a,b) = d_{pb}(b,a)$ olduğu açıktır.

v) $(a,b),(a',b') \in X \times Y$ olsun. Her bir (a,b) için en az bir (a',b') varsa,

$d_{pb}(a,b) \le d_{pb}\big(a, b * \text{etkisiz}(b')\big) \le d_{pb}(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b'))$ ve

$d_{pb}(a,b) \le d_{pb}(a * \text{etkisiz}(a'), b) \le d_{pb}(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b'))$

ise

$d_{pb}(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b')) \le d_{pb}(a,b') + d_{pb}(a',b') + d_{pb}(a',b) - \min\big\{d_{pb}(a',a'),\ d_{pb}(b',b')\big\}$ dır.

Dolayısıyla, her bir $(a,b) \in (X \cap Y) \times (X \cap Y)$ için en az bir $(a',b') \in (X \cap Y) \times (X \cap Y)$ varsa

$d_{pb}(a,b) \le d_{pb}\big(a, b * \text{etkisiz}(b')\big) \le d_{pb}(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b'))$ ve

$d_{pb}(a,b) \le d_{pb}(a * \text{etkisiz}(a'), b) \le d_{pb}(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b'))$

ise

$d_{pb}(a * \text{etkisiz}(a'), b * \text{etkisiz}(b')) \le d_{pb}(a,b') + d_{pb}(a',b') + d_{pb}(a',b) - \min\big\{d_{pb}(a',a'),\ d_{pb}(b',b')\big\}$ olur.

Böylece, $\big(\big((X \cap Y,\ X \cap Y),\ *\big), d_{pb}\big)$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzaydır.

Teorem 4.1.6: [50] $\big(\big((X,Y),*\big), d\big)$ bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay olsun. O halde, $k \in \mathbb{R}^+$ için $d_{kp}(x,y) = d(x,y) + k$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metriktir.

İspat:

i) $\forall a, b \in X$ için $a * b \in X$ ve $\forall c, d \in Y$ için $c * d \in Y$ dir. Çünkü; d bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metriktir.

ii) $\forall x \in X$ ve $\forall y \in Y$ için

$d_{kp}(x, y) \geq d_{kp}(x, x) \geq 0$ ve

$d_{kp}(x, y) \geq d_{kp}(y, y) \geq 0$ olur.

Çünkü; $\forall x, y \in X \cap Y$ için $d(x, x) = 0$ ve $d(y, y) = 0$ olduğundan

$d_{kp}(x, y) = d(x, y) + k,$

$d_{kp}(x, x) = d(x, x) + k,$

$d_{kp}(y, y) = d(y, y) + k$ dır.

iii) Eğer $d_{kp}(x, y) = d_{kp}(x, x) = d_{kp}(y, y) \neq 0$ ise ispat basittir, çünkü
$d_{kp}(x, x) = d(x, x) + k > 0$ $(d(x, x) = 0)$
$d_{kp}(y, y) = d(y, y) + k > 0$ $(d(y, y) = 0)$ olur.
iv) $\forall x, y \in \mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$ için $d_{kp}(x, y) = d_{kp}(y, x)$ dir.
Bunun nedeni, $\forall x, y \in \mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$ için $d_{kp}(x, y) = d(x, y) + k$ ve $d(x, y) = d(y, x)$ olmasıdır.
v) $\forall (x, y), (x', y') \in X \times Y$ alalım. Her $(x, y) \in X \times Y$ için en az bir $(x', y') \in X \times Y$ varsa,
$d_{kp}(x, y) \leq d_{kp}(x, y * \text{etkisiz}(y')) \leq d_{kp}(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y'))$ ve
$d_{kp}(x, y) \leq d_{kp}(x * \text{etkisiz}(x'), y) \leq d_{kp}(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y'))$
ise
$d_{kp}(x, y) \leq d_{kp}(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y'))$
$\leq d_{kp}(x, y') + d_{kp}(x', y') + d_{kp}(x', y) - \min\{d_{kp}(x', x'), d_{kp}(y', y')\}$ dır.

$d_{kp}(x, y) = d(x, y) + k$ ve

$d(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y')) \leq d(x, y') + d(x', y') + d(x', y)$ olduğundan

$d_{kp}(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y'))$

$\leq d(x,y') + k + d(x',y') + k + d(x',y) + k - \min\{d_{kp}(x',x'), d_{kp}(y',y')\}$

$= d(x,y') + d(x',y') + d(x',y) + 3k - \min\{d_{kp}(x',x'), d_{kp}(y',y')\}$

$= d(x,y') + d(x',y') + d(x',y) + 3k - \min\{d(x',x') + k, d(y',y') + k\}$

$= d(x,y') + d(x',y') + d(x',y) + 3k - \min\{k,k\}$

$= d(x,y') + d(x',y') + d(x',y) + 3k - k$

$= d(x,y') + d(x',y') + d(x',y) + 2k$ elde ederiz.

Bu durumda,
$d_{kp}(x * \text{etkisiz}(x'), y * \text{etkisiz}(y')) \leq d_{kp}(x,y') + d_{kp}(x',y') + d_{kp}(x',y) - \min\{d_{kp}(x',x'), d_{kp}(y',y')\}$ olur.

Sonuç 4.1.7: [50] Bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay, bir nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzaydan elde edilebilir.

Tanım 4.1.8: [50] $\left(((X,Y),*), d_{pb}\right)$ nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay olsun. Bu uzayda, bir (x_n) sol dizisi ve bir y sağ noktası için verilen her $\varepsilon > 0$ reel sayısına karşılık $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ olması $d_{pb}(x_n, y) < \varepsilon$-$\min\{d_{pb}(x,x), d_{pb}(y,y)\}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) sol dizisi, y sağ noktasına yakınsar denir ve $\lim_{n\to\infty}(x_n) = y$ veya $(x_n) \rightharpoondown y$ ile gösterilir.

Benzer şekilde, bir (y_n) sağ dizisi ve bir x sol noktası için verilen her $\varepsilon > 0$ reel sayısına karşılık $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ olması $d_{pb}(x, y_n) < \varepsilon$- $\min\{d_{pb}(x,x), d_{pb}(y,y)\}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (y_n) sağ dizisi, x sol noktasına yakınsar denir ve $\lim_{n\to\infty}(y_n) = x$ veya $y_n \rightharpoonup x$ ile gösterilir.

Ayrıca, (u_n) merkezi dizi ve u merkezi nokta için hem $(u_n) \rightharpoondown u$ hem de $(u_n) \rightharpoonup u$ ise (u_n), u noktasına yakınsar denir ve $\lim_{n\to\infty}(u_n) = u$ veya $(u_n) \to u$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.9: [50] $\left(((X,\ Y),\ *), d_{pb}\right)$ nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzayında $(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n})$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift dizi olarak adlandırılır. Eğer hem (x_n) sol dizisi hem de (y_n) sağ dizisi yakınsak ise (x_n, y_n) nötrosofik üçlü kısmi çift dizisi bu uzayda yakınsaktır. Eğer (x_n) sol dizisi ve (y_n) sağ dizisi ortak bir noktaya yakınsak ise (x_n, y_n) nötrosofik üçlü kısmi çift dizisinin bu noktaya nötrosofik üçlü kısmi çifte yakınsak ya da nötrosofik üçlü kısmi biyakınsak denir.

Tanım 4.1.10: [50] $(((X,\ Y),\ *), d_{pb})$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay ve $(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n})$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $m, n \geq n_0$ olması $d_{pb}(x_n, y_m) < \varepsilon$-min $\{d_{pb}(x,x), d_{pb}(y,y)\}$ olmasını gerektirecek şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n, y_n)'e bir nötrosofik üçlü kısmi Cauchy çift dizisi veya nötrosofik üçlü kısmi Cauchy bidizisi denir.

Tanım 4.1.11:[50] $\left(\left((X,Y),*\right), d_{pb}\right)$ bir nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her $(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n})$ nötrosofik üçlü kısmi Cauchy çift dizisi yakınsak ise $\left(\left((X,Y),*\right), d_{pb}\right)$ uzayına nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu tam metrik uzay denir.

BÖLÜM V

SONUÇLAR

Beş bölümden meydana gelen bu çalışmada; birinci bölümde bulanık küme, sezgisel bulanık küme, nötrosofik küme, nötrosofik üçlü küme, nötrosofik üçlü metrik uzay, nötrosofik üçlü kısmi metrik uzay ve çift kutuplu metrik uzayın tarihçesinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde bulanık kümeler [28], sezgisel bulanık kümeler [29], nötrosofik kümeler [1] ve [21], nötrosofik üçlü kümeler [6], nötrosofik üçlü metrik uzaylar [32], çift kutuplu metrik uzay [45], nötrosofik üçlü kısmi metrik uzay [36], çift kutuplu metrik uzayda sol (sağ veya merkez) dizi [45], yakınsaklık [45], çifte yakınsaklık [45], Cauchy çift dizisi [45] tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzay yapısı [49] tanıtılmıştır. Nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzayın, klasik çift kutuplu metrik uzay ve nötrosofik üçlü metrik uzaydan farklı olduğu gösterilmiştir. Dördüncü bölümde nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzay yapısı [50] tanıtılmıştır. Nötrosofik üçlü kısmi çift kutuplu metrik uzayın, klasik çift kutuplu metrik uzaydan, nötrosofik üçlü metrik uzaydan, nötrosofik üçlü kısmi metrik uzaydan ve nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik uzaydan farklı olduğu gösterilmiştir. Böylece nötrosofik üçlü yapılara yeni ve daha genel yapılar eklenmiştir. Tanımlanan nötrosofik üçlü çift kutuplu metrik yapılar, daha önce tanımlanan metrik yapılardan daha genel olduğu, sadece bir kümeye bağlı olarak düşünülmediği ve farklı olan iki durumlu kümeler arasında ilişki kurabilmemizi sağladığı için günümüz teknolojisine, mantığına uygun olarak düşünülmüştür. Yani karşılaştığımız her türlü ikilem durumlarına bu metrik yapısı ile çözüm bulunabilmektedir. Ayrıca bu yapı geliştirilerek farklı alanlara da uygulanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Smarandache, F. (1998). *Neutrosophy: Neutrosophic probability, set and logic*, Rehoboth, Amer. Research Press.

[2] Kandasamy, W. B. V., Smarandache, F. (2004). *Basic neutrosophic algebraic structures and their application to fuzzy and neutrosophic models*, Hexis, Frontigan 219 p.

[3] Kandasamy, W.B.V. , Smarandache, F. (2006). *Some neutrosophic algebraic structures and neutrosophic n-algebraic structures*. Hexis, Frontigan 219 p.

[4] Smarandache, F., Ali, M. (2016, September). Neutrosophic triplet as extension of matter plasma, unmatter plasma, and antimatter plasma. In *APS Annual Gaseous Electronics Meeting Abstracts* (HT6-110).

[5] Smarandache, F., Ali, M. (2014). The Neutrosophic Triplet Group and its Application to Physics, presented by FS to Universidad Nacional de Quilmes. *Department of Science and Technology, Bernal, Buenos Aires, Argentina (02 June 2014)*.

[6] Smarandache, F., Ali, M. (2018). Neutrosophic Triplet Group. *Neural Computing and Applications*. **29(7)**, 595-601.

[7] Smarandache, F., Ali, M. (2017). Neutrosophic Triplet Field Used in Physical Applications, (Log Number: NWS17-2017-000061). In *18th Annual Meeting of the APS Northwest Section, Pacific University, Forest Grove, OR, USA (June 1-3, 2017)*.

[8] Samarandache, F., Ali, M., (2017). Neutrosophic Triplet Ring and its Applications, (Log Number: NWS17-2017-000062). In *18th Annual Meeting of the APS Northwest Section, Pacific University, Forest Grove, OR, USA* (*June 1-3,2017*).

[9] Şahin, M., Kargın, A. (2019). Single Valued Neutrosophic Quadruple Graphs. *Asian Journal of Mathematics and Computer Research*. 243-250.

[10] Broumi, S., Bakali, A., Talea, M., Smarandache, F. (2016). Single Valued Neutrosophic Graphs: Degree, Order and Size. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 2444-2451.

[11] Broumi, S., Bakali, A., Talea, M., Smarandache, F. (2016). Decision-Making Method Based on the Interval Valued Neutrosophic Graph, *Future Technologies, IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 44-50.

[12] Ulucay, V., Şahin, M., Olgun, N. (2018). Time-Neutrosophic Soft Expert Sets and Its Decision Making Problem. *Matematika*. **34(2)**, 246-260.

[13] Uluçay, V., Kilic, A., Yildiz, I., Şahin, M. (2018). A New Approach for Multi-Attribute Decision-Making Problems in Bipolar Neutrosophic Sets. *Neutrosophic Sets and Systems*. **23(1)**, 142-159.

[14] Ulucay, V., Kılıç, A., Şahin, M., Deniz, H. (2019). A New Hybrid Distance-Based Similarity Measure for Refined Neutrosophic Sets and Its Application in Medical Diagnosis. *Matematika: Malaysian Journal of Industrial and Applied Mathematics*. **35(1)**, 83-94.

[15] Broumi, S., Bakali, A., Talea, M., Smarandache, F., Singh, P. K., Uluçay, V., Khan, M. (2019). *Bipolar complex neutrosophic sets and its application in decision making problem*. In Fuzzy Multi-criteria Decision-Making Using Neutrosophic Sets, 677-710. Springer, Cham.

[16] Bakbak, D., Uluçay, V., Şahin, M. (2019). Neutrosophic Soft Expert Multiset and Their Application to Multiple Criteria Decision Making. *Mathematics*. **7(1)**, 50.

[17] Uluçay, V., Şahin, M. (2020). *Decision-making method based on neutrosophic soft expert graphs*. In Neutrosophic Graph Theory and Algorithms, 33-76. IGI Global.

[18] Uluçay, V., Kılıç, A., Yıldız, İ., Şahin, M. (2019). An Outranking Approach for MCDM-Problems with Neutrosophic Multi-Sets. *Neutrosophic Sets and Systems*. **30**.

[19] Uluçay, V., Şahin, M., Hassan, N. (2018). Generalized Neutrosophic Soft Expert Set for Multiple-Criteria Decision-Making. *Symmetry*. **10(10)**, 437.

[20] Ulucay, V., Deli, I., Şahin, M. (2018). Similarity Measures of Bipolar Neutrosophic Sets and Their Application to Multiple Criteria Decision Making. *Neural Computing and Applications*. **29(3)**, 739-748.

[21] Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y. Q., Sunderraman, R. (2010). *Single valued neutrosophic sets*. Multispace Multistructure Volume 4, 410–413 p.

[22] Şahin, M., Olgun, N., Uluçay, V., Kargın, A., Smarandache, F. (2017). A New Similarity Measure Based on Falsity Value Between Single Valued Neutrosophic Sets Based on The Centroid Points of Transformed Single Valued Neutrosophic Numbers With Applications to Pattern Recognition. *Neutrosophic Sets and Systems*. **15**, 31-48.

[23] Şahin, M., Ecemiş, O., Uluçay, V., Kargın, A. (2017). Some New Generalized Aggregation Operators Based on Centroid Single Valued Triangular Neutrosophic Numbers and Their Applications in Multi-Attribute Decision Making. *Asian Journal of Mathematics and Computer Research*. **16(2)**, 63-84.

[24] Chatterjee, R., Majumdar, P., Samanta, S. K. (2019). *Similarity measures in neutrosophic sets-I*. In Fuzzy Multi-criteria Decision-Making Using Neutrosophic Sets, 249-294. Springer, Cham.

[25] Mohana K., Mohanasundari M. (2019). On Some Similarity Measures of Single Valued Neutrosophic Rough Sets. *Neutrosophic Sets and Systems*. **10**.

[26] Smarandache, F., Colhon, M., Vlăduţescu, Ş., Negrea, X. (2019). Word-level neutrosophic sentiment similarity. *Applied Soft Computing*. **80**, 167-176.

[27] Ye, J. (2014). Similarity Measures Between Interval Neutrosophic Sets and Their Applications in Multicriteria Decision-Making. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*. **26(1)**, 165-172.

[28] Zadeh, L. A. (1965). Information and Control. *Fuzzy Sets*. **8(3)**, 338-353.

[29] Atanassov, T. K. (1986). Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets Syst*. **20**,87–96.

[30] Şahin, M., Kargın, A. (2019). Neutrosophic Triplet Metric Topology. *Neutrosophic Set and Systems*. **27**, 154-162.

[31] Ali, M., Smarandache, F., Khan, M. (2018). Study on the development of neutrosophic triplet ring and neutrosophic triplet field. *Mathematics*. **6(4)**, 46.

[32] Şahin, M., Kargın, A. (2017). Neutrosophic Triplet Normed Space. *Open Physics*. **15(1)**, 697-704.

[33] Şahin, M., Kargın, A. (2017). Neutrosophic Triplet Inner Product Space. *Neutrosophic Operational Research*. **2(10)**, 193-215.

[34] Smarandache, F., Şahin, M., Kargın, A. (2018). Neutrosophic Triplet G-Module. *Mathematics*. **6(4)**, 53.

[35] Şahin, M., Kargın, A. (2019). *Chapter seven neutrosophic triplet b-metric space*. Neutrosophic Triplet Structures, 79-89 p.

[36] Şahin, M., Kargın, A., Çoban, M. A. (2018). Fixed Point Theorem for Neutrosophic Triplet Partial Metric Space. *Symmetry*. **10(7)**, 240.

[37] Şahin, M., Kargın, A. (2018). Neutrosophic Triplet v-Generalized Metric Space. *Axioms*. **7(3)**, 67.

[38] Şahin, M., Kargın, A., Smarandache, F. (2019). Neutrosophic Triplet Topology. *Neutrosophic Triplet Research*. **1(4)**, 43-54.

[39] Şahin, M., Kargın, A. (2018). Neutrosophic Triplet Normed Ring Space. *Neutrosophic Set and Systems*. **21**, 20-27.

[40] Smarandache, F., Şahin, M. (2019). *Neutrosophic triplet partial ınner product space*. Neutrosophic Triplet Structures, 10 p.

[41] Şahin, M., Kargın, A. (2019). Neutrosophic Triplet Groups Based on Set Valued Neutrosophic Quadruple Numbers. *Neutrosophic Set and Systems*. **30**, 122-131.

[42] Şahin, M., Kargın, A. (2019). Neutrosophic Triplet Partial v – Generalized Metric Space. *Neutrosophic Triplet Research*. **1**, 22 – 34.

[43] Şahin, M., Kargın, A. (2019). Neutrosophic Triplet Lie Algebra. *Neutrosophic Triplet Research*. **1(6)**, 68-78.

[44] Şahin, M., Kargın, A. (2019). Isomorphism Theorems for Neutrosophic Triplet G-Module. *Neutrosophic Triplet Research*. **1**, 54-67.

[45] Mutlu, A., Gürdal, U. (2016). Bipolar metric spaces and some fixed point theorems. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*. **9(9)**, 5362–5373.

[46] Mutlu, A., Özkan, K., Gürdal, U. (2017). Coupled Fixed Point Theorems on Bipolar Metric Spaces. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*. **10(4)**, 655-667.

[47] Kishore, G. N. V., Agarwal, R. P., Rao, B. S., Rao, R. S. (2018). Caristi type cyclic contraction and common fixed point theorems in bipolar metric spaces with applications. *Fixed point theory and Applications*. **2018(1)**, 1-13.

[48] Rao, B. S., Kishore, G. N. V., Kumar, G. K. (2018). Geraghty Type Contraction and Common Coupled Fixed Point Theorems in Bipolar Metric Spaces With Applications to Homotopy. *International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT)*. **63**.

[49] Şahin, M., Kargın, A., Uz, M. S., Kılıç, A. (2020). *Neutrosophic triplet bipolar metric spaces*. Quadruple Neutrosophic Theory and Applications Volume 1, 150 p.

[50] Şahin, M., Kargın, A., Uz, M. S. (2020). Neutrosophic Triplet Partial Bipolar Metric Spaces. *Neutrosophic Sets and Systems*. **33**, 297-312.

[51] Kishore, G. N. V., Rao, K. P. R., IsIk, H., Srinuvasa Rao, B., Sombabu, A. (2021). Covarian Mappings and Coupled Fiexd Point Results in Bipolar Metric Spaces. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*. **12(1)**, 1-15.

[52] Gürdal, U. T. K. U., Mutlu, A., Özkan, K. (2020). Fixed point results for αψcontractive mappings in bipolar metric spaces. *Journal of Inequalities and Special Functions*. **11(1)**.

[53] Bartwal, A., Dimri, R. C., Prasad, G. (2020). Some fixed point theorems in fuzzy bipolar metric spaces. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*. **13**, 196-204.

[54] Sangurlu Sezen, M. (2020). *Some special functions in orthogonal fuzzy bipolar metric spaces and their fixed point applications*. Numerical Methods for Partial Differential Equations.

[55] Matthews, S. G. (1994). Partial Metric Topology. *Annals of the New York Academy of Sciences-Paper Edition*. **728**, 1

This book consists of five chapters. In the first chapter, which is the introduction, information is given about the neutrosophic sets, neutrosophic triplet sets, bipolar metric space structures and the history of these structures. In the second chapter, where general information is included, fuzzy set, intuitionistic fuzzy set, neutrosophic set, neutrosophic triplet set, metric space, neutrosophic triplet metric space, bipolar metric space structures are introduced. In the third chapter, the neutrosophic triplet bipolar metric space structure is introduced. Some examples are given to make this structure understandable. In addition, some theorems have been obtained proving that neutrosophic triplet bipolar metric space is more general than classical metric space, neutrosophic triplet metric space, bipolar metric space. In the fourth chapter, the neutrosophic triplet partial bipolar metric space structure is introduced. Theorems showing that the neutrosophic triplet partial bipolar metric space is different from the neutrosophic triplet metric space, neutrosophic triplet partial metric space and neutrosophic triplet bipolar metric space are given. In the last chapter, the results obtained in the book are given.