NCML Neutrosophic Computing and Machine Learning, Vol. x, 20xx
University of New Mexico

Operadores para Sobre/Sub/Fuera de Rango - Conjuntos, /-Lógicas, /-Probabilidades y /-Estadísticas de Incertidumbre

Florentin Smarandache[1]

[1] Universidad de Nuevo México, Departamento de Matemáticas y Ciencias, 705 Gurley Ave., Gallup, NM 87301, EE.UU.
Correo electrónico: smarand@unm.edu

Resumen. En este artículo se proponen por primera vez los operadores (intersección/conjunción y unión/disyunción) para las lógicas, probabilidades y estadísticas inciertas basadas en sobreconjuntos, subconjuntos y conjuntos fuera de rango. Se presentan aplicaciones prácticas de los conjuntos difusos tipo sobreconjunto, subconjunto y fuera de rango, así como de sus respectivas lógicas, probabilidades y estadísticas. También se indica que se pueden diseñar aplicaciones similares para cualquier extensión difusa basada en sobreconjuntos, subconjuntos y conjuntos fuera de rango.

Palabras clave:
norma; sobrenorma; subnorma; norma fuera de rango; conorma; sobreconorma; subconorma; conorma fuera de rango.

1 Introducción

El *conjunto neutrosófico* fue ampliado por primera vez por Smarandache [2–6] en el año 2007 al *SobreConjunto neutrosófico* (cuando algún componente neutrosófico es mayor que 1), dado que, por ejemplo, un empleado que realiza horas extraordinarias merece un grado de pertenencia superior a 1 en comparación con un empleado que trabaja únicamente a tiempo completo, cuyo grado de pertenencia es igual a 1.

Asimismo, fue extendido al *subconjunto neutrosófico negativo* (cuando algún componente neutrosófico es menor que 0), considerando, por ejemplo, el caso de un empleado que ocasiona más perjuicio que beneficio a su empresa, y que, por lo tanto, justifica un grado de pertenencia inferior a 0 en relación con un empleado que aporta beneficios a la organización y posee un grado de pertenencia positivo.

Finalmente, se introdujo el concepto de *conjunto neutrosófico fuera de rango*, definido como aquel en el que algunos de sus componentes se encuentran fuera del intervalo estándar [0, 1], es decir, al menos un componente excede 1 mientras que otro es inferior a 0.

De forma análoga, se extendieron también la lógica, medida, probabilidad y estadística neutrosófica a sus respectivas versiones de *SobreConjunto*, *SubConjunto Negativo* y *Conjunto Fuera de Rango*.

Estas generalizaciones emergen de aplicaciones prácticas, en las que los grados $[\varphi, \psi]$ se sitúan fuera del intervalo convencional [0, 1], o en las que se verifica la condición $\varphi \leq 0 < 1 \leq \psi$.

El término “sobre” hace referencia a grados mayores que 1, “sub” a grados menores que 0, mientras que “fuera de rango” indica la coexistencia de componentes mayores que 1 y menores que 0.

Por “conjuntos/lógicas/medidas/probabilidades/estadísticas inciertas” se entienden, en términos generales, todas las variantes difusas y sus extensiones, tales como: *neutrosóficas, plitonigénicas, difusas intuicionistas, difusas intuicionistas inconsistentes, difusas con imagen (picture fuzzy), difusas ternarias, difusas pitagóricas, intuicionistas de Atanassov, fermateanas, esféricas, neutrosóficas hiperesféricas n-dimensionales, difusas ortopar q-rung, neutrosóficas refinadas*, entre otras.

En el presente trabajo se propone la extensión de la *t-norma* a la *norma sobre/sub/fuera de rango*, y de modo análogo, la extensión de la *t-conorma* a la *conorma sobre/sub/fuera de rango*.

2 Anotación

A diferencia de las versiones anteriores de los artículos y libros sobre *sobre/sub/fuera de rango conjuntos/lógicas/probabilidades inciertas* [2–6], en los cuales el intervalo no clásico se denotaba como $[\psi, \varphi]$, proponemos ahora utilizar la notación $[\varphi, \psi]$, dado que la letra φ precede a la letra ψ en el alfabeto griego. Todas las demás ideas permanecen sin cambios.

3 Normas y Conormas Triangulares Clásicas

Por normas y conormas triangulares clásicas [1] nos referimos a aquellas normas y conormas cuyos dominios y codominios son iguales a [0, 1], como por ejemplo en las teorías difusas. Mientras que, por Normas y Conormas Triangulares Sobre/Sub/Fuera de Rango [2 – 6], nos referimos a aquellas normas y conormas cuyos dominios y codominios son diferentes de [0, 1].

3.1 Definición de Norma Triangular Clásica

Una norma triangular (abreviada t-norma) es una operación binaria T sobre el intervalo [0, 1] que satisface las siguientes condiciones:

$T:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$.

Para todo $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$, se cumple:

- $T(x,y) = T(y,x)$ (*conmutatividad*)
- $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$ (*asociatividad*)
- $y \leq z \Rightarrow T(x,y) \leq T(x,z)$ (*monotonía*)
- $T(x,1) = x$ (*elemento neutro 1*)

3.1.1 Ejemplos de t-normas

- $T_M(x,y) = \min(x,y)$ (*mínimo o t-norma de Gödel*)
- $T_P(x,y) = x \cdot y$ (*t-norma producto*)
- $T_L(x,y) = max(x+y-1,0)$ (*t-norma de Łukasiewicz*)

3.2 Definición de Conorma Triangular Clásica

Una noción dual a la norma triangular es la conorma triangular (abreviada t-conorma, también conocida como s-norma):

$S:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$.

Y para todo $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$, se cumple:

- $S(x,y) = S(y,x)$ (*conmutatividad*)
- $S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z)$ (*asociatividad*)
- $y \leq z \Rightarrow S(x,y) \leq S(x,z)$ (*monotonía*)
- $S(x,0) = x$ (*elemento neutro 0*)

La conorma S tiene como elemento neutro el 0 (cero), en lugar del 1, pero todas las demás condiciones permanecen iguales.

3.2.1 Ejemplos de t-conormas

- $T_M(x,y) = \min(x,y)$ (*máximo o t-conorma de Gödel*)
- $T_P(x,y) = x \cdot y$ (*-conorma producto o suma probabilística*)
- $T_L(x,y) = max(x+y-1,0)$ (*t-conorma de Łukasiewicz o suma acotada*)

4 Sobrenorma/Subnorma/Norma Fuera de Rango y Sobreconorma/Subconorma/Conorma Fuera de Rango

Extendemos la norma y la conorma triangular clásica, cuyo dominio y codominio es [0, 1], a los siguientes casos:

- *Sobrenorma* y *sobreconorma*, cuando su dominio y codominio son $[0, \psi]$, con $\psi > 1$;
- *Subnorma* y *subconorma*, cuando su dominio y codominio son $[\varphi, 1]$, con $\varphi < 0$;
- *Norma fuera de rango* y *conorma fuera de rango*, cuando su dominio y codominio son $[\varphi, \psi]$, $\varphi < 0 < 1 < \psi$.

4.1 Definición de la Norma Triangular Fuera de Rango

Una norma triangular fuera de rango (abreviada t-norma fuera de rango) es una operación binaria

$T_{Fuera\ de\ Rango}: [\varphi,\psi]\times[\varphi,\psi]\rightarrow[\varphi,\psi]$, $\varphi < 0 < 1 < \psi$,

de modo que, para todo $(x,y)\in[\varphi,\psi]\times[\varphi,\psi]$, se cumple:

Conmutatividad: $T_{Fuera\ de\ Rango}(x,y) = T_{Fuera\ de\ Rango}(y,x)$;

Asociatividad: $T_{Fuera\ de\ Rango}(x, T_{Fuera\ de\ Rango}(y,z)) = T_{Fuera\ de\ Rango}(T_{Fuera\ de\ Rango}(x,y), z)$;
Monotonicidad: Si $y \leq z$, entonces $T_{Fuera\ de\ Rango}(x,y) \leq T_{Fuera\ de\ Rango}(x,z)$;
Elemento neutro: $T_{Fuera\ de\ Rango}(x, \psi) = x$, es decir, el elemento neutro es ψ - el mayor del intervalo.

4.1.1 Ejemplos de Norma Triangular Fuera de Rango

$T_{Fuera\ de\ Rango}(x,y) = min(x,y)$, la cual es la extensión de la t-norma de Gödel desde el intervalo unitario [0,1] al intervalo no unitario [φ, ψ], donde $\varphi < 0 < 1 < \psi$.

Demostración
La conmutatividad, asociatividad y monotonicidad del operador mínimo son evidentes en cualquier intervalo real. Dado que el elemento neutro debe ser el valor más grande del intervalo dado, en este caso, el elemento neutro es ψ (el mayor).

4.2 Definición de SobreNorma Triangular

Es similar a la Norma Triangular Fuera de Rango, pero definida sobre el intervalo [0, ψ], donde ψ > 1.
$T_{SobreNorma}$: $[0,\psi] \times [0,\psi] \rightarrow [0,\psi]$, donde $\psi > 1$.
Se cumplen los axiomas de:
Conmutatividad: $T_{SobreNorma}(x,y) = T_{SobreNorma}(y,x)$;
Asociatividad: $T_{SobreNorma}(x, T_{SobreNorma}(y,z)) = T_{SobreNorma}(T_{SobreNorma}(x,y), z)$,
Monotonía: $y \leq z$, entonces $T_{SobreNorma}(x,y) \leq T_{SobreNorma}(x,z)$
Elemento neutro: $T_{SobreNorma}(x,\psi) = x$, or the neutral element is ψ, es decir, el *elemento neutro* es ψ - el mayor del intervalo.

4.2.1 Ejemplo de SobreNorma Triangular

$T_{SobreNorma}(x,y) = min\ (x,y)$

Este es un caso de la norma t de Gödel *extendida* del intervalo unitario [0,1] al intervalo *no unitario* [0,ψ], con ψ > 1.

4.3 Definición de SubNorma Triangular

Es similar a la Norma Triangular Fuera de Rango, pero en el intervalo [φ, 1], con $\varphi < 0$.
$T_{SubNorma}: [\varphi, 1] \times [\varphi, 1] \rightarrow [\varphi, 1]$, donde $\varphi > 0$.
Para cualquier $(x, y) \in [\varphi, 1] \times [\varphi, 1]$, se verifican los axiomas de conmutatividad, asociatividad, monotonía y existencia de un elemento neutro.

$T_{SubNorma}(x,y) = T_{SubNorma}(y,x)$, *conmutatividad*;
$T_{SubNorma}(x, T_{SubNorma}(y,z)) = T_{SubNorma}(T_{SubNorma}(x,y), z)$, *asociatividad*;
If $y \leq z$, then $T_{SubNorma}(x,y) \leq T_{SubNorma}(x,z)$, *monotonía*;
$T_{SubNorma}(x,1) = x$, o el *elemento neutro* es 1.

4.3.1 Ejemplo de SubNorma Triangular

$T_{SubNorma}(x,y) = min\ (x,y)$

4.4 Definición de Conorma Triangular Fuera de Rango

De manera similar a la Conorma Triangular clásica, la Conorma Triangular Fuera de Rango es la dual de la Norma Triangular Fuera de Rango.

$T_{Conorma\ Fuera\ de\ Rango}: [\varphi,\psi] \times [\varphi,\psi] \rightarrow [\varphi,\psi]$, donde φ<0<1<ψ,

y para cualquier $(x, y) \in [\varphi,\psi] \times [\varphi,\psi]$ se tiene:

$S_{Conorma\ Fuera\ de\ Rango}(x,y) = S_{Conorma\ Fuera\ de\ Rango}(y,x)$, *conmutatividad*;

$S_{Conorma\ Fuera\ de\ Rango}(x, S_{Conorma\ Fuera\ de\ Rango}(y,z)) = S_{Conorma\ Fuera\ de\ Rango}(S_{Conorma\ Fuera\ de\ Rango}(x,y), z)$, *asociatividad*;

Si $y \leq z$, entonces $S_{Conorma\ Fuera\ de\ Rango}(x,y) \leq S_{Conorma\ Fuera\ de\ Rango}(x,z)$, *monotonía*;

$S_{Conorma\ Fuera\ de\ Rango}(x, \varphi) = x$, el *elemento neutro* es el elemento más pequeño φ.

4.4.1 Ejemplos de Conorma Triangular Fuera de Rango

$S_{Conorma\ Fuera\ de\ Rango}(x, y) = max\ (x, y)$, que es otra t-conorma de Gödel extendida.

La conmutatividad, asociatividad y monotonía del operador máximo son válidas en cualquier intervalo real. Pero como elemento neutro se tiene ahora φ (el elemento más pequeño del intervalo real [φ,ψ]), en lugar de 0 (cero) como en la $S_{Conorma}$ clásica.

4.5 Definición de SobreConorma Triangular

Es como la Conorma Triangular Fuera de Rango, pero en el intervalo [0,ψ], con ψ>1.

$T_{SobreConorma}: [0, \psi] \times [0, \psi] \rightarrow [0, \psi]$, donde $\psi > 1$.

Y para cualquier $(x, y) \in [0, \psi] \times [0, \psi]$, se verifican los axiomas de conmutatividad, asociatividad, monotonía y existencia de un elemento neutro:

$S_{SobreConorma}(x, y) = S_{SobreConorma}(y, x)$, *conmutatividad*,

$S_{SobreConorma}(x, S_{SobreConorma}(y, z)) = S_{SobreConorma}(S_{SobreConorma}(x, y), z)$, *asociatividad*;

Si $y \leq z$, entonces $S_{SobreConorma}(x, y) \leq S_{SobreConorma}(x, z)$, *monotonía*;

$S_{SobreConorma}(x, 0) = x$, o el *elemento neutro* es 0 (cero).

4.5.1 Ejemplo de SobreConorma Triangular

$S_{SobreConorma}(x, y) = max\ (x, y)$

4.6 Definición de SubConorma Triangular

Es similar a la Conorma Triangular Fuera de Rango, pero en el intervalo [φ,1], con φ<0.

$T_{SubConorma}: [\varphi, 1] \times [\varphi, 1] \rightarrow [\varphi, 1],\ \varphi > 0$, con φ<0.

Y para cualquier $(x, y) \in [\varphi, 1] \times [\varphi, 1]$, se verifican los mismos axiomas:

$S_{SubConorma}(x, y) = S_{SubConorma}(y, x)$, *conmutatividad*;

$S_{SubConorma}(x, S_{SubConorma}(y, z)) = S_{SubConorma}(S_{SubConorma}(x, y), z)$, *asociatividad*;

Si $y \leq z$, entonces $S_{SubConorma}(x, y) \leq S_{SubConorma}(x, z)$, *monotonía*;

$S_{SubConorma}(x, \varphi) = x$, o el *elemento neutro* es φ (el más pequeño).

4.6.1 Ejemplo de SubConorma Triangular

$S_{SubConorma}(x, y) = max(x, y)$

5 Aplicaciones prácticas de la Norma Fuera de Rango y la Conorma Fuera de Rango

5.1 Aplicación del SobreConjunto Difuso

En una clase de matemáticas, el profesor aplica un examen a los estudiantes con 10 preguntas obligatorias. Por cada pregunta contestada correctamente, se otorgan 10 puntos.

Sin embargo, considerando que hay varios estudiantes muy dotados que participan en las Olimpiadas Regionales de Matemáticas, el profesor añade una pregunta adicional difícil, que es opcional.

Al resolver correctamente los diez primeros problemas matemáticos, un estudiante obtiene 10×10=100 puntos, equivalente a la calificación A. Recordamos que las calificaciones son las siguientes, en orden ascendente:

F < D < C < B < A, o {F, D, C, B, A}.

Significan, reprobar si un estudiante obtiene F o D, y aprobar si obtiene C, B o A. Estas corresponden numéricamente aproximadamente a:

{0, 0.25, 0.50, 0.75, 1}, o F(0), D(0.25), C(0.50), B(0.75), A(1),

donde, por supuesto, 0=0% significa 0 puntos de 100 puntos, 0.25=25% o 25 puntos de 100 puntos, etc.

Pero para los estudiantes que también resuelven el problema 11, se les otorga la calificación A^+, que es superior a A, ya que:

11 preguntas × 10 puntos = 110 puntos = A+, lo cual es > 100 puntos = A.

110 puntos de 100 puntos requeridos es 110/100=1.1 grados, correspondiente a A^+.

Por lo tanto, la escala de calificación se extendió del intervalo unitario clásico [0,1] al intervalo no unitario [0,1.1].

Por lo tanto, el grado 1.1 de A^+ es mayor que el intervalo [0,1], por lo que tenemos un SobreConjunto.

5.1.1 Aplicación de la SobreLógica Difusa

Sea la proposición:
P = "La estudiante Marcella obtiene una calificación aprobatoria."
¿Cuál podría ser el SobreValor de Verdad de esta proposición?
Aprobar significa obtener una puntuación entre el 50% y el 110%, o entre [0.5,1.1].
Así, el SobreValor de Verdad es todo el intervalo [0.5,1.1], mientras que en la lógica clásica el valor de verdad es menor, en todo el intervalo [0.5,1].

5.1.2 Aplicación de la SobreProbabilidad Difusa

¿Cuál es la SobreProbabilidad de que Marcella apruebe el examen (incluyendo obtener A^+)? Otra pregunta: ¿Cuál es la SobreProbabilidad de que un estudiante obtenga un A^+ (grado > 1)?
Aprobar significa obtener una puntuación entre el 50% y el 110%, o entre [0.5,1.1] de [0,1.1],
por lo tanto:

$$\frac{1.1-0.5}{1.1-0}=\frac{0.6}{1.1}\approx 0.55$$

Cabe señalar que en el caso clásico (sin SobreProbabilidad, o sin A^+ en la escala de calificación), cuando el dominio y el codominio son solo [0,1], el resultado de la probabilidad clásica es, en general, menor:

$$\frac{1-0.5}{1-0}=\frac{0.5}{1}=0.50$$

5.1.3 Aplicación de la SobreEstadística Difusa

La SobreEstadística (OverStatistics), además de la estadística clásica, también considera los eventos de SobreProbabilidad. Por ejemplo, el número de estudiantes que obtienen más del 100% en el examen.

Ejemplos Numéricos Difusos

$T_{SobreNorma}$:[0,1.1]×[0,1.1]→[0,1.1]
$T_{SobreNorma}$ (0.4,1.1)=min{0.4,1.1}=0.4
$S_{SobreNorma}$:[0,1.1]×[0,1.1]→[0,1.1]
$S_{SobreNorma}$ (0.4,1.1)=max{0.4,1.1}=1.1

5.2 Aplicación del SubConjunto Difuso

En un examen de admisión en la Universidad X, los estudiantes deben aprobar varias pruebas. En cada prueba, obtienen una puntuación entre 0% y 100% puntos, o un grado entre [0,1]. El valor más bajo es 0 (cero) puntos. Incluso si un estudiante obtiene un cero en una prueba, no es eliminado, todavía tiene la posibilidad de ser admitido si obtiene calificaciones más altas en las otras pruebas y, por supuesto, otros estudiantes obtienen calificaciones más bajas.

El estudiante Sean es sorprendido haciendo trampa y es expulsado de la competencia, por lo tanto, no tiene más posibilidades. Así, el veredicto de “expulsado de la competencia” debería tener un grado menor que cero.

Por lo tanto, ahora tratamos con el subconjunto $\varphi \cup [0,1]$, donde $\varphi < 0$, φ representa el grado de ser expulsado. Como ejemplo numérico, $\varphi = -1$, y el subconjunto es $\{-1\}\cup[0,1]$.

$T_{SubNorma}$:$(\{-1\}\cup[0,1])\times(\{-1\}\cup[0,1])\rightarrow(\{-1\}\cup[0,1])$
$S_{SubConorma}$:$(\{-1\}\cup[0,1])\times(\{-1\}\cup[0,1])\rightarrow(\{-1\}\cup[0,1])$

5.2.1 Aplicación de la SubLógica Difusa

De manera similar, sea la proposición:
P = "La estudiante Marcella obtiene una calificación aprobatoria."
¿Cuál podría ser el SubValor de Verdad difuso de esta proposición?
Aprobar significa obtener una puntuación entre el 50% y el 100%, o entre [0.5,1].
Así, el SubValor de Verdad difuso es el intervalo [0.5,1], el mismo que en la lógica clásica.

5.2.2 Aplicación de la SubProbabilidad Difusa

En la probabilidad clásica, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante John obtenga 23 puntos de un total de 100 puntos? Es: una posibilidad favorable (23 puntos), de ciento una posibilidades totales:
{0,1,2,3,4,5,…,23,24,…,100}
Es decir:

$\frac{1}{101}\approx 0.00990099$

En la SubProbabilidad difusa, la probabilidad de que el estudiante John obtenga 23 puntos de 100 puntos es: una posibilidad favorable (23 puntos), pero de ciento dos posibilidades totales:

$\{-1,0,1,2,3,4,5,\ldots,23,24,\ldots,100\}$

Es decir:

$\frac{1}{102}\approx 0.00980392$

lo cual es menor que la probabilidad clásica.

¿Cuál es la SubProbabilidad difusa de que el estudiante Raymond obtenga cero puntos, o sea expulsado de la competencia (es decir, que el estudiante obtenga el grado -1)? Dos casos favorables de 102 casos totales posibles:

Es:

$\frac{2}{102}\approx 0.01960784$

5.2.3 Aplicación de la SubEstadística Difusa

La SubEstadística difusa, además de la estadística clásica, considera también los eventos de SubProbabilidad. Por ejemplo, el número de estudiantes que obtienen menos del 0% de puntos (expulsados) en el examen, etc.

5.3 Aplicación del Conjunto Fuera de Rango Difuso

Retomamos los ejemplos prácticos anteriores y los combinamos:

En una clase de matemáticas, el profesor aplica un examen a los estudiantes con 10 preguntas obligatorias. Por cada pregunta contestada correctamente, se otorgan 10 puntos.

Sin embargo, considerando que hay varios estudiantes muy dotados que participan en las Olimpiadas Regionales de Matemáticas, los examinadores añaden una pregunta adicional difícil, que es opcional, y también asignan 10 puntos por resolverla correctamente.

Si un estudiante es sorprendido haciendo trampa, es expulsado de la escuela.

De manera similar, "expulsado" significa menos de 0 (cero) puntos.

El dominio y el rango son ahora, por ejemplo, $[-1.2,1.1]$, donde el grado -1.2 significa expulsado y el grado 1.1 significa haber resuelto también el undécimo problema adicional.

Los márgenes inferior (φ) y superior (ψ) del dominio y codominio del Conjunto/Lógica/Probabilidad/Estadística Fuera de Rango difuso [φ,ψ] son establecidos por los expertos de acuerdo con la aplicación en la que se utilizan.

5.3.1 Aplicación de la Lógica Fuera de Rango Difusa

Encuentre el Valor de Verdad Fuera de Rango difuso de la proposición, P = "Miguel obtiene un A^{+}".

Significa que Miguel obtiene entre $(1.0,1.1]$ en el examen, de $[-1.2,1.1]$.

$$\frac{1.1-1.0}{1.1-(-1.2)}=\frac{0.1}{2.3}\approx 0.043\ldots$$

5.3.2 Aplicación de la Probabilidad Fuera de Rango Difusa

¿Cuál es la Probabilidad Fuera de Rango difusa de que Marcella sea expulsada?

Significa que Marcella obtiene entre $[-1.2,0)$ en el examen, de $[-1.2,1.1]$.

$$\frac{|0-(-1.2)|}{1.1-(-1.2)}=\frac{1.2}{2.3}=0.521\ldots$$

5.3.3 Aplicación de la Estadística Fuera de Rango Difusa

La Estadística Fuera de Rango (OffStatistics) difusa, además de la estadística clásica, considera también los eventos de Probabilidad Fuera de Rango difusa. Por ejemplo, las estadísticas sobre los estudiantes que obtienen más del 100% o menos del 0% en el examen.

6 Investigaciones futuras

Se necesitan mejores diseños para las Normas y Conormas Sobre/Sub y Fuera de Rango en los contextos difusos y de otras extensiones difusas. Esto podría lograrse utilizando posiblemente funciones continuas o extensiones de las normas t y conormas t clásicas (del Producto o de Łukasiewicz), satisfaciendo por supuesto los axiomas requeridos (conmutatividad, asociatividad, monotonía y existencia de un elemento neutro). Asimismo, es necesario introducir más operadores, por ejemplo: complemento/negación, inclusión/implicación e igualdad/equivalencia. Se invita cordialmente a los lectores a contribuir al desarrollo de este nuevo campo de estudio sobre los grados de pertenencia/verdad, no-pertenencia/falsedad e indeterminación/neutralidad, entre otros, en los contextos difuso, difuso-intuicionista, neutrosófico, plitogénico y otras extensiones difusas, que se sitúan fuera del intervalo [0,1].

Las aplicaciones prácticas de los Conjuntos/Lógicas/Probabilidades/Estadísticas Difusos Sobre, Sub y Fuera de Rango se han presentado en este artículo. Las aplicaciones correspondientes en el marco neutrosófico han sido publicadas previamente entre los años 2007 y 2016 en artículos y libros [2–6].

Aplicaciones similares pueden desarrollarse para cualquier extensión difusa con Conjuntos/Lógicas/Probabilidades/Estadísticas Sobre, Sub o Fuera de Rango, y se invita a los lectores a contribuir con sus propuestas.

7 Conclusión

Por primera vez se han introducido los operadores (intersección, unión) para los Conjuntos y Lógicas Difusos Sobre, Sub y Fuera de Rango, y se han aplicado a situaciones reales.

Referencias

[1] Alsina, Claudi; Frank, Maurice J.; y Schweizer, Berthold (2006). *Associative Functions: Triangular Norms and Copulas*. World Scientific. DOI: 10.1142/6036

[2] Smarandache, Florentin. *A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability and Statistics* (sexta edición). ProQuest Information & Learning, Ann Arbor, Michigan, EE.UU., 2007. Disponible en: https://fs.unm.edu/eBook-Neutrosophics6.pdf

[3] Smarandache, Florentin. *Neutrosophic Overset, Neutrosophic Underset, and Neutrosophic Offset. Similarly, for Neutrosophic Over-/Under-/Off-Logic, Probability, and Statistics*. Bruselas: Pons Editions, 167 p., 2016. Disponible en: https://fs.unm.edu/NeutrosophicOversetUndersetOffset.pdf https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1607/1607.00234.pdf

[4] Smarandache, Florentin. *Operators on Single-Valued Neutrosophic Oversets, Neutrosophic Undersets, and Neutrosophic Offsets*. *Journal of Mathematics and Informatics*, Vol. 5, pp. 63–67, 2016. Disponible en: https://fs.unm.edu/SVNeutrosophicOverset-JMI.pdf

[5] Smarandache, Florentin. *Interval-Valued Neutrosophic Oversets, Neutrosophic Undersets, and Neutrosophic Offsets*. *International Journal of Science and Engineering Investigations*, vol. 5, núm. 54, julio 2016. Disponible en: https://fs.unm.edu/IV-Neutrosophic-Overset-Underset-Offset.pdf

[6] Smarandache, Florentin. *Degrees of Membership > 1 and < 0 of the Elements with Respect to a Neutrosophic OffSet*. *Neutrosophic Sets and Systems*, Vol. 12, pp. 3–8, 2016. Disponible en: https://fs.unm.edu/NSS/DegreesOf-Over-Under-Off-Membership.pdf

[7] Smarandache, Florentin (editor). *New Types of Neutrosophic Set/Logic/Probability, Neutrosophic Over-/Under-/Off-Set, Neutrosophic Refined Set, and Their Extension to Plithogenic Set/Logic/Probability, with Applications*. *Symmetry – Special Issue*. Basilea: MDPI, 685 p., 2016. Disponible en: https://fs.unm.edu/Symmetry-neutro-SI-2019.pdf

Primito: Día Mes, Año. Aceptado: Día Mes, Año.